

---

# Índice general

---

<b>1. ANALISIS DE SISTEMAS DEFINIDOS POR SUS MODELOS LINEALES</b>	<b>7</b>
1.1. Objetivos del análisis . . . . .	7
1.2. Modos propios de sistemas continuos . . . . .	9
1.2.1. Tipos de modos propios . . . . .	11
1.2.2. Modos propios de sistemas discretos . . . . .	15
1.3. Respuesta libre y forzada . . . . .	20
1.3.1. Sistema definido por su función de transferencia . . . . .	20
1.3.2. Sistema definido por su modelo de estado . . . . .	21
1.4. Estabilidad . . . . .	22
1.4.1. Definición . . . . .	22
1.4.2. Interpretación práctica . . . . .	22
1.4.3. Determinación de la estabilidad de un sistema . . . . .	22
1.5. Análisis del comportamiento estático . . . . .	24
1.6. Señales de entrada normalizadas . . . . .	25
1.6.1. Métodos temporales . . . . .	25
1.6.2. Métodos frecuenciales . . . . .	26
1.7. Análisis temporal del comportamiento dinámico de los sistemas continuos . . . . .	27
1.7.1. Polos reales. Respuestas sobreamortiguadas . . . . .	27
1.7.2. Polos complejos. Respuestas subamortiguadas . . . . .	31
1.7.3. Influencia de los ceros . . . . .	34
1.7.4. Sistema equivalente de orden reducido . . . . .	35
1.7.5. Dinámicas no modeladas . . . . .	37
1.8. Análisis temporal del comportamiento dinámico de los sistemas discretos . . . . .	38
1.9. Ejercicios y problemas . . . . .	38
1.10. Glosario . . . . .	38
<b>A. SISTEMAS DE PRIMER ORDEN</b>	<b>39</b>
A.1. Sistemas continuos . . . . .	39
A.1.1. Definición . . . . .	39
A.1.2. Respuesta Impulsional . . . . .	39
A.1.3. Respuesta al Escalón . . . . .	40
A.1.4. Respuesta a la Rampa . . . . .	41
A.1.5. Significado físico de los coeficientes de la Función de Transferencia . . . . .	41

---

A.1.6. Relación entre la posición del polo en el plano complejo y la respuesta transitoria . . . . .	42
A.1.7. Influencia de un cero adicional . . . . .	42
A.1.8. Influencia de polos reales adicionales . . . . .	44
A.1.9. Caso particular con dos polos reales y un cero . . . . .	45
<b>B. SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN</b>	<b>49</b>
B.1. Sistemas continuos . . . . .	49
B.1.1. Polos Reales . . . . .	49
B.1.2. Polos Complejos . . . . .	49
B.1.3. Respuesta Impulsional . . . . .	51
B.1.4. Respuesta al Escalón . . . . .	52
B.1.5. Respuesta a la Rampa . . . . .	54
B.1.6. Relación entre la respuesta al escalón y la posición de los polos sobre el plano complejo . . . . .	55
B.1.7. Influencia de un cero adicional . . . . .	56
B.1.8. Respuesta al escalón . . . . .	56

---

## Índice de tablas

---



---

## ANÁLISIS DE SISTEMAS DEFINIDOS POR SUS MODELOS LINEALES

---

En el capítulo anterior se ha visto como a partir del modelo matemático del sistema se pueden obtener dos representaciones compactas del sistema. La primera la función de transferencia permite reducir el conocimiento del sistema al de sus polos y ceros, en el segundo caso la representación del sistema se traduce en el conocimiento de las matrices A, B, C y D.

En este capítulo se van a presentar las técnicas de análisis de los sistemas definidos bien por su función de transferencia, o bien por su modelo de estado. El objetivo en ambos casos es el mismo: conocer las características dinámicas del sistema, es decir determinar aquellas propiedades que son inherentes al sistema y que por lo tanto aparecerán en la respuesta del mismo ante cualquier entrada.

No se trata de resolver las ecuaciones diferenciales que forman parte del modelo para una entrada concreta. Ese problema, de naturaleza estrictamente matemática tiene una solución relativamente simple de obtener. Además los modernos programas informáticos de simulación nos permiten resolver de forma cómoda y precisa la respuesta de un sistema definido por su modelo matemático ante una entrada concreta.

El objetivo es obtener las características que tienen todas las respuestas, independientemente de la entrada aplicada. Obviamente estas características comunes están originadas por las propias características del sistema. En otras palabras el estudio de las respuestas concretas no es el fin del análisis sino un medio para conocer el comportamiento dinámico del sistema.

Al finalizar el capítulo el alumno deberá ser capaz de determinar de forma simple las características dinámicas principales de un sistema a partir de su función de transferencia: estabilidad, comportamiento permanente y comportamiento transitorio. Igualmente deberá relacionar de forma cualitativa la posición de los polos y ceros del sistema sobre el plano complejo con dichas características

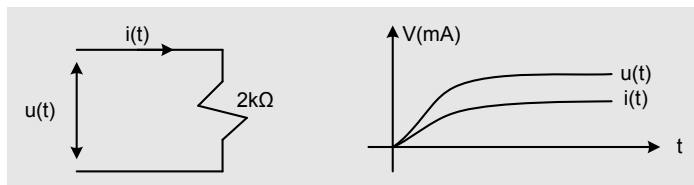
### 1.1. Objetivos del análisis

Con el análisis de un sistema se pretende conocer su comportamiento, es decir su forma de respuesta ante las posibles señales de entrada y perturbaciones.

En el caso de los sistemas estáticos lineales este análisis es inmediato puesto que en este tipo

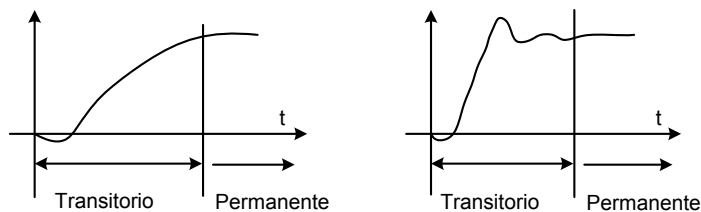
de sistemas, al no existir almacenamiento temporal de energía, la forma de onda de la señal de entrada es idéntica a la de salida sólo que amplificada o atenuada por la ganancia del sistema.

### Ejemplo 3.1



Sin embargo en el caso de los sistemas dinámicos el análisis se complica notablemente, no sólo porque es necesario determinar la forma de la respuesta transitoria hasta que se llega al valor final, sino porque en algunos casos aparece el fenómeno de la inestabilidad que supone un comportamiento radicalmente distinto del sistema.

El primer objetivo del análisis de los sistemas dinámicos será pues conocer su estabilidad. Una vez asegurada la estabilidad del sistema será necesario conocer no sólo el comportamiento estático, sino también el dinámico del sistema, para lo cual se estudiarán los regímenes permanentes y transitorios de las respuestas del sistema ante determinadas entradas.



Dado que, como se ha visto en capítulos anteriores, la representación de los sistemas no es única, y como veremos en el próximo capítulo, la de las señales tampoco lo es, existirán tantos métodos de análisis como combinaciones posibles de representaciones de señales y de sistemas.

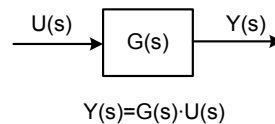
Sin embargo, independientemente del método utilizado, el objetivo es siempre el mismo, obtener las principales características estáticas y dinámicas del sistema y de ellas anticipar la respuesta del mismo ante cualquier entrada.

En la práctica es igualmente muy importante que este comportamiento del sistema pueda ser expresado en una terminología fácilmente comprensible por el usuario. Por lo tanto, no basta con resolver el problema desde un punto de vista matemático, sino que además es necesario traducir la solución a un lenguaje intuitivo no especializado. Es importante recordar aquí, el objetivo de analizar cualquier tipo de sistema.

Vamos a limitar el estudio al caso de los sistemas lineales invariantes en el tiempo (LTI Linear Time Invariant Systems). Con ello conseguiremos utilizar herramientas matemáticas más simples y, sobre todo podremos aplicar el principio de superposición, lo que supondrá una notable reducción del número de señales que deben ser aplicadas al sistema para analizarlo.

## 1.2. Modos propios de sistemas continuos

Conocida la función de transferencia de un sistema y la transformada de Laplace de la señal de entrada, la transformada de Laplace de la señal de salida es igual al producto de las dos expresiones anteriores.



Por lo tanto la respuesta del sistema es la transformada inversa de dicha expresión.

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)]$$

En nuestro caso, tanto la función de transferencia como la transformada de la entrada pueden representarse mediante expresiones racionales del tipo  $A(s)/B(s)$  donde  $A(s)$  y  $B(s)$  son polinomios en la variable compleja de Laplace, cuyas raíces son por lo tanto reales o complejas conjugadas.

$$Y(s) = \frac{K \prod (s + c_i)}{\prod (s + r_i)}$$

El método de cálculo de la transformada inversa más sencillo consiste en descomponer la expresión en  $s$  en fracciones simples, calcular las transformadas inversas de cada una de dichas fracciones, utilizando para ello la tabla de Transformadas de Laplace, y sumar dichas expresiones temporales.

$$Y(s) = \frac{K \prod (s + c_i)}{\prod (s + r_i)} = \sum \frac{A_i}{(s + r_i)}$$

$$y(t) = \sum L^{-1} \left[ \frac{A_i}{(s + r_i)} \right] = \sum A_i \cdot e^{-r_i t}$$

### Ejemplo 3.2

Sea el sistema con función de transferencia

$$G(s) = \frac{4}{(s + 1)(s + 3)}$$

, al que se le aplica un escalón unitario a la entrada (cuya transformada de Laplace es  $1/s$ ).

La transformada de Laplace de la respuesta será:

$$Y_1(s) = \frac{4}{s(s + 1)(s + 3)} = \frac{4/3}{s} + \frac{-2}{s + 1} + \frac{2/3}{s + 3}$$

y, por tanto,

$$y_1(t) = \frac{4}{3} - 2 \cdot e^{-t} + \frac{2}{3} \cdot e^{-3t}$$

Si al mismo tiempo se le aplica otra señal de entrada con transformada de Laplace

$$U(s) = \frac{1}{s+4}$$

, la transformada de la respuesta vendrá dada por

$$Y_2(s) = \frac{4}{(s+1)(s+3)(s+4)} = \frac{2/3}{s+1} + \frac{-2}{s+3} + \frac{4/3}{s+4}$$

por lo que la expresión de la respuesta será

$$y_2(t) = \frac{2}{3} \cdot e^{-t} - 2 \cdot e^{-3t} + 4 \cdot e^{-4t}$$

Como puede verse las expresiones de  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  tienen dos términos comunes,  $e^{-t}$  y  $e^{-3t}$  (aunque ponderados de distinta forma) que son los modos propios del sistema y que forman parte de la respuesta ante cualquier entrada.

El objetivo fundamental del análisis dinámico de los sistemas es el conocimiento de dichos modos propios, que al estar incluidos en cualquier respuesta, caracterizan al sistema.

La forma más simple de calcular los modos propios de un sistema es aplicándole una entrada cuya función de transferencia carezca de raíces en el denominador, como puede ser el impulso cuya transformada de Laplace es la unidad. Con esta entrada todas las fracciones simples que aparezcan en la salida corresponderán a los modos propios del sistema. En este caso la transformada de la señal de salida coincide con la función de transferencia del sistema

$$Y(s) = G(s) \cdot 1$$

y a la respuesta se le llama respuesta impulsional del sistema.

### Ejemplo 3.3

En el caso del ejemplo anterior la respuesta impulsional será la transformada inversa de

$$Y(s) = \frac{4}{(s+1)(s+3)} = \frac{2}{s+1} + \frac{-2}{s+3}$$

es decir

$$y(t) = 2 \cdot e^{-t} - 2 \cdot e^{-3t}$$

Puede observarse que los modos presentes en la respuesta impulsional aparecen en las dos respuestas del ejemplo anterior.

### 1.2.1. Tipos de modos propios

De la descomposición en fracciones simples de la función de transferencia y de la tabla de transformadas de Laplace se obtienen los modos propios que pueden aparecer en cualquier sistema lineal:

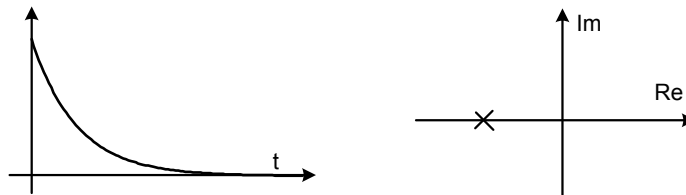
12 ANALISIS DE SISTEMAS DEFINIDOS POR SUS MODELOS LINEALES

Fracción simple $a > 0, b > 0$	Transformada inversa (para $t \geq 0$ )	Forma de onda	límite $t \rightarrow \infty$	Posición de los polos en el plano complejo
$\frac{A}{s}$	$y(t) = A$	Constante	A	Polo en el origen
$\frac{A}{(s+a)}$	$y(t) = A \cdot e^{-at}$	Exponencial decreciente	0	Polo real en el semiplano negativo
$\frac{A}{(s-a)}$	$y(t) = A \cdot e^{+at}$	Exponencial creciente	$\infty$	Polo real en el semiplano positivo
$\frac{A \cdot a}{(s^2 + a^2)}$	$y(t) = A \cdot \text{sen}(a \cdot t)$	Seno	Oscila	Polos imaginarios
$\frac{A \cdot s}{(s^2 + a^2)}$	$y(t) = A \cdot \text{cos}(a \cdot t)$	Coseno	Oscila	Polos imaginarios
$\frac{A \cdot a}{(s+b)^2 + a^2}$	$y(t) = A \cdot e^{-bt} \text{sen}(a \cdot t)$	Producto de exponencial decreciente por seno	0	Polos complejos con parte real negativa
$\frac{A \cdot s}{(s+b)^2 + a^2}$	$y(t) = A \cdot e^{-bt} \text{cos}(a \cdot t)$	Producto de exponencial decreciente por coseno	0	Polos complejos con parte real negativa
$\frac{A \cdot a}{(s-b)^2 + a^2}$	$y(t) = A \cdot e^{+bt} \text{cos}(a \cdot t)$	Producto de exponencial creciente por coseno	Oscila con amplitud creciente	Polos complejos con parte real positiva
$\frac{A \cdot s}{(s-b)^2 + a^2}$	$y(t) = A \cdot e^{+bt} \text{cos}(a \cdot t)$	Producto de exponencial creciente por coseno	Oscila con amplitud creciente	Polos complejos con parte real positiva
$\frac{A}{s^2}$	$y(t) = A \cdot t$	Rampa	$\infty$	Polo doble en el origen
$\frac{A}{(s+a)^2}$	$y(t) = A \cdot t \cdot e^{-at}$	Exponencial decreciente por el tiempo	0	Polo real doble en el semiplano negativo
$\frac{A}{(s-a)^2}$	$y(t) = A \cdot t \cdot e^{+at}$	Exponencial creciente por el tiempo	$\infty$	Polo real doble en el semiplano positivo

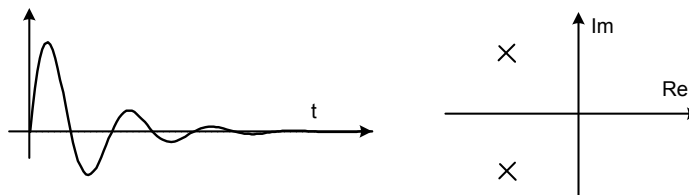
Aunque en la tabla sólo se han incluido algunos casos de polos con índice de multiplicidad superior a uno, es fácil deducir de las propiedades de la transformada de Laplace que la existencia de polos múltiples no va a producir cambios significativos ni en la forma de onda ni, sobre todo en el límite al tender  $t$  a infinito.

De la tabla se pueden extraer las siguientes conclusiones:

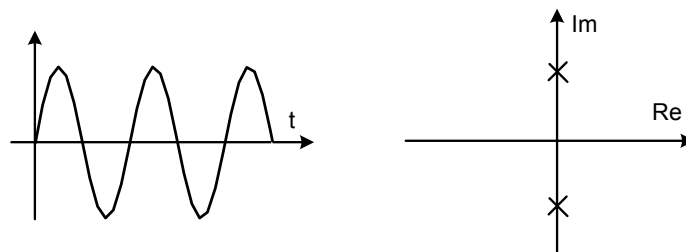
Los modos propios procedentes de polos reales negativos tienden a cero asintóticamente.



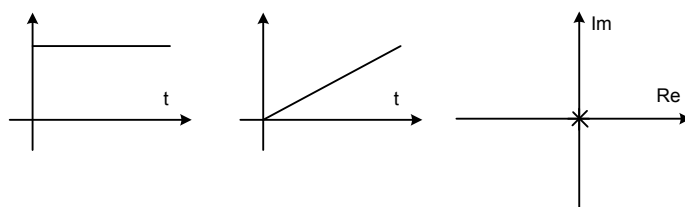
Los modos propios procedentes de polos complejos con parte real negativa tienden a cero con oscilaciones de amplitud decreciente.



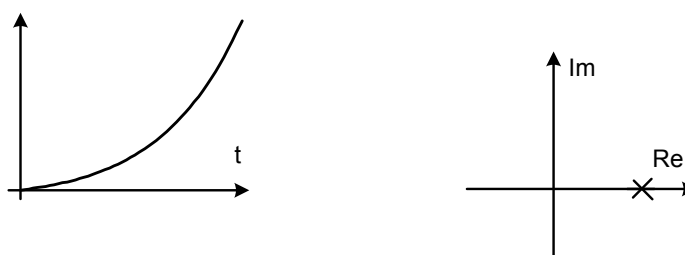
Los modos propios procedentes de polos imaginarios presentan oscilaciones sostenidas. Si estos polos tuviesen un índice de multiplicidad superior a dos se generarían modos propios con oscilaciones crecientes.



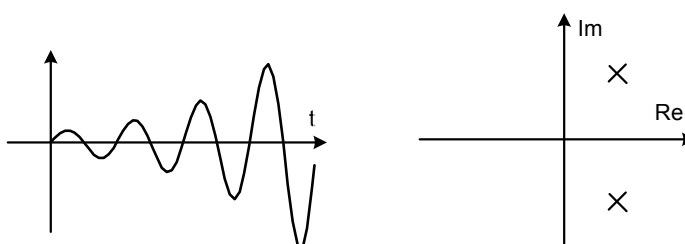
El modo propio correspondiente a un polo en el origen es una constante. Si existen más de un polo en el origen se generan modos propios que tienden a infinito.



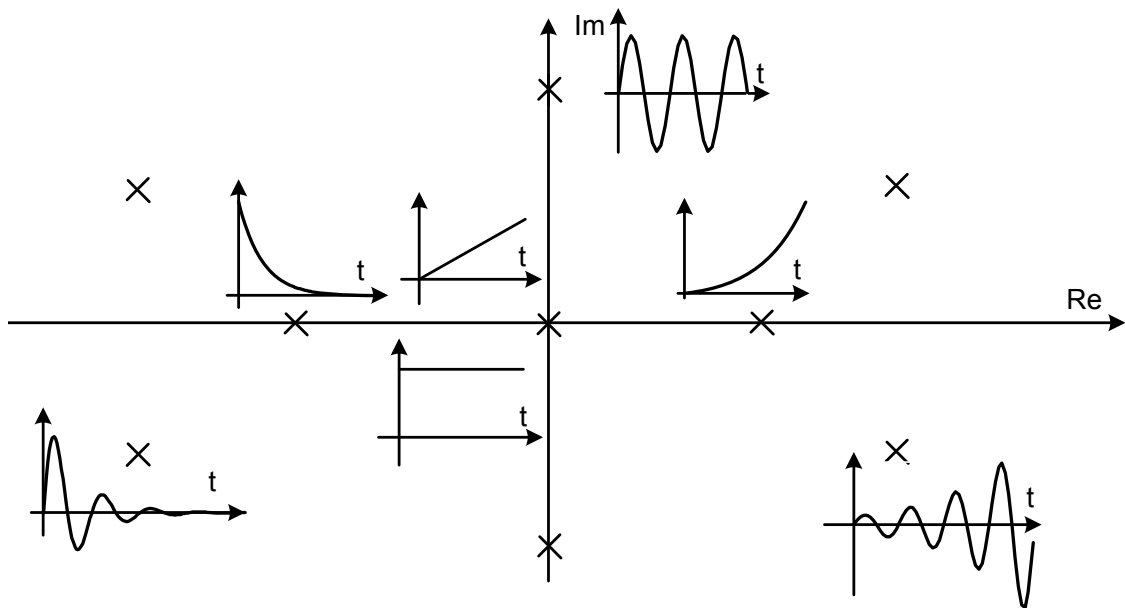
Los modos propios procedentes de polos reales positivos tienden exponencialmente a infinito.



Los modos propios procedentes de polos complejos con parte real positiva presentan oscilaciones de amplitud creciente.



La figura resume el contenido de la tabla anterior y muestra la relación existente entre la posición de los polos en el plano complejo y los modos propios del sistema.



- Por lo tanto, únicamente los polos, reales o complejos, situados en el semiplano complejo negativo, generan modos propios que tienden a cero al tender  $t$  a infinito. Estos son los modos transitorios de la respuesta impulsional del sistema.
- Además, la duración de la respuesta transitoria disminuye al alejar los polos del eje imaginario y, en el caso de los polos complejos, la pulsación de las oscilaciones es igual a la parte imaginaria de los polos.
- Es decir, existe una relación directa entre la posición de los polos estables sobre el plano complejo y la forma de su respuesta transitoria.

### 1.2.2. Modos propios de sistemas discretos

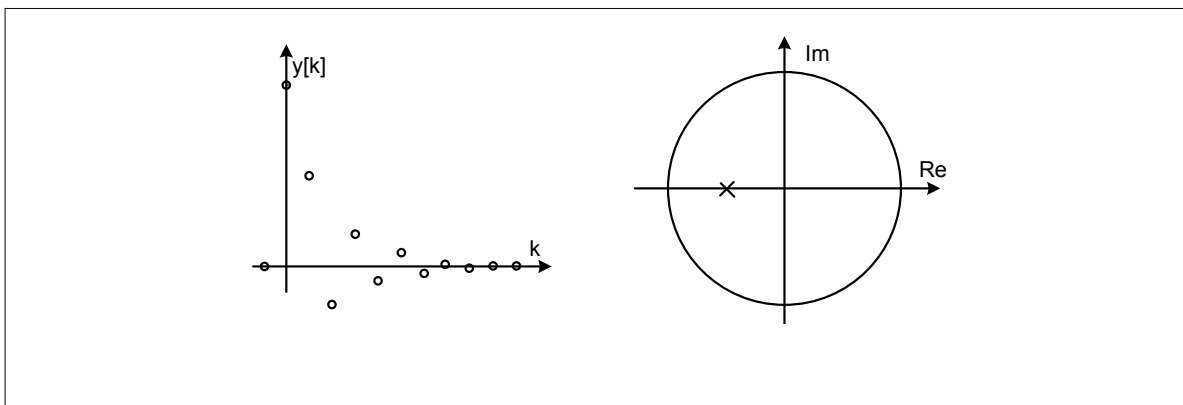
De forma análoga, en el caso de los sistemas discretos, se pueden calcular sus modos propios calculando la transformada inversa de su función de transferencia en  $z$ , obteniéndose la tabla:

Fracción simple	Transformada inversa para $k \geq 0$	Forma de onda	límite $t \rightarrow \infty$	Posición de los polos en el plano complejo
$\frac{Az}{z-1}$	$y[k] = A$	Constante	A	Polo en $z=1$
$\frac{Az}{(z-a)}$	$y[k] = A \cdot a^k$	Exponencial decreciente para $0 < a < 1$ , Exponencial creciente para $a > 1$	0 para $0 < a < 1$ , $\infty$ para $a > 1$	Polo en $]0,1[$ para $0 < a < 1$ , Polo en $]1, \infty[$ para $a > 1$
$\frac{Az}{(z-1)^2}$	$y[k] = A \cdot k$	rampa	$\infty$	Polo doble
$\frac{Aaz}{(z-a)^2}$	$y[k] = A \cdot k \cdot a^k$	Exponencial decreciente por rampa para $0 < a < 1$ , exponencial creciente por rampa para $a > 1$	0 para $0 < a < 1$ , $\infty$ para $a > 1$	Polo doble en $]0,1[$ , Polo doble en $]1, \infty[$
$\frac{z \cdot \text{sen}\theta}{(z - \cos\theta)^2 + \text{sen}^2\theta}$	$y[k] = \text{sen}(\theta k)$	Senoide	Oscila	Polos complejos sobre la circunferencia unidad
$\frac{z(z - \cos\theta)}{(z - \cos\theta)^2 + \text{sen}^2\theta}$	$y[k] = \cos[\theta k]$	Coseno	Oscila	Polos complejos sobre la circunferencia unidad
$\frac{z\rho\text{sen}\theta}{(z - \rho\cos\theta)^2 + \rho^2\text{sen}^2\theta}$	$y[k] = \rho^k \text{sen}(\theta k)$	Exponencial por seno	0 para $\rho < 1$ , $\infty$ para $\rho > 1$	Polos complejos internos a la circunferencia unidad para $\rho < 1$ , polos externos a la circunferencia unidad para $\rho > 1$

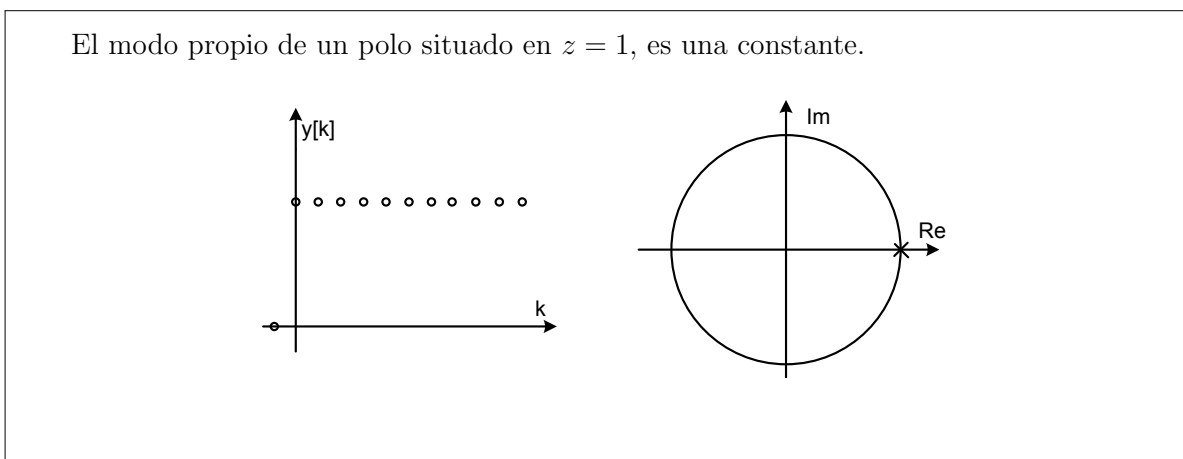
Fracción simple	Transformada inversa para $k \geq 0$	Forma de onda	límite $t \rightarrow \infty$	Posición de los polos en el plano complejo
$\frac{z(z - \rho \cos \theta)}{(z - \rho \cos \theta)^2 + \rho^2 \sin^2 \theta}$	$y[k] = \rho^k \cos(\theta k)$	Exponencial por coseno	0 para $\rho < 1$ , $\infty$ para $\rho > 1$	Polos complejos internos a la circunferencia unidad para $\rho < 1$ , polos externos a la circunferencia unidad para $\rho > 1$
$\frac{Az}{z + a}$	$y[k] = A \cdot (-a)^k$	Exponencial oscilante creciente para $a > 1$ , decreciente para $a < 1$ y constante para $a = 1$	0 para $a < 1$	segmento $] - 1, [$ para $a < 1$ , segmento $]a, -1[$ para $a > 1$ y $z = -1$ para $a = 1$

Los modos propios procedentes de polos reales situados en el segmento  $]0, 1[$  de la circunferencia de radio unidad tienden a cero asintóticamente.

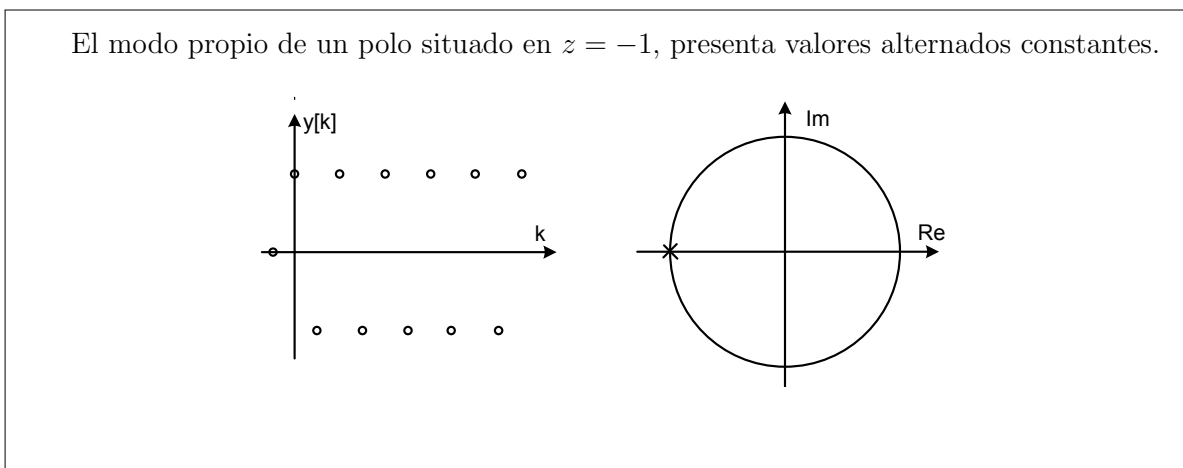
Los modos propios procedentes de polos reales situados en el segmento  $] - 1, 0[$  de la circunferencia de radio unidad tienden a cero con valores alternados de amplitud decreciente.



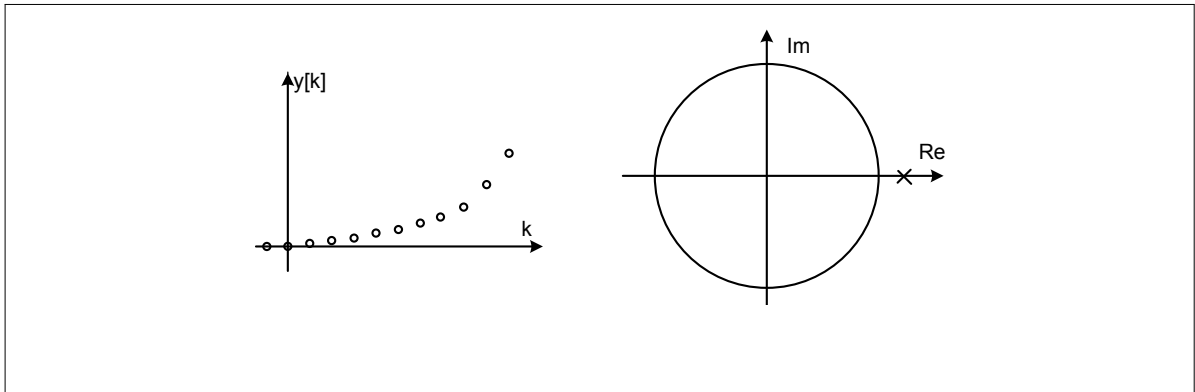
El modo propio de un polo situado en  $z = 1$ , es una constante.



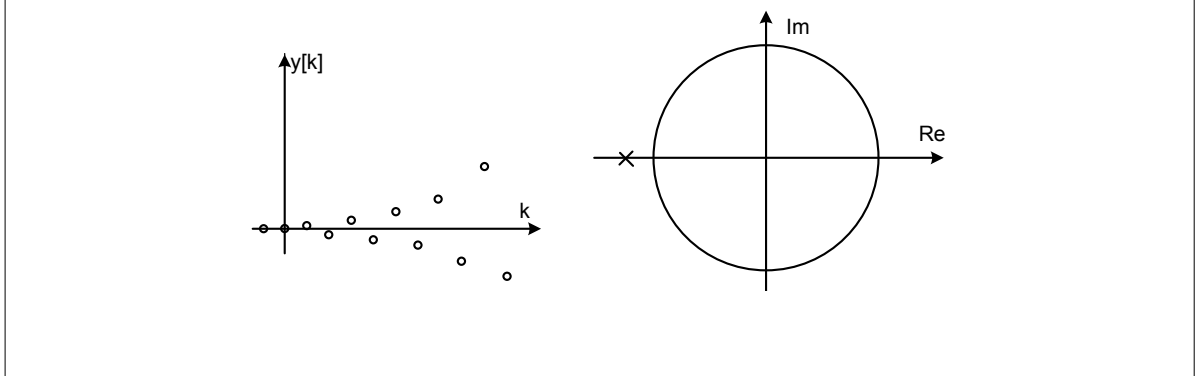
El modo propio de un polo situado en  $z = -1$ , presenta valores alternados constantes.



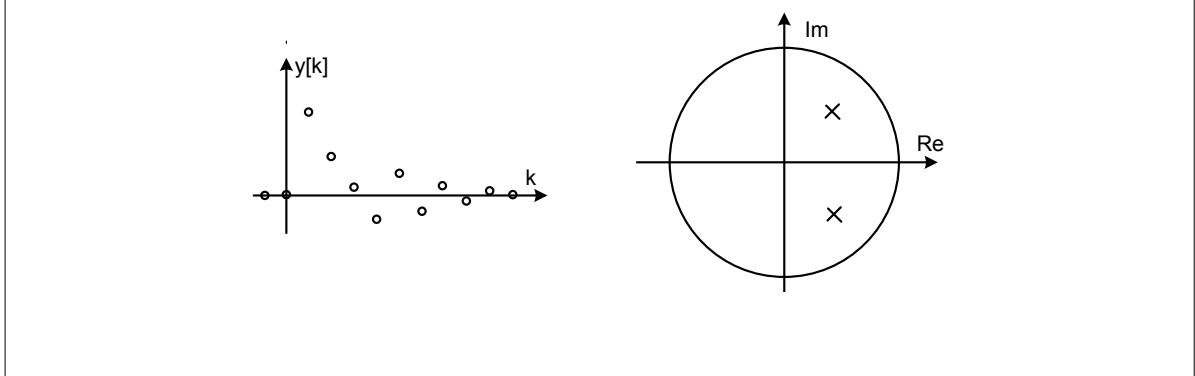
El modo propio de un polo situado sobre el eje real positivo externo a la circunferencia de radio unidad, tiende exponencialmente a infinito.



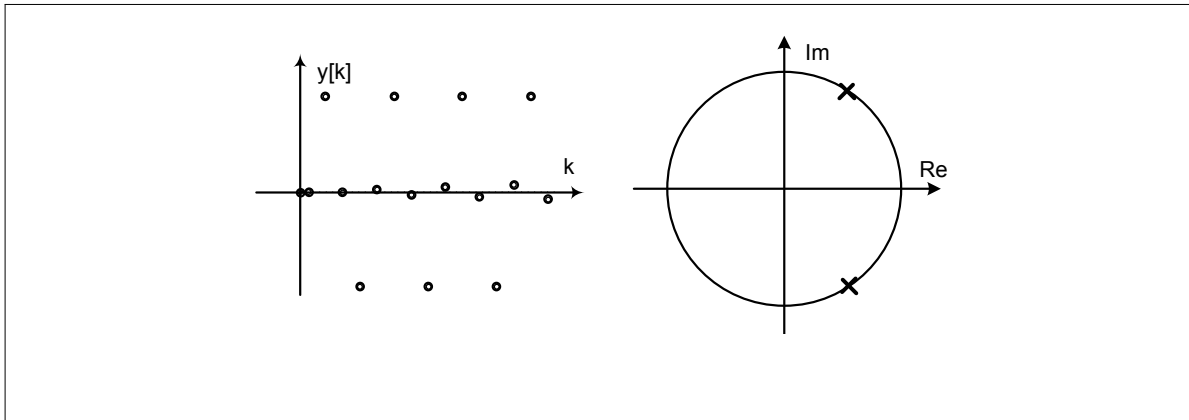
El modo propio de un polo situado sobre el eje real negativo externo a la circunferencia de radio unidad, presenta valores alternados de amplitud creciente.



Los modos propios de polos conjugados con parte real positiva e interiores a la circunferencia de radio unidad, presentan oscilaciones de amplitud decreciente.



Los modos propios de polos conjugados situados sobre la circunferencia de radio unidad, presentan oscilaciones de amplitud mantenida.



De la comparación de las tablas correspondientes a los modos propios de los sistemas continuos y discretos puede verse que existe una correspondencia casi completa entre los comportamientos de ambos tipos de sistemas.

Así, el eje imaginario en el plano S tiene la misma función, de frontera de estabilidad, que la circunferencia unitaria en el plano Z.

El semiplano negativo en S, con el interior de la circunferencia unitaria en Z. El semiplano positivo en S, con el exterior de dicha circunferencia.

El semieje real negativo en S se corresponde con el segmento  $]0, 1[$  en Z, dando lugar a exponenciales decrecientes.

El origen en el plano S, se corresponde con el punto  $(1, 0)$  en el plano Z.

El  $-\infty$  en el plano S, con el origen en Z.

El semieje real positivo en S con la semirecta  $]1, \infty[$  en Z, dando lugar a exponenciales crecientes.

Los polos complejos estables en uno y otro plano dan lugar a modos propios producto de exponenciales decrecientes por senoides.

La única diferencia significativa entre uno y otro plano lo constituye el semieje negativo en el plano Z, que pese a tener polos reales genera modos propios oscilatorios (se alternan los valores positivos y negativos) que tienden a cero en el segmento  $] - 1, 0[$  e inestables en la semirecta  $] - \infty, -1[$ .

## 1.3. Respuesta libre y forzada

La respuesta libre de un sistema es la que generan, en ausencia de entradas, las condiciones iniciales del mismo.

La respuesta forzada, por el contrario, es la debida exclusivamente a las variaciones de la señal de entrada, supuestas condiciones iniciales nulas.

### 1.3.1. Sistema definido por su función de transferencia

Para calcular la función de transferencia de un sistema se calcula su modelo en transformadas de Laplace, suponiendo condiciones iniciales nulas, por lo que el método de la función de transferencia está directamente orientado al cálculo de la respuesta forzada de los sistemas.

Sin embargo, del ejemplo siguiente se deduce que la respuesta libre de un sistema presenta los mismos modos propios que la forzada.

**Ejemplo 3.4**

Conocido el modelo matemático de un sistema

$$y(t) = A \frac{dy(t)}{dt} = B \cdot u(t)$$

tomando transformadas de Laplace, supuestas condiciones iniciales distintas de cero se obtiene:

$$Y(s) + A \cdot s \cdot Y(s) - A \cdot y(0) = B \cdot U(s)$$

pro lo que

$$Y(s) = \frac{B}{1 + As} \cdot U(s) + \frac{A \cdot y(0)}{1 + As}$$

El primer sumando, función de la entrada  $U(s)$ , corresponde a la respuesta forzada, mientras que el segundo, que solo depende del sistema, corresponde a la respuesta libre.

Como puede verse, el denominador en ambos casos coincide, por lo que la respuesta libre tendrá los mismos modos propios que la forzada.

**1.3.2. Sistema definido por su modelo de estado**

La ecuación de estado de un sistema tiene en cuenta tanto las condiciones iniciales del mismo como los valores de las entradas que se le aplican, por lo que la solución de la ecuación de estado incluye ambas respuestas.

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} \cdot x(0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} \cdot B \cdot u(\tau) \cdot d\tau \quad t \geq t_0$$

$$y(t) = C \cdot e^{A(t-t_0)} \cdot x(0) + C \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} \cdot B \cdot u(\tau) \cdot d\tau + D \cdot u(t) \quad t \geq t_0$$

Si se desea conocer la respuesta libre del sistema, basta hacer nulo el vector de entradas, obteniéndose

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

cuya solución es

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} \cdot x(0)$$

$$y(t) = C \cdot e^{A(t-t_0)} \cdot x(0)$$

La evolución a lo largo del tiempo del vector de estado en el espacio de estados se denomina trayectoria del vector de estado.

## 1.4. Estabilidad

### 1.4.1. Definición

Existen varias definiciones de estabilidad de los sistemas dinámicos:

- Un sistema es estable si ante cualquier entrada acotada, su salida es también acotada (Estabilidad BIBO. Bounded Input, Bounded Output)
- Un sistema es estable si tiende a su valor previo de equilibrio una vez concluido el efecto de una entrada o perturbación.

Utilizando terminología propia del modelo de estado,

- Un sistema es estable si al aplicarle una entrada el estado tiende a otro estado finito.
- Un sistema es estable si su respuesta libre tiende al origen del espacio de estados.

### 1.4.2. Interpretación práctica

De estas definiciones se deduce la importancia que tiene desde el punto de vista del funcionamiento de un sistema la estabilidad del mismo. Dos pueden ser las interpretaciones que se pueden hacer de las definiciones:

Un sistema estable tiene, ante cualquier entrada, un funcionamiento reversible, es decir si se le aplicase la misma entrada cambiada de signo, el sistema volvería a su situación inicial. Evidentemente para que esto sea posible el sistema no puede responder ante una entrada yéndose al infinito ni oscilando.

La aparición de una perturbación hace reaccionar al sistema, sin embargo una vez que termina la perturbación los sistemas estables vuelven a su estado original, por lo que no se produce acumulación de energía en el sistema. Si el sistema fuera inestable, cada perturbación generaría una variación permanente del estado del sistema, o un aumento de la energía almacenada en él. Dado que es prácticamente imposible aislar perfectamente a los sistemas, y que por lo tanto siempre van a estar sometidos a perturbaciones, es imposible prever el estado real de los sistemas inestables al evolucionar en función de la presencia de perturbaciones. De aquí se deduce que para utilizar un sistema inestable es imprescindible dotarle de un sistema de control para corregir esa evolución del estado originada por las perturbaciones.

Como se verá al estudiar los sistemas de control, el diseño de un dispositivo capaz de controlar un sistema inestable no suele ser trivial pudiendo ocurrir que no se puedan alcanzar especificaciones de funcionamiento adecuadas.

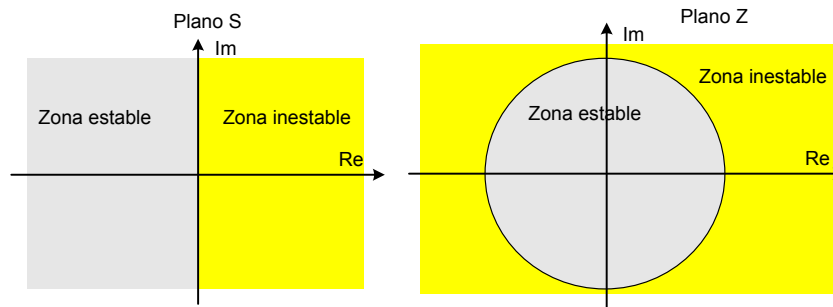
### 1.4.3. Determinación de la estabilidad de un sistema

#### A partir de su función de transferencia

Para que un sistema sea estable todos sus polos tienen que estar situados en el semiplano complejo negativo en el caso de los sistemas continuos, o en el interior de la circunferencia unidad en los discretos.

Se deduce inmediatamente de la expresión de los modos propios del sistema. Basta con que un polo no esté situado en el semiplano complejo negativo para que el modo propio correspondiente no tienda a cero, incumpliendo por lo tanto la condición de estabilidad.

Esto hace que el eje imaginario del plano complejo separe las regiones de estabilidad y de inestabilidad y que la distancia de los polos a dicha frontera (su parte real) se considere como una medida de lo lejos que está el sistema estable de la inestabilidad. A dicha distancia se le denomina en algunos casos estabilidad relativa del sistema (pese a ser la estabilidad un concepto absoluto).



Igualmente a los sistemas que tienen polos en el eje imaginario, y que por lo tanto están situados en el límite de la estabilidad, se les denomina a veces sistemas limitadamente estables, pese a tratarse de sistemas inestables. En el caso de los sistemas discretos, la circunferencia unitaria cumple la misma función que el eje imaginario en los continuos.

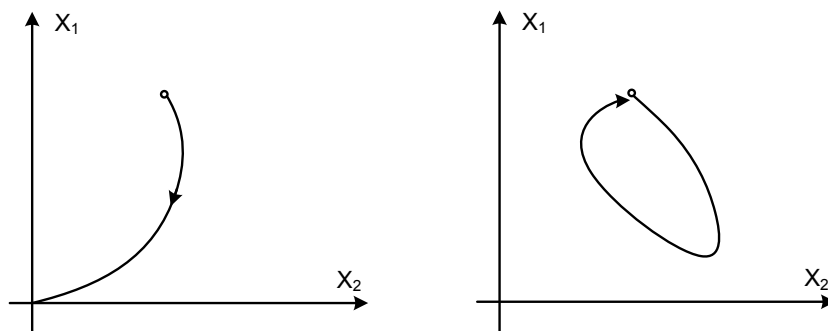
Es importante resaltar que la estabilidad no depende de la entrada aplicada al sistema y es, por lo tanto una característica del mismo. Igualmente los ceros del sistema no influyen sobre la estabilidad del mismo (los ceros no generan modos propios, únicamente alteran los numeradores de los generados por los polos del sistema).

En los anexos se incluyen los criterios de estabilidad de Routh y Jury que permiten conocer de forma analítica el signo de las raíces el primero y el módulo de las mismas el segundo. Estos métodos son de utilidad cuando la ecuación característica del sistema no está factorizada como ocurre con los sistemas realimentados.

#### A partir de las trayectorias del vector de estado

Un sistema será estable si, para cualquier estado inicial, su trayectoria libre termina en el origen del espacio de estados.

Igualmente será estable si la trayectoria del vector de estados ante una perturbación, vuelve al estado inicial, una vez terminado el efecto de las perturbaciones.



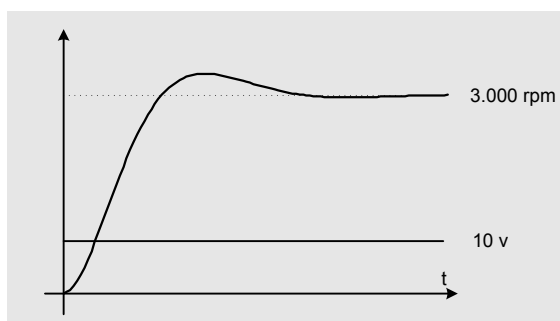
## 1.5. Análisis del comportamiento estático

El comportamiento estático de los sistemas dinámicos estables puede definirse como la relación numérica entre los valores de la salida y de la entrada en régimen permanente. Para conocerlo se define la ganancia estática del sistema como el valor final de la respuesta cuando la entrada es un escalón unitario. Obviamente los sistemas inestables no tienen ganancia estática, puesto que sus respuestas no alcanzan el régimen permanente.

De acuerdo con la definición y aplicando el teorema del valor final es posible calcular la ganancia estática de un sistema a partir de su función de transferencia:

$$\text{Ganancia Estática de } G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s} \cdot G(s) = G(0)$$

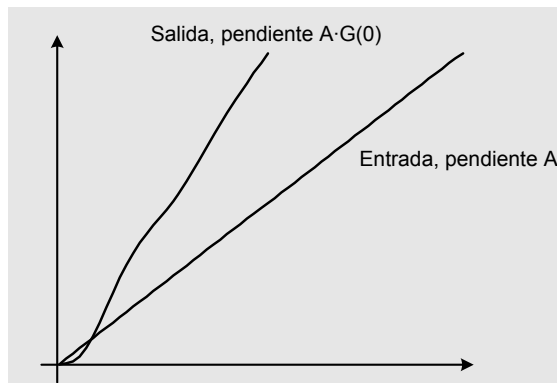
$$\text{Ganancia Estática de } G(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \cdot \frac{1}{1 - z^{-1}} \cdot G(z) = G(1)$$



Naturalmente la ganancia estática es un parámetro dimensional, siendo sus dimensiones las de la salida entre las de la entrada. Por ejemplo un motor que alcanza 3.000 r.p.m. al alimentarlo con 10 V tendrá una ganancia estática de 300 r.p.m./V.

Por supuesto el parámetro  $G(0)$  sólo tiene el sentido de ganancia estática si el sistema es estable.

En el caso de entrada en rampa la ganancia estática indica la relación entre las pendientes de la señal de salida y de la señal de entrada. En el caso de señales senoidales la ganancia es la relación de amplitudes entre las senoides de salida y de entrada.

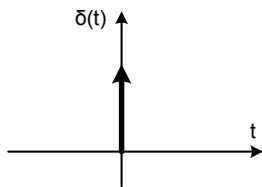


## 1.6. Señales de entrada normalizadas

### 1.6.1. Métodos temporales

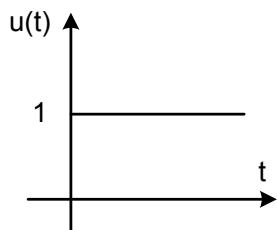
Si se desea conocer la evolución en el tiempo de la respuesta del sistema se utilizarán como señales de entrada el impulso, el escalón y la rampa. Estas señales presentan varias características que las hacen especialmente adecuadas para realizar el análisis:

- El impulso, pese a no ser una señal con existencia física real, constituye la menor cantidad de energía que se puede aplicar a un sistema. Además su transformada de Laplace es igual a la unidad.



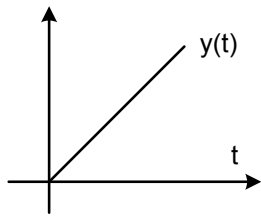
$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0 \\ 0 & \text{para } t > 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) = 1 & \end{cases} \quad \Delta(s) = 1$$

- Integrando el impulso se obtiene el escalón unitario, cuya transformada de Laplace es igual a  $1/s$  y que tiene un claro sentido físico de variación brusca de la señal de entrada.



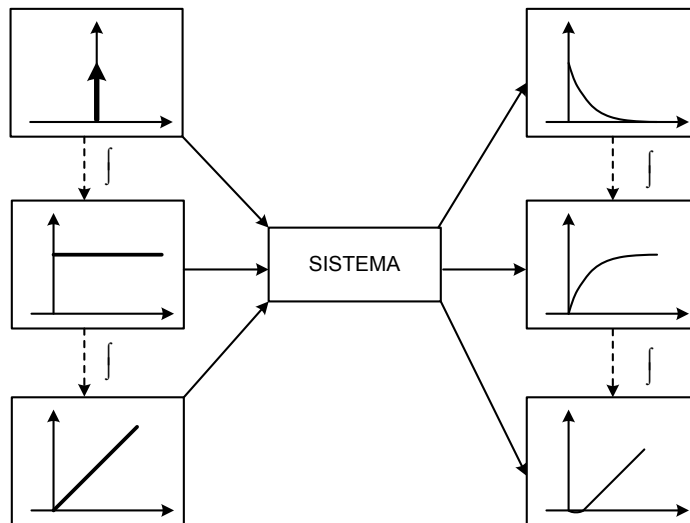
$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t \leq 0 \\ 1 & \text{para } t > 0 \end{cases} \quad U(s) = \frac{1}{s}$$

- Integrando, a su vez, el escalón se obtiene la rampa de pendiente unitaria, cuya transformada de Laplace es igual a  $1/s^2$  y que representa una variación de la señal de entrada con velocidad constante.



$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t \leq 0 \\ 1 & \text{para } t > 0 \end{cases} \quad Y(s) = \frac{1}{s^2}$$

- Si seguimos integrando la rampa obtendríamos las parábolas de segundo orden y de órdenes superiores.
- Según el desarrollo en serie de Taylor, cualquier señal derivable puede descomponerse en una suma de constantes (el escalón es una constante para  $t > 0$ ) y parábolas de orden 1 hasta n, por lo que conocidas las respuestas ante el escalón y las distintas parábolas podremos conocer la respuesta ante cualquier señal derivable.
- Es importante señalar que, de acuerdo con la propiedad de linealidad de la transformada de Laplace, igual que la rampa es la integral del escalón y este a su vez la integral del impulso, la respuesta ante la rampa es la integral de la respuesta ante el escalón y esta a su vez la integral de la respuesta impulsional.



### 1.6.2. Métodos frecuenciales

Si por el contrario deseáramos conocer la respuesta del sistema ante señales de frecuencias distintas, lo que suele ocurrir cuando no tenemos un conocimiento detallado de la forma de la señal de entrada pero sí de alguna de sus características como la frecuencia, en ese caso utilizaríamos como señal de entrada una senoide de frecuencia variable, dando lugar a lo que se denomina el análisis frecuencial del sistema.

La transformada de Laplace de la función seno es:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t \leq 0 \\ \text{sen}(\omega t) & \text{para } t > 0 \end{cases} \quad Y(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t \leq 0 \\ \text{cos}(\omega t) & \text{para } t > 0 \end{cases} \quad Y(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

Es importante recordar que cualquier señal periódica que cumpla las condiciones de Dirichlet puede ser descompuesta en una serie de senoides de amplitudes y frecuencias variables. Igualmente las señales no periódicas pueden generarse a partir de señales periódicas utilizando la transformada de Fourier.

En el anexo H8 se recogen las propiedades más importantes del desarrollo en serie de Fourier y de su transformada.

A la ganancia estática de un sistema se la denomina a veces ganancia a bajas frecuencias (o a frecuencia 0). Esto es debido a que, como veremos al analizar la respuesta frecuencial, los sistemas presentan ganancias diferentes en función de la frecuencia de la senoide de entrada.

## 1.7. Análisis temporal del comportamiento dinámico de los sistemas continuos

El objetivo de este apartado es caracterizar las respuestas transitorias de los sistemas. Dicha caracterización viene marcada por los modos propios del sistema y por lo tanto va a depender del carácter de los polos, reales o complejos y, por supuesto, de sus signos.

Aunque los modos propios vienen definidos en la respuesta impulsional del sistema, utilizaremos también la respuesta al escalón y la respuesta a la rampa.

El estudio se limitará a los sistemas estables, es decir a los sistemas cuyos polos están situados en el semiplano complejo negativo. Se incluye igualmente la influencia de los ceros sobre las distintas respuestas. En el anexo 7 se detallan las expresiones analíticas de las diferentes respuestas.

### 1.7.1. Polos reales. Respuestas sobreamortiguadas

De la tabla anterior se deduce inmediatamente que cada polo real genera un modo transitorio que es una exponencial negativa y que la duración de dicho modo transitorio está relacionada con la distancia del polo al eje imaginario.

Así polos muy alejados del eje generan modos transitorios que tienden a cero muy rápidamente, y polos cercanos al eje imaginario generan modos que tardan mucho tiempo en anularse.

En cualquier caso este tipo de respuesta que se caracteriza por tender a cero de forma asintótica se denomina respuesta sobreamortiguada. Es importante señalar que sea cual sea el número de polos reales, y su posición en el semieje negativo del plano complejo, los sistemas con este tipo de polos generan respuestas sobreamortiguadas.

El polo situado más a la derecha es el que genera la exponencial más lenta (la que tarda más en tender a cero) y, por lo tanto será el que caracterice a la respuesta. A este polo se le denomina polo dominante.

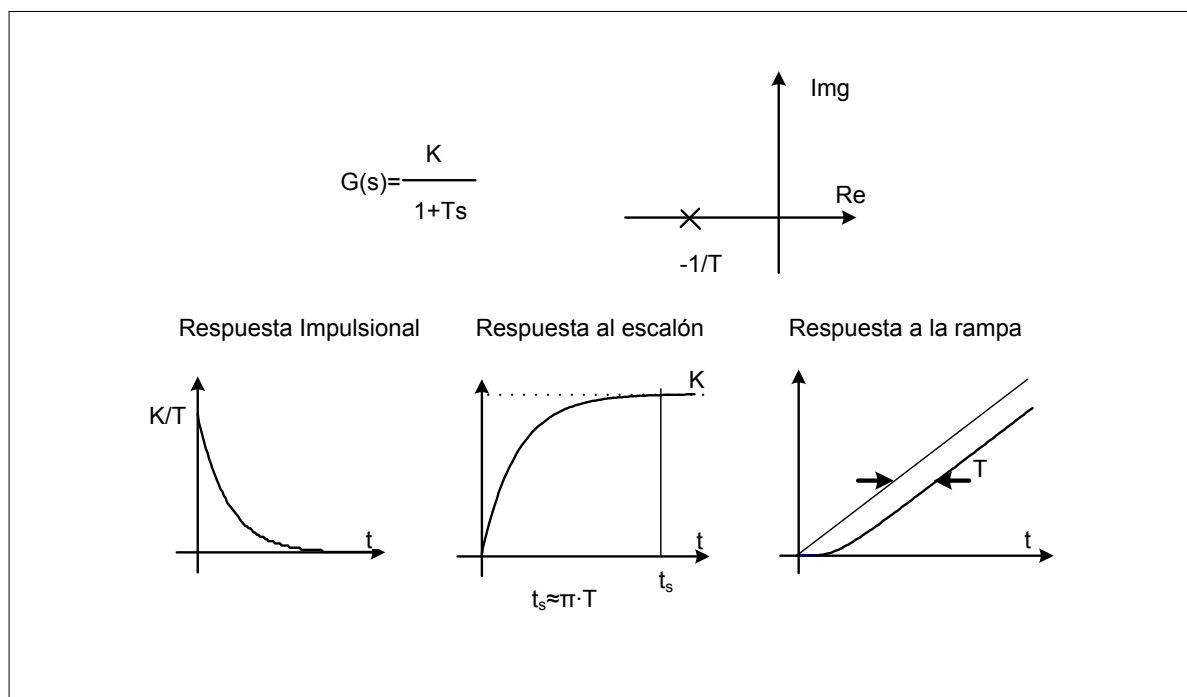
Por lo tanto si los polos son todos reales, la respuesta será sobreamortiguada y su duración vendrá marcada por el polos más lento (el situado más a la derecha). El resto de los polos influ-

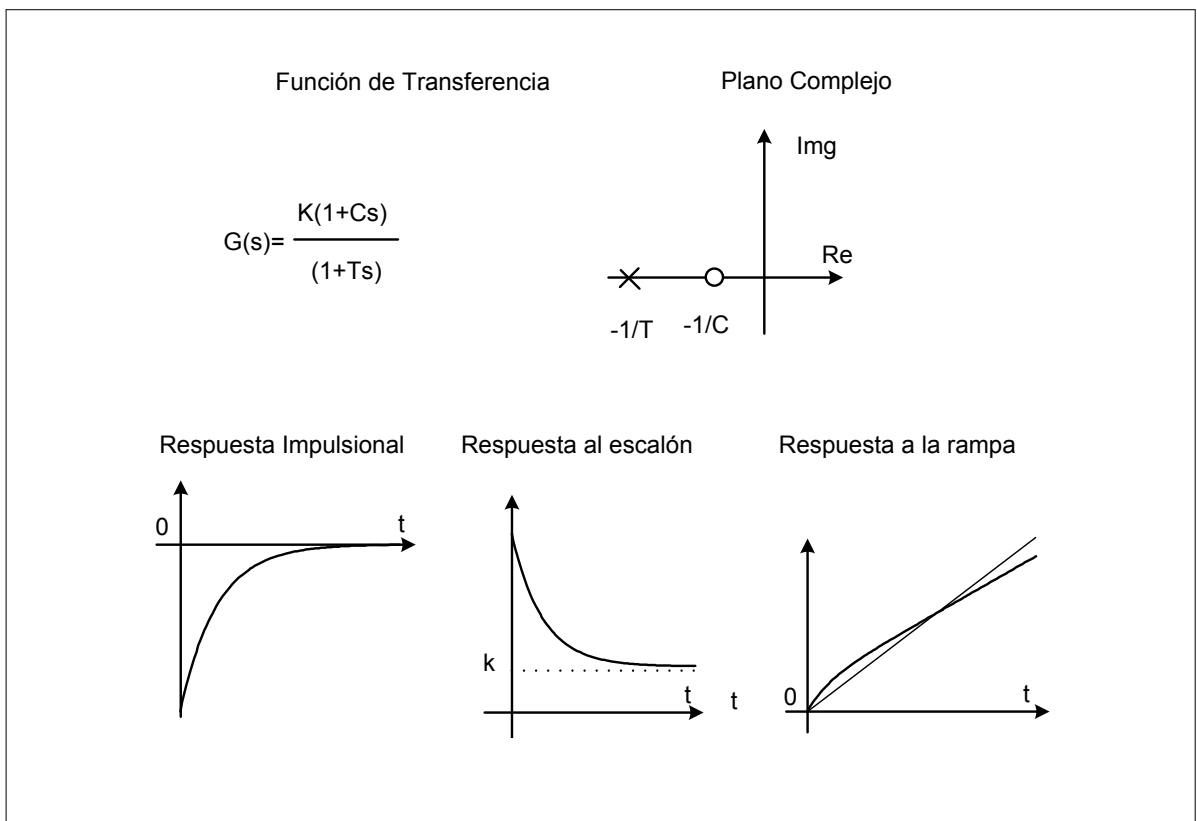
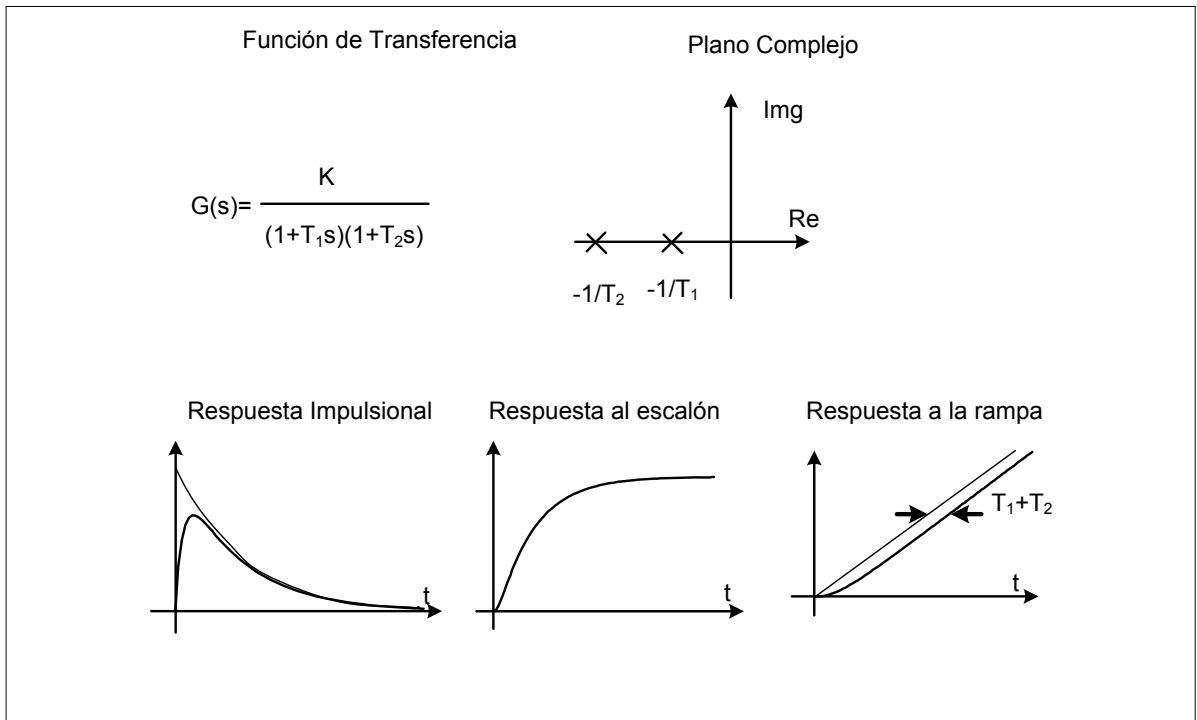
yen sobre todo en los primeros instantes de la respuesta, en los que su dinámica es significativa, y, en general ralentizan un poco más la respuesta del sistema.

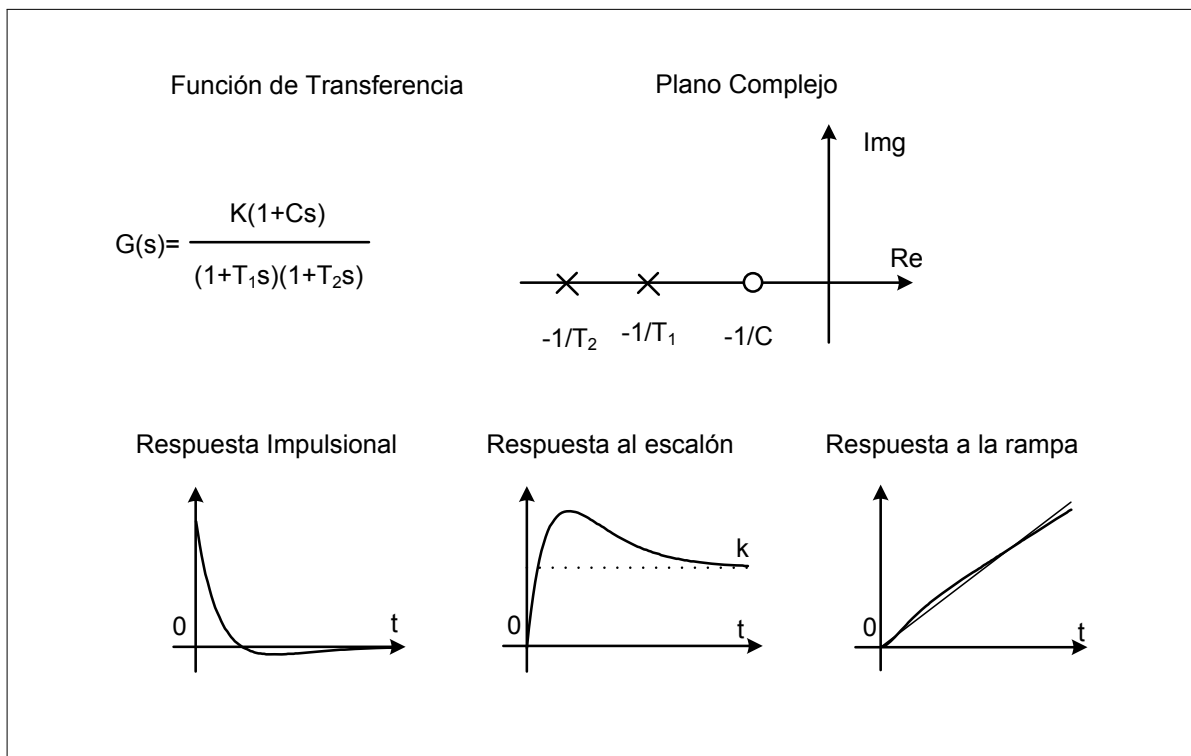
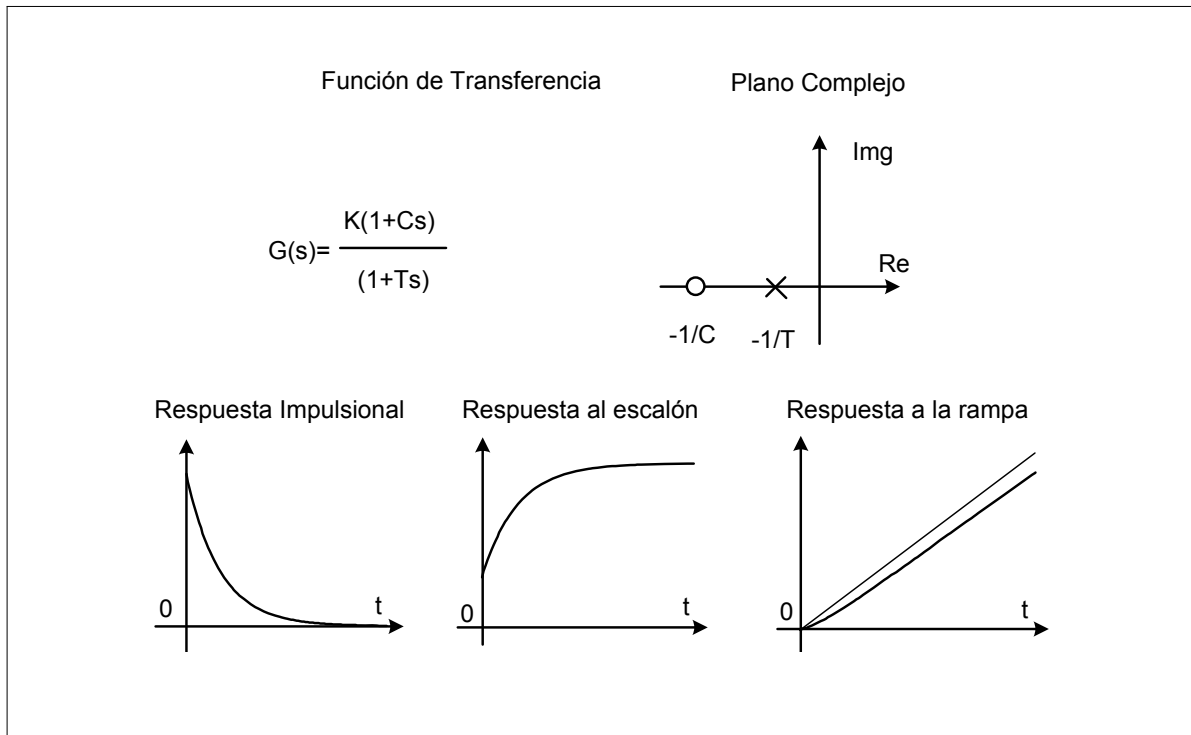
En las siguientes figuras se muestran las respuestas ante un impulso, un escalón y una rampa de estos sistemas. En todos los casos el sistema trata de seguir a la señal de entrada pero su dinámica impide dicho seguimiento en los primeros instantes (régimen transitorio). En el caso del escalón, una vez pasado el transitorio, la respuesta alcanza el valor de la entrada con una amplificación o atenuación igual a la ganancia estática del sistema. Ante la entrada en rampa, una vez pasado el transitorio, la respuesta alcanza la pendiente de la rampa de entrada (multiplicada por la ganancia estática), pero la dinámica del sistema hace que se alcancen los valores de la entrada con un cierto retardo.

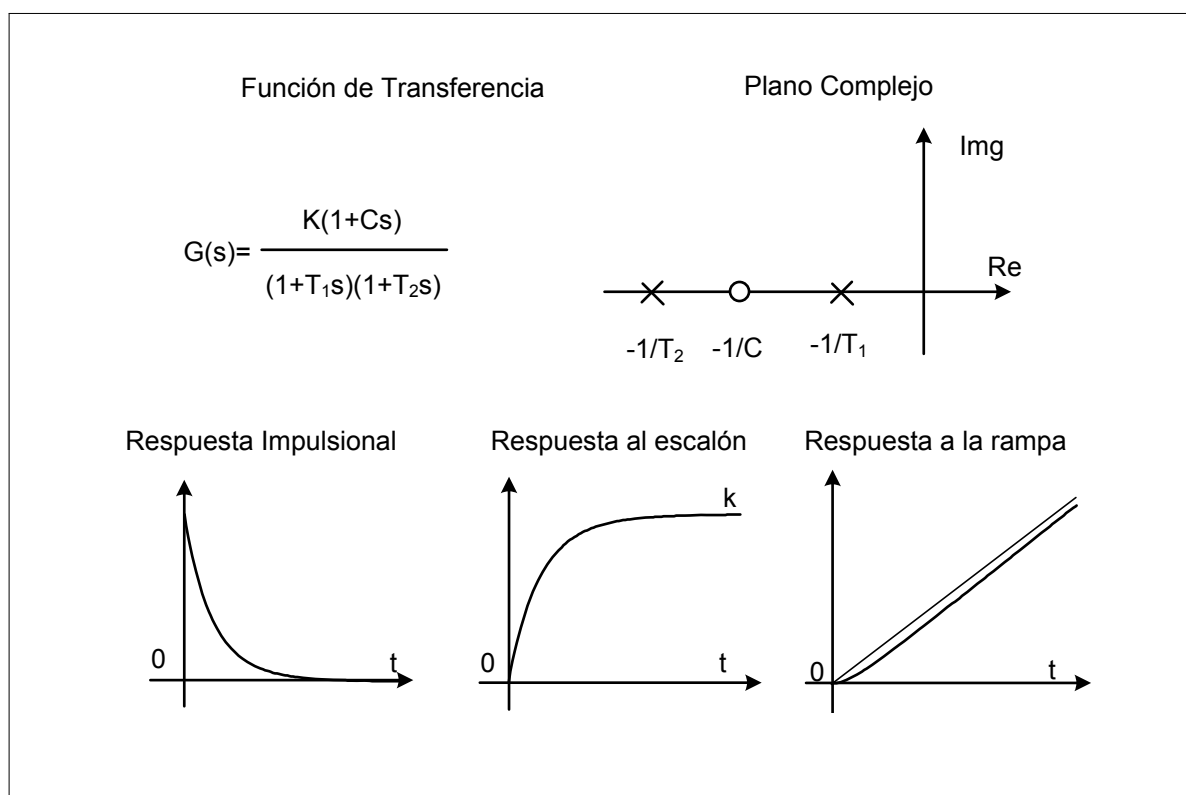
Como puede verse al aumentar el número de polos reales se produce una ralentización de la respuesta en los primeros instantes, aunque la forma general de la respuesta no varía.

Los parámetros fundamentales que definen el régimen transitorio de la respuesta son el tiempo de establecimiento (tiempo que se tarda en alcanzar el 95 % del valor final en la respuesta al escalón) y el retardo de la respuesta a la rampa. Ambas especificaciones están directamente relacionadas con la constante de tiempo T del sistema que se mide en segundos (ver anexo).









### 1.7.2. Polos complejos. Respuestas subamortiguadas

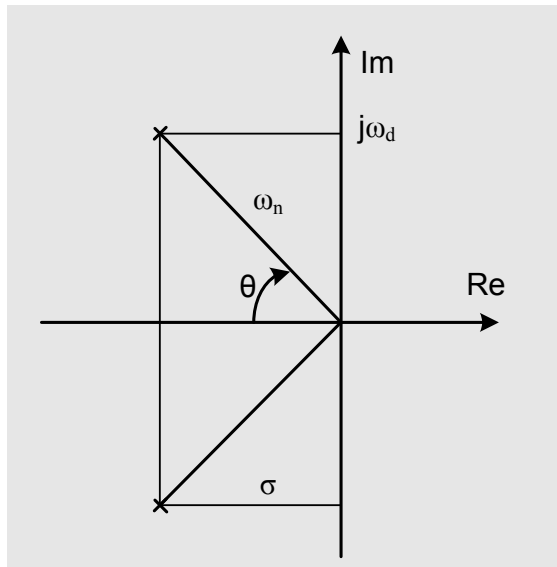
La existencia de un par de polos complejos supone la aparición de un modo propio consistente en el producto de una exponencial decreciente por una senoidal, es decir de una senoidal amortiguada que tiende a cero de forma oscilatoria. Este tipo de respuesta que denominaremos subamortiguada viene definida por el valor del exponente y por la pulsación de las oscilaciones.

Es habitual poner la función de transferencia de modo que aparezcan de forma explícita dicha pulsación así como el exponente, obteniéndose la expresión:

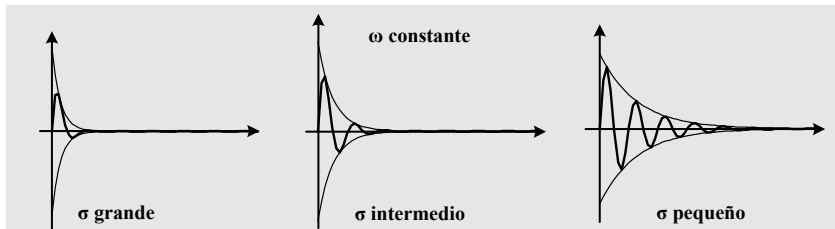
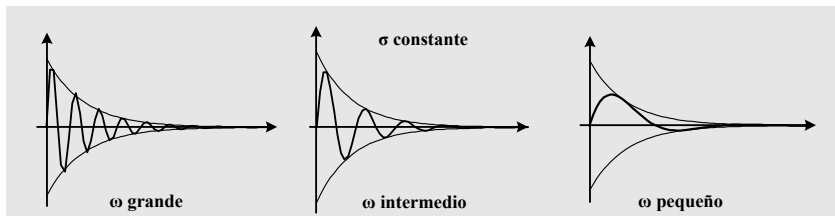
$$G(s) = \frac{K \cdot \omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{K \cdot \omega_n^2}{(s + \sigma)^2 + \omega_d^2}$$

donde  $\sigma = \xi \cdot \omega_n$  es la parte real de las raíces cambiada de signo, y  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$  es la parte imaginaria.

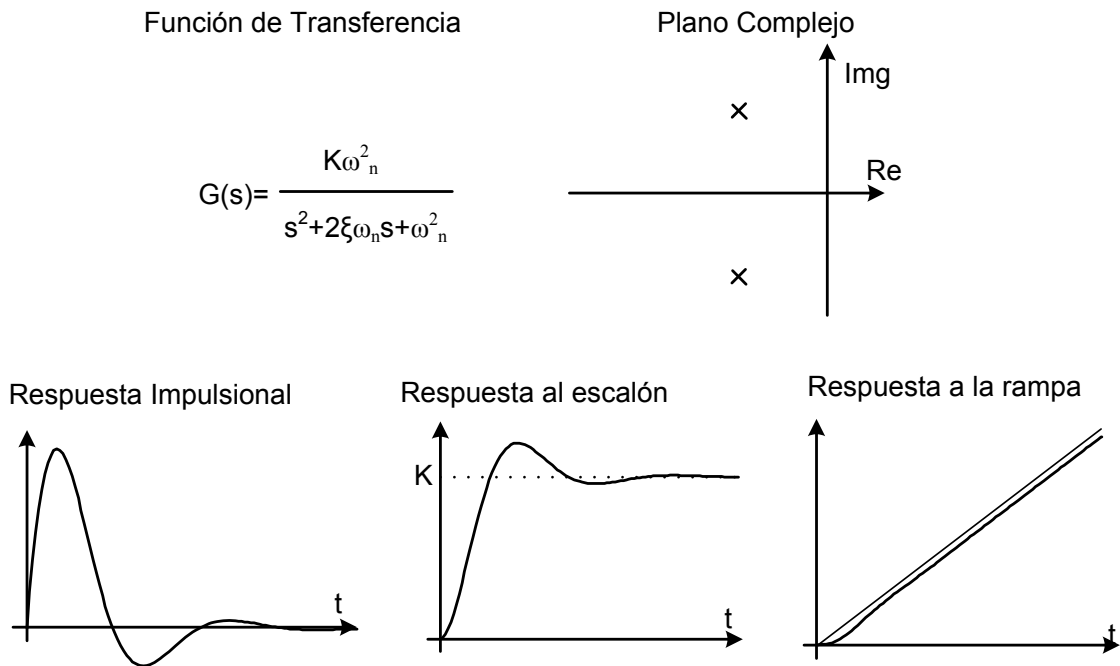
La figura muestra el significado geométrico de cada uno de los parámetros que aparecen en la función de transferencia normalizada de un sistema con dos polos complejos:



Como en el caso de los polos reales, la distancia al eje imaginario de los polos, es decir  $\sigma$  marcará la duración de la respuesta, mientras que la pulsación de las oscilaciones viene marcada por la parte imaginaria de los polos  $\omega_d$ .



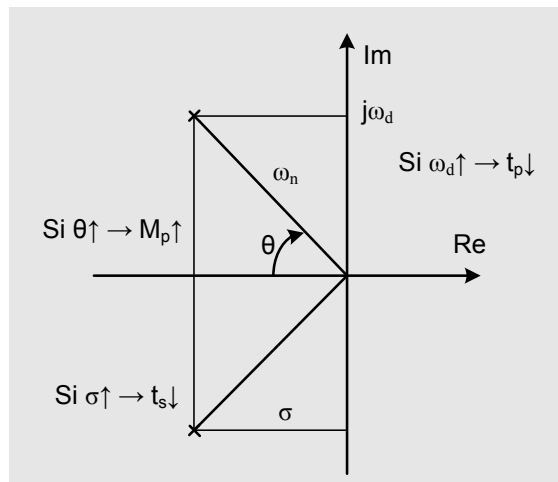
En la figura se muestran las respuestas ante un impulso, un escalón y una rampa de este tipo de sistemas.



Además del tiempo de establecimiento (tiempo que tarda la respuesta al escalón en alcanzar el 95 % del valor final) y del retardo entre una rampa de entrada, es necesario definir dos especificaciones adicionales para la respuesta ante el escalón de este tipo de sistemas. Utilizaremos el tiempo de pico (tiempo que necesita el sistema en alcanzar el primer máximo de la respuesta ante un escalón) y la sobreoscilación definida como el porcentaje que supone el sobrepasamiento sobre el valor final de la respuesta.

$$M_p = \frac{V_{max} - V_{final}}{V_{final}} \cdot 100\%$$

En el anexo se recogen las expresiones analíticas de las respuestas subamortiguadas ante impulso, escalón y rampa. Es importante señalar que existe una relación directa entre la posición de los polos sobre el plano complejo y las especificaciones de su respuesta, lo que permitirá deducir las características de la respuesta del diagrama cero-polar del sistema. Así, el tiempo de pico depende de la parte imaginaria de las raíces  $\omega_d$ , el tiempo de establecimiento de la parte real de las raíces  $\sigma$  y la sobreoscilación del ángulo  $\theta$ .



Del estudio anterior se deduce que el polo, real o complejo, más cercano al eje imaginario marcará el tipo de respuesta, sobreamortiguada o subamortiguada, que presenta el sistema. A este polo (o par de polos) se les denominará polos dominantes del sistema pues son los que introducen la dinámica más lenta que es la que marca la respuesta dinámica del sistema. El resto de los polos, por estar más alejados del eje, tienen dinámicas más rápidas por lo que influirán sobre todo en los primeros instantes de la respuesta, haciendo la respuesta del sistema un poco más lenta y más suave.

### 1.7.3. Influencia de los ceros

La existencia de ceros en la función de transferencia de un sistema no modifica el número de modos propios del mismo, únicamente afecta al numerador de dichos modos propios. Por lo tanto los ceros no tienen capacidad para cambiar el tipo de respuesta del sistema, sobreamortiguada o subamortiguada, ni por supuesto la estabilidad del mismo. Sin embargo, como veremos inmediatamente, la existencia de un cero puede modificar notablemente los valores de las respuestas, haciendo en muchos casos que alcancen valores que, en la práctica, pueden crear graves problemas.

Si recordamos la propiedad de la Transformada de Laplace que convierte la derivada de una función en el producto de la variable  $s$  por la transformada de la función, el añadir un cero a una función de transferencia se traduce en añadir a la respuesta su derivada multiplicada por la inversa del cero de acuerdo con la expresión:

$$G(s) = G_1(s) \cdot (1 + Cs) \longrightarrow Y(s) = Y_1(s)(1 + Cs) \longrightarrow y(t) = y_1(t) + \frac{C \cdot dy_1(t)}{dt}$$

Por lo tanto, la influencia del cero será tanto menor cuanto más alejado esté dicho cero del eje imaginario (valores pequeños de  $C$ ). Aunque un cero muy cercano al origen puede generar diferencias muy importantes con respecto a la señal original.

Para un mismo valor del cero, su influencia se concentrará en los instantes en los que la respuesta original presenta mayores variaciones (derivadas altas), es decir en el régimen transitorio de la respuesta.

Un caso muy importante a tener en cuenta cuando el sistema presenta ceros muy significativos es el de los ruidos que pueden ir asociados con una determinada señal. En general esos ruidos suelen ser de frecuencias muy altas comparadas con la señal original. Si el sistema tiene ceros muy significativos, esos ruidos de alta frecuencia van a ser derivados por el cero y multiplicados por su inversa, por lo que, si esta es muy grande, el dispositivo que contiene el cero muy significativo se convierte en un amplificador de ruidos. Esto hace que sea necesario tratar con sumo cuidado los ceros de los sistemas, evitando en la medida de lo posible, situarlos, a la hora del diseño en puntos muy significativos.

Para analizar la influencia de señales senoidales es preferible utilizar los métodos frecuenciales de análisis que darán directamente la amplificación que sufre la senoidal en función de su pulsación y de la posición de los polos y de los ceros.

Si el cero está en el semiplano positivo, lo que no implica inestabilidad del sistema, será necesario restar la diferencia de la señal, lo que se traducirá en valores iniciales negativos en muchos casos, lo que se denomina contra respuesta.

En los anexos se detalla el cálculo de la expresión analítica de las respuestas de los sistemas con uno o dos polos ante estas entradas. En general puede decirse que el cero tiende a adelantar la respuesta lo que se traduce en una disminución del tiempo de pico y en un aumento de la sobreoscilación en los sistemas subamortiguados y en una ligera disminución del tiempo de establecimiento.

### 1.7.4. Sistema equivalente de orden reducido

De lo dicho anteriormente se deduce que para analizar un sistema a partir de su función de transferencia es necesario seguir los siguientes pasos:

1. Representar el diagrama cero polar del sistema
2. Comprobar que todos sus polos están situados en el semiplano negativo, Si algún polo fuera positivo el sistema sería inestable.
3. Una vez asegurada la estabilidad, calcular su ganancia estática que es igual a  $G(0)$ .
4. Determinar los polos dominantes del sistema. En general son los más próximos al eje imaginario.
5. Calcular las características dinámicas de la respuesta en función de dichos polos dominantes: tipo de respuesta (sobreamortiguada o subamortiguada), tiempo de establecimiento, sobreoscilación y tiempo de pico (estas dos últimas especificaciones únicamente en el caso de respuestas subamortiguadas).
6. Evaluar de forma cualitativa la influencia del resto de los polos y de los ceros sobre el valor de las especificaciones calculadas.
7. Si fuera necesario conocer la respuesta con mayor precisión debe utilizarse un programa de simulación numérica.

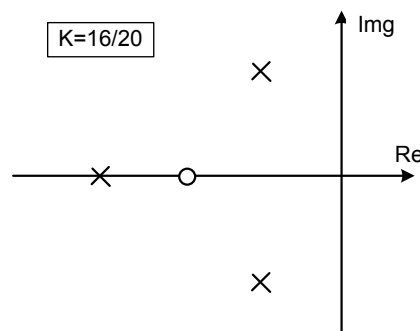
**Ejemplo 3.6**

Dado un sistema representado por su función de transferencia

$$G(s) = \frac{4(s+4)}{(s^2+2s+5)(s+5)}$$

representar aproximadamente sus respuestas ante escalón y rampa.

Su diagrama cero polar será



Puesto que todos los polos están en el semiplano negativo, el sistema será estable. Su ganancia estática es  $G(0) = \frac{16}{20}$ .

Sus polos dominantes son los más cercanos al eje es decir los polos complejos.

Por lo tanto el sistema equivalente de orden reducido será

$$G(s) = \frac{4}{s^2 + 2s + 5}$$

que tiene la misma ganancia estática que el sistema original.

Al ser los polos complejos la respuesta será subamortiguada con las siguientes especificaciones:

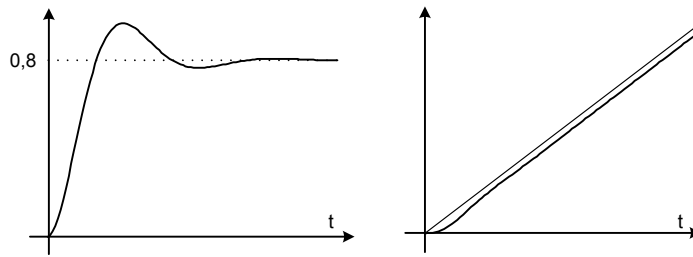
$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{2} \text{ segundos}$$

$$t_s = \frac{\pi}{\sigma} = \frac{\pi}{1} \text{ segundos}$$

$$M_p = e^{-\pi \cdot ctg\theta} = 20,78\%$$

$$\text{retardo de la rampa} = \frac{2}{5} = 0,4 \text{ segundos}$$

Las respuestas aproximadas serán



El sistema presenta además de los polos dominantes un cero en  $-4$  y un polo en  $-5$ . Dado que el más significativo de los dos es el cero la respuesta real del sistema será ligeramente más sobreoscilatoria, su tiempo de pico será también ligeramente menor, así como su tiempo de establecimiento. En cuanto a la respuesta a la rampa, su retardo será también ligeramente menor.

Dado que el cero se encuentra a una distancia significativa de los polos complejos ( $4 \cdot \sigma$ ) y que además el polo adicional compensa en parte su efecto, la respuesta real será muy similar a la calculada para el sistema equivalente de orden reducido.

### 1.7.5. Dinámicas no modeladas

De lo visto anteriormente se deduce que los polos y ceros situados relativamente lejos de los polos dominantes ejercen una influencia muy pequeña sobre el comportamiento real del sistema. Por ello es habitual que a la hora de modelar los sistemas solo se tengan en cuenta aquellos polos y ceros más significativos que son los que dan lugar a dinámicas más lentas. Así es habitual que en sistemas electromecánicos no se modele la dinámica eléctrica, siempre más rápida que la mecánica.

Como consecuencia de esto es habitual que los sistemas reales tengan un número de polos y ceros adicionales muy a la izquierda en el plano complejo. Estos polos y ceros no afectan al comportamiento dinámico del sistema de manera significativa, pero pueden tener influencia en el comportamiento del sistema si este se realimenta como veremos en capítulos posteriores.

Igualmente la existencia de polos y ceros muy próximos, con efectos dinámicos opuestos, puede ser despreciada a la hora de modelar los sistemas. Sin embargo la influencia de estos pares polo-cero no puede ser despreciada cuando están situados en el semiplano positivo o, incluso, aún estando en el semiplano negativo, cuando están próximos al eje imaginario.

Es importante recordar que si bien sobre el papel un polo puede ser idéntico a un cero, en la realidad pueden estar representando subsistemas distintos por lo que la probabilidad de que realmente sean iguales es prácticamente despreciable. Por ello antes de proceder a la cancelación de polos y ceros es necesario asegurarse de que su situación está suficientemente alejada hacia la izquierda del eje imaginario.

**1.8. Análisis temporal del comportamiento dinámico de los sistemas discretos****1.9. Ejercicios y problemas****1.10. Glosario**

Sobreoscilación	
Tiempo de pico	
Tiempo de establecimiento	
Retardo	
Ganancia estática	
Modo propio de un sistema	
Respuesta en frecuencia	
Sistema de primer orden	
Sistema de segundo orden	
Sistema de orden superior	
Sistema equivalente de orden reducido	
Sistema (respuesta sobreamortiguada)	
Sistema (respuesta subamortiguada)	
Retardo puro	
Constante de tiempo	

# APÉNDICE A

---

## SISTEMAS DE PRIMER ORDEN

---

### A.1. Sistemas continuos

#### A.1.1. Definición

El orden de un sistema es igual al número de polos de su función de transferencia, por lo que los sistemas de primer orden cuentan con un polo real.

La función de transferencia del sistema de primer orden más simple (sin cero) es:

$$G(s) = \frac{A}{s + a} = \frac{K}{1 + Ts}$$

Por consiguiente para que el sistema sea estable el polo debe estar situado en el semieje real negativo y, en esas condiciones la ganancia estática del sistema es igual a  $G(0)$ , es decir a  $K$ .

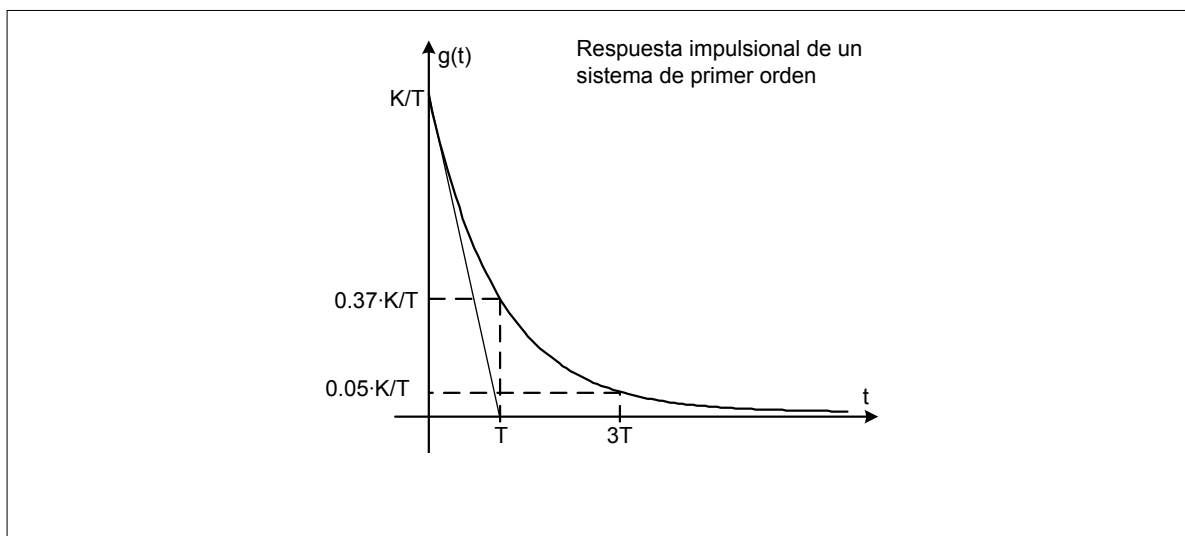
En los siguientes apartados se van a analizar las respuestas de este tipo de sistemas ante las entradas típicas, impulso, escalón y rampa, estudiando la influencia que sobre las mismas tiene la inclusión de polos y ceros adicionales.

#### A.1.2. Respuesta Impulsional

La transformada de Laplace de un impulso unitario es igual a la unidad por lo que la transformada de la respuesta impulsional es igual a la expresión de la función de transferencia. La respuesta impulsional de un sistema es pues la transformada inversa de la función de transferencia, en el caso de los sistemas de primer orden se cumplirá:

$$Y(s) = \frac{1}{s} \cdot G(s) = \frac{K}{s(1 + Ts)} \quad \longrightarrow \quad y(t) = L^{-1} \left[ \frac{K}{s(1 + Ts)} \right] = \frac{K}{T} \cdot e^{-\frac{t}{T}} \quad \text{para } t \geq 0$$

que es la ecuación de una exponencial decreciente cuyo valor final es  $\frac{K}{T}$ .

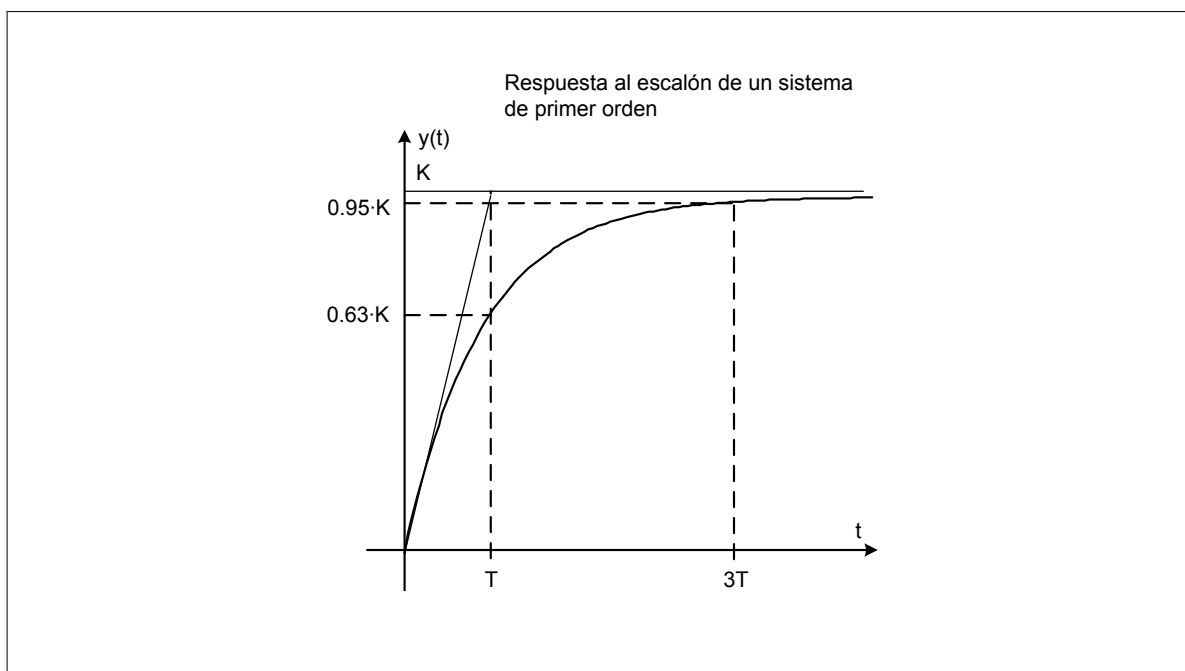


### A.1.3. Respuesta al Escalón

La transformada de Laplace del escalón unitario es  $\frac{1}{s}$  por lo que la respuesta al escalón de un sistema de primer orden tendrá la forma:

$$Y(s) = \frac{1}{s} \cdot G(s) = \frac{K}{s(1 + Ts)} \longrightarrow y(t) = L^{-1} \left[ \frac{K}{s(1 + Ts)} \right] = K(1 - e^{-\frac{t}{T}}) \quad \text{para } t \geq 0$$

que es la ecuación de una exponencial que parte de cero y tiende asintóticamente a K.



El sistema de primer orden sigue al escalón de entrada, amplificándolo por su ganancia estática, pero con un régimen transitorio cuya duración depende de  $T$ , es decir del polo del sistema.

En este tipo de respuestas se define el tiempo de establecimiento como el tiempo que tarda la respuesta en alcanzar el 95 % del valor final, y se cumple

$$t_s \approx 3 \cdot T$$

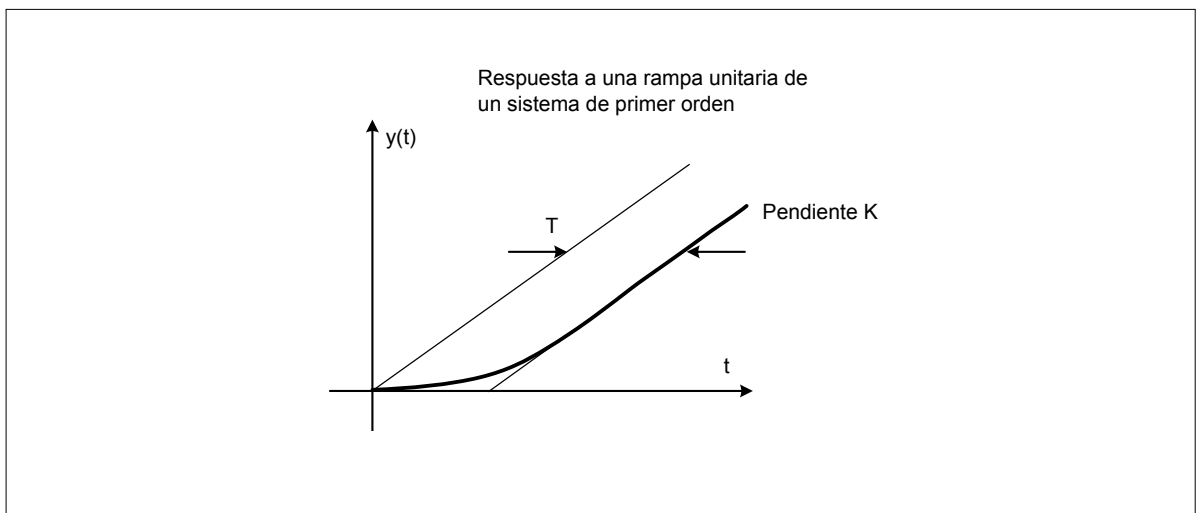
#### A.1.4. Respuesta a la Rampa

La transformada de Laplace de la rampa de pendiente unitaria es  $\frac{1}{s^2}$  por lo que la respuesta a la rampa de un sistema de primer orden tendrá la forma:

$$Y(s) = \frac{1}{s^2} \cdot G(s) = \frac{K}{s^2(1+Ts)} \longrightarrow y(t) = L^{-1} \left[ \frac{K}{s^2(1+Ts)} \right] = K(1-T) + KT \cdot e^{-\frac{t}{T}} \quad \text{para } t \geq 0$$

que es la ecuación de una exponencial que parte de cero y tiende asintóticamente a  $K(t - T)$  que es una recta de pendiente  $K$ , retardada (desplazada a la derecha)  $T$  segundos respecto de la rampa de pendiente  $K$ . Por lo tanto, para esta entrada

ret= $T$  seg.



El sistema de primer orden sigue a la rampa de entrada, multiplicando su pendiente por su ganancia estática, pero como un retardo igual a la constante de tiempo del sistema.

#### A.1.5. Significado físico de los coeficientes de la Función de Transferencia

De las respuestas anteriores se deduce inmediatamente que el parámetro  $K$  tiene el sentido físico de la ganancia estática, es decir del factor de amplificación que el sistema aplica a la señal de entrada en régimen permanente.

Por su parte el parámetro  $T$ , que es igual a la inversa del valor del polo, indica la duración del régimen transitorio por lo que se mide en segundos. Se le denomina la constante de tiempo del sistema. Se suele decir el tiempo de establecimiento  $t_s$  como el tiempo que tarda la respuesta ante el escalón en alcanzar el 95 % del valor final y es aproximadamente igual a  $3T$ .

Igualmente  $T$  representa el retardo que introduce el sistema de primer orden cuando la entrada es una rampa.

### A.1.6. Relación entre la posición del polo en el plano complejo y la respuesta transitoria

De las expresiones anteriores se deduce fácilmente que la duración del primer transitorio de las respuestas está directamente relacionada con la distancia del polo al eje imaginario. Así los polos muy alejados de dicho eje dan lugar a sistemas muy rápidos, que alcanzan rápidamente el régimen permanente, mientras que los sistemas que tienen polos próximos al eje presentan regímenes de larga duración y son por lo tanto sistemas más lentos. Este hecho hace que los polos alejados tengan dinámicas despreciables por su rapidez, o, lo que es lo mismo, que a la hora de modelar un sistema se desprecian los polos relativamente más alejados puesto que dan lugar a dinámicas de muy corta duración.

### A.1.7. Influencia de un cero adicional

#### Caso general

La función de transferencia de un sistema con un polo y un cero puede ponerse en la forma:

$$G(s) = \frac{K(1 + Cs)}{(1 + Ts)} = \frac{K}{1 + Ts} + \frac{CKs}{1 + Ts} = G_1(s) + C \cdot s \cdot G_1(s)$$

por lo que la respuesta de este tipo de sistema ante cualquier entrada será igual a la suma de la respuesta del sistema sin cero ante dicha entrada, mas  $C$  veces la derivada de dicha respuesta, esto es:

$$Y(s) = Y_1(s) + C \cdot s \cdot Y_1(s)$$

$$y(t) = y_1(t) + \frac{C \cdot dy_1(t)}{dt}$$

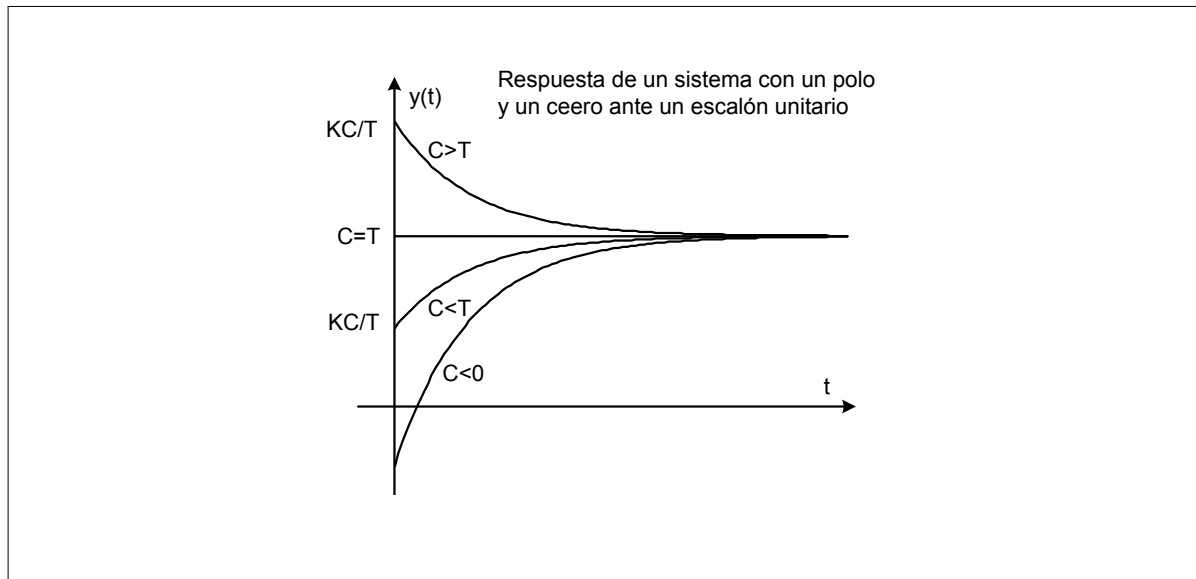
#### Respuesta al escalón

$$y_1(t) = K \left[ 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right]$$

$$\frac{C \cdot dy_1(t)}{dt} = \frac{C \cdot K}{T} \cdot e^{-\frac{t}{T}}$$

$$y(t) = K \left[ 1 - \left( 1 - \frac{C}{T} \right) \cdot e^{-\frac{t}{T}} \right]$$

Puede verse que el exponente de la exponencial no ha variado, pero que el valor inicial e la respuesta depende de la relación entre  $C$  y  $T$ .



Si  $T > C$  (cero a la izquierda del polo) la respuesta es aproximada a la del sistema sin el cero adelantada en  $C$  segundos, por lo que el tiempo de establecimiento será aproximadamente igual a  $3T - C$ . El efecto del cero ha adelantado la respuesta, reduciendo la duración del transitorio.

Cuanto más alejado está el cero del polo ( $C/T$  más pequeño) tanto menor es la influencia que ejerce sobre la dinámica del sistema. Un cero situado a 6 veces el valor del polo ejerce una influencia despreciable sobre el comportamiento del sistema.

Si el cero fuera igual que el polo (o tuviera valores muy similares) se anularían ambos efectos y el sistema sólo tendría un comportamiento estático.

Si  $C > T$ , el cero está más próximo al eje imaginario que el polo, en este caso se magnifican los efectos de la acción diferencial generando una respuesta con un valor inicial superior al valor final y un decaimiento exponencial hasta dicho valor.

En el caso en que  $C$  fuese negativo, el cero estaría situado en el semieje real positivo generando un valor inicial de la respuesta negativo (contrarrespuesta).

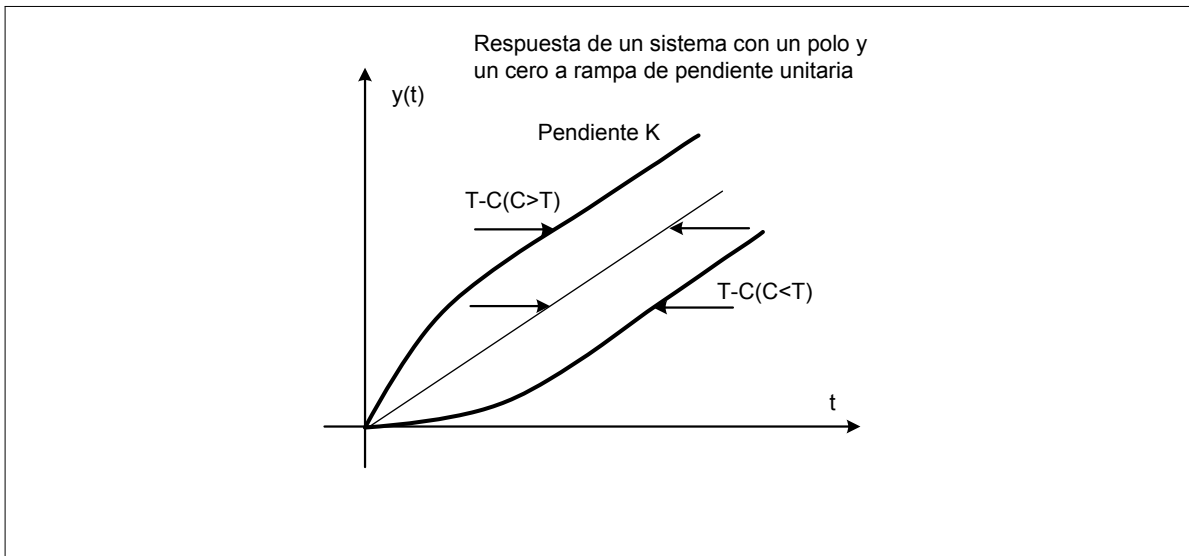
### Respuesta a la rampa

$$y_1(t) = K(1 - T) + KT \cdot e^{-\frac{t}{T}}$$

$$\frac{C \cdot dy_1(t)}{dt} = CK - KC \cdot e^{-\frac{t}{T}}$$

$$y(t) = K[t - (T - C)] + (T - C) \cdot e^{-\frac{t}{T}}$$

Como puede verse en la expresión analítica de la respuesta, el efecto del cero consiste en reducir el retardo de la respuesta que pasa de  $T$  a  $T - C$ .

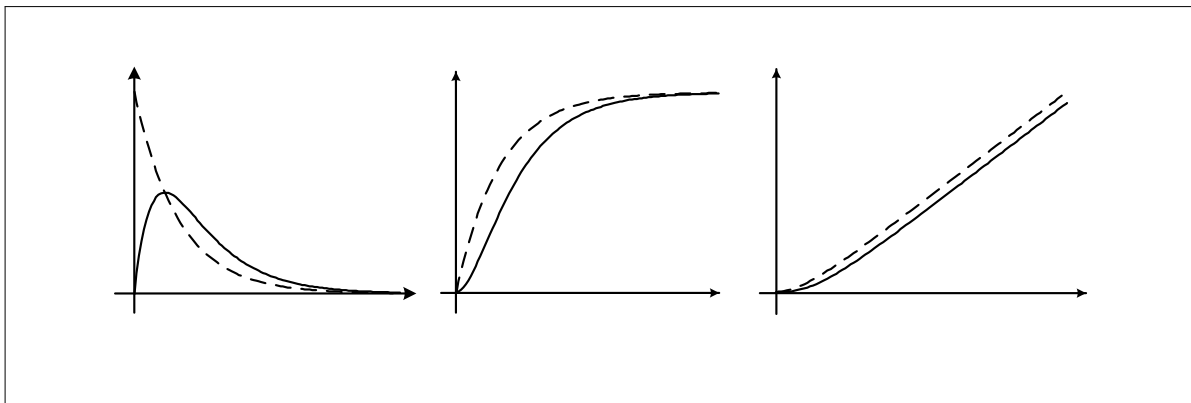


En resumen un cero situado más a la izquierda que el polo adelanta la respuesta un tiempo equivalente a la inversa del valor del cero.

### A.1.8. Influencia de polos reales adicionales

Si a un sistema con un polo real se le añaden más polos reales situados a su izquierda de manera que no cambie el polo dominante del sistema, las formas de las respuestas son similares, detectándose diferencias en los primeros instantes y en la duración del régimen transitorio. En general las respuestas obtenidas son más lentas, disminuyendo la pendiente en el origen y aumentando el tiempo de establecimiento.

$$G(s) = \frac{K}{(1 + Ts) \cdot \prod (1 + T_i s)}$$



De forma aproximada, el tiempo de establecimiento de la respuesta al escalón es:

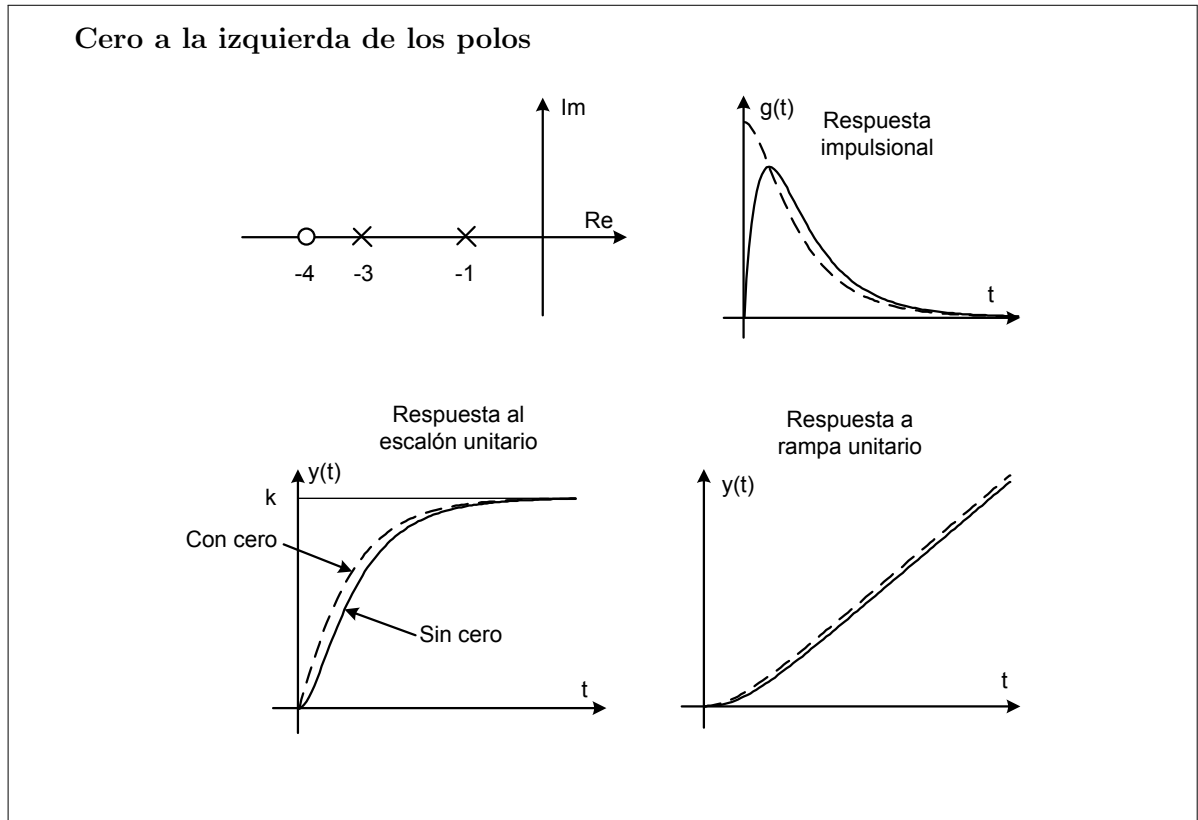
$$t_s \approx 3 \cdot T + \sum T_i$$

De igual forma el retardo de la respuesta a la rampa es igual a:

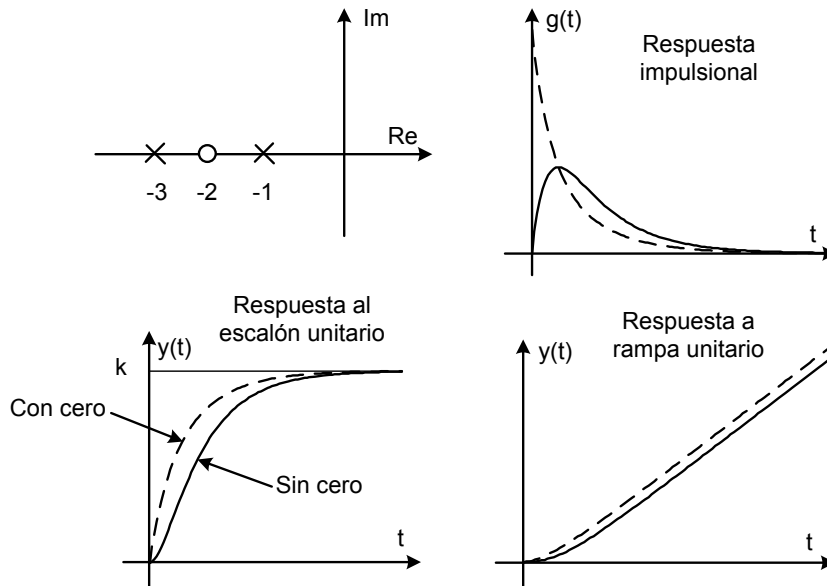
$$\text{Retardo} = T + \sum T_i$$

**A.1.9. Caso particular con dos polos reales y un cero**

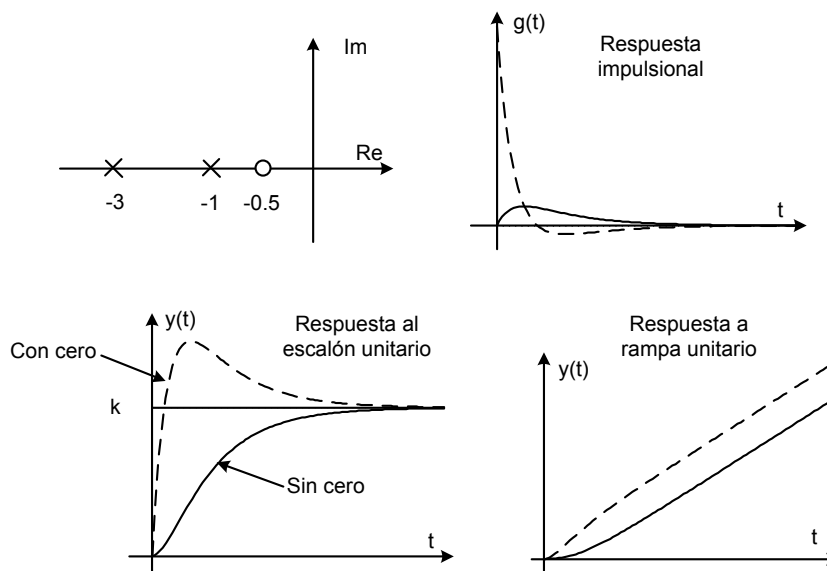
Dependiendo de la posición relativa de los polos y los ceros se producirán las siguientes respuestas:



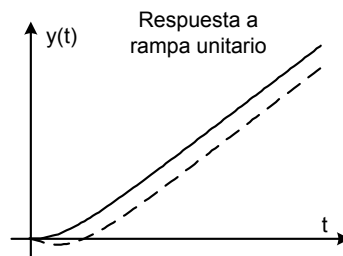
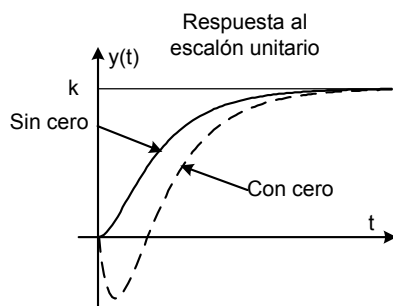
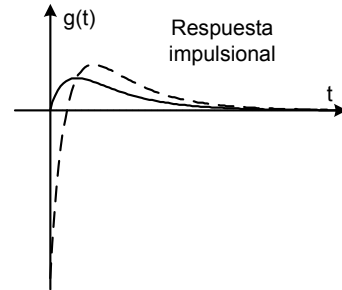
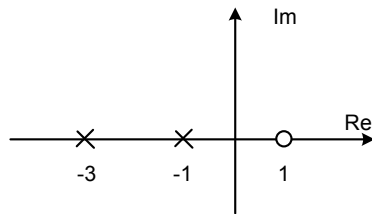
Cero entre los dos polos



Cero a la derecha del polo más significativo



Cero en el semieje positivo





## APÉNDICE B

---

### SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

---

#### B.1. Sistemas continuos

La función de transferencia del sistema de segundo orden más simple (sin ningún cero) es:

$$G(s) = \frac{A}{s^2 + as + b}$$

Por supuesto para que el sistema sea estable ambos polos deben estar situados en el semiplano negativo lo que implica que los coeficientes  $a$  y  $b$  deben ser estrictamente positivos ( $a > 0; b > 0$ ).

En esas condiciones su ganancia estática es  $G(0) = \frac{A}{b}$ .

En los siguientes apartados se van a analizar las respuestas de este tipo de sistemas ante entradas típicas como son el impulso, el escalón y la rampa, estudiando la influencia que sobre las mismas tiene la inclusión de polos y ceros adicionales.

El estudio se dividirá en dos apartados según que los polos sean reales o complejos.

##### B.1.1. Polos Reales

En este caso la función de transferencia puede descomponerse en el producto de dos funciones de transferencia de primer orden:

$$G(s) = \frac{A}{s^2 + as + b} = \frac{\frac{A}{b}}{1 + T_1s} \cdot \frac{1}{1 + T_2s}$$

El estudio de este tipo de sistemas se ha realizado en el apéndice H7, obteniéndose comportamientos sobreamortiguados.

##### B.1.2. Polos Complejos

En este caso la forma normalizada de representar la función de transferencia es:

$$G(s) = \frac{k\omega_n}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Donde  $0 < \xi < 1$  para que las raíces sean complejas, y donde

$K$  es la ganancia estática del sistema (supuesto estable)

$\xi$  es el coeficiente de amortiguamiento

$\omega_n$  es la frecuencia natural del sistema

A partir de estos parámetros básicos se pueden definir los siguientes que, como veremos, también están directamente relacionados con el comportamiento del sistema:

$\sigma = \xi\omega_n$  factor de decrecimiento)

$\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$  frecuencia propia del sistema

$\theta = \arccos\xi$  ángulo que forman los polos complejos con el semieje real

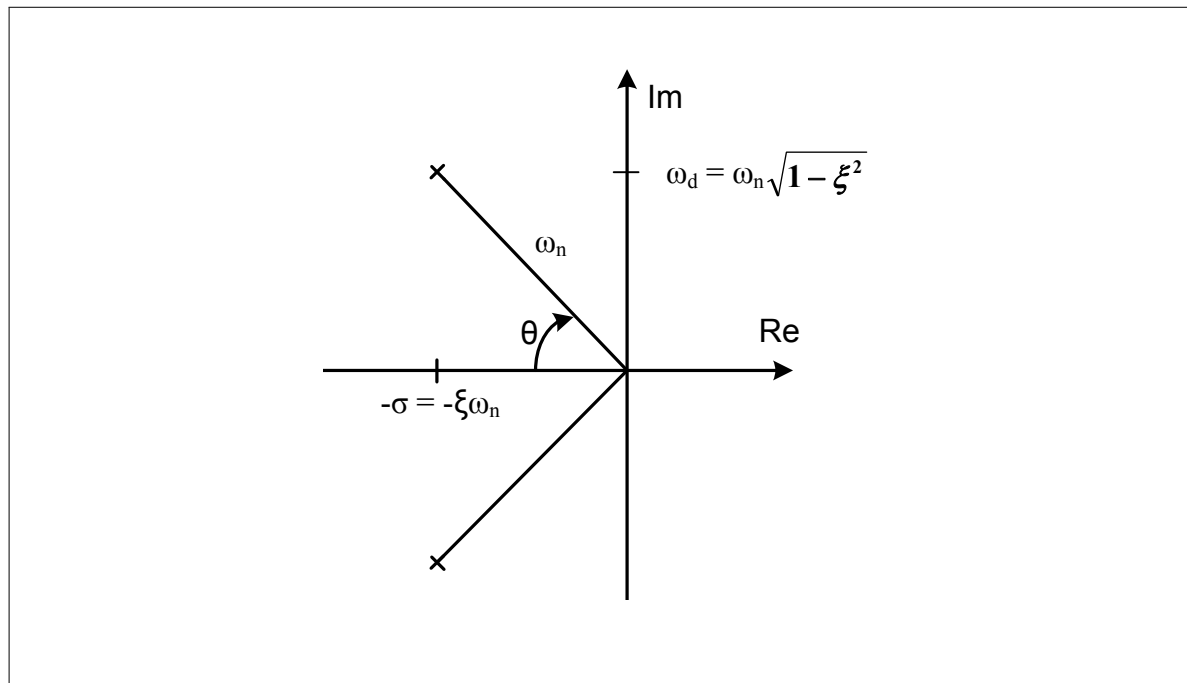
La expresión analítica de los polos en función de estos parámetros viene dada por:

$$P_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$$

o, lo que es lo mismo

$$P_{1,2} = -\sigma \pm j\omega_d$$

En la figura puede verse la relación existente entre los distintos parámetros y la posición de los polos sobre el plano complejo.



En el caso particular de que  $\xi = 1$  los polos serán reales dobles y  $\sigma = \omega_n$ ,  $\theta = 0$ .

En el caso particular de que  $\xi = 0$ , los polos serán imaginarios puros y  $\omega_n = \omega_d$ ,  $\theta = \pi/2$ .

### B.1.3. Respuesta Impulsional

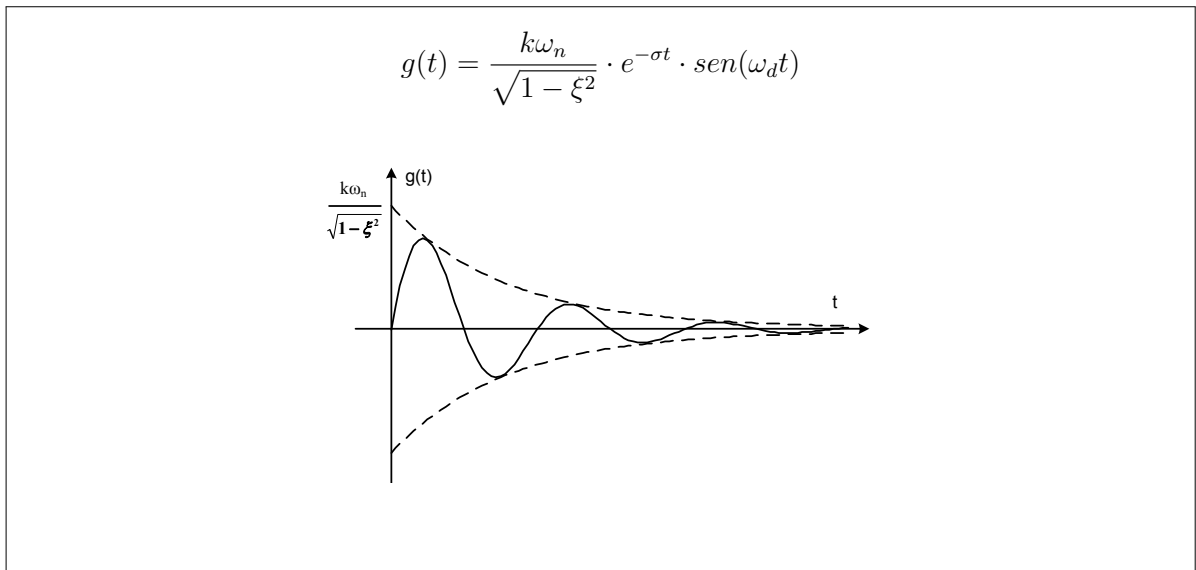
Caso general  $0 < \xi < 1$

Al ser la transformada del impulso igual a la unidad:

$$Y(s) = G(s) \cdot 1 \quad \rightarrow \quad y(t) = L^{-1} \left[ \frac{k\omega_n^2}{s^2 + d\xi\omega_n s + \omega_n^2} \right] = L^{-1} \left[ \frac{k\omega_n^2}{(s + \xi\omega_n)^2 + (\omega_n\sqrt{1 - \xi^2})^2} \right]$$

$$y(t) = L^{-1} \left[ \frac{k\omega_n}{\sqrt{1 - \xi^2}} \cdot \frac{\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}}{(s + \xi\omega_n)^2 + (\omega_n\sqrt{1 - \xi^2})^2} \right]$$

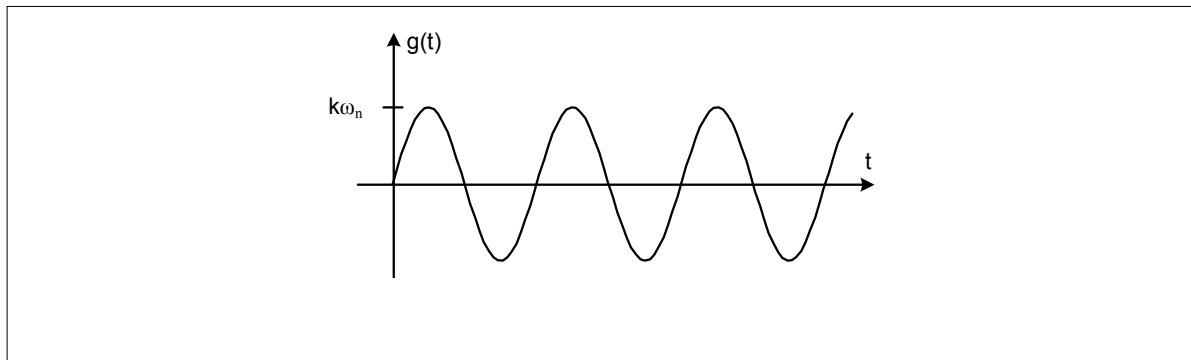
que, de acuerdo con las tablas de transformadas de Laplace corresponde a una señal que es el producto de una exponencial decreciente  $e^{-\xi\omega_n t}$  por una senoide de pulsación  $\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$ ,  $sen(\omega_n\sqrt{1 - \xi^2})t$ . Es decir



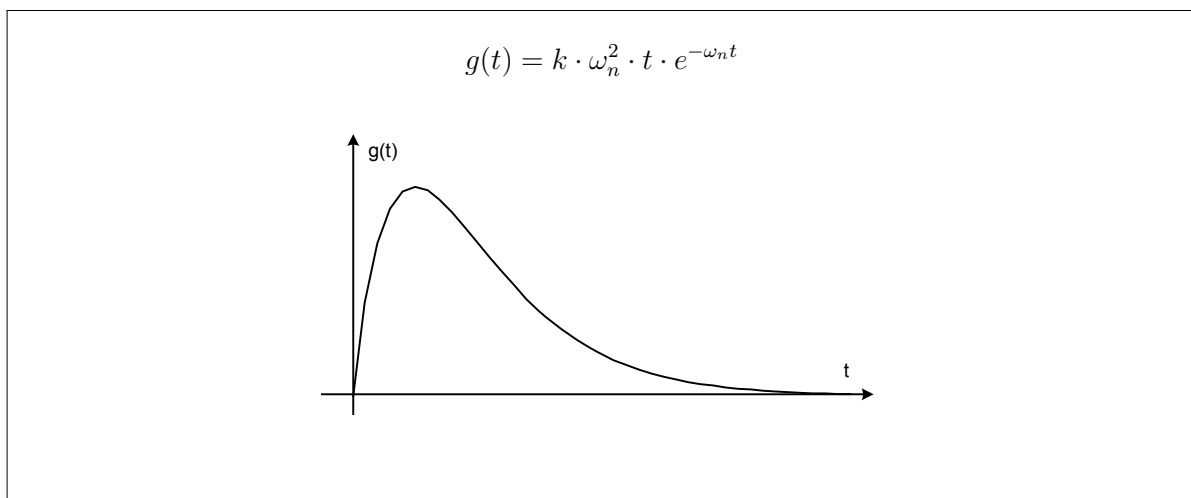
La pulsación  $\omega_d$  de la senoide es igual a la parte imaginaria de los polos, por lo que los máximos y mínimos de la respuesta así como sus pasos por cero dependerán exclusivamente de dicho parámetro. La exponencial decreciente, que es la envolvente de la respuesta depende exclusivamente de  $\sigma$ , por lo que la duración de la respuesta dependerá de dicho parámetro.

En el caso particular de que  $\xi = 0$ , la exponencial se convierte en una constante por lo que no hay amortiguamiento, obteniéndose la respuesta:

$$g(t) = k \cdot \omega_n \cdot sen(\omega_n t)$$



Si por el contrario  $\xi = 1$ , es la senoide la que desaparece obteniéndose una respuesta sobreamortiguada, correspondiente a un polo real doble. La expresión de la respuesta será:



#### B.1.4. Respuesta al Escalón

Para hallar la respuesta al escalón bastaría con integrar las respuesta impulsionales anteriores, o calcular la transformadas inversa de:

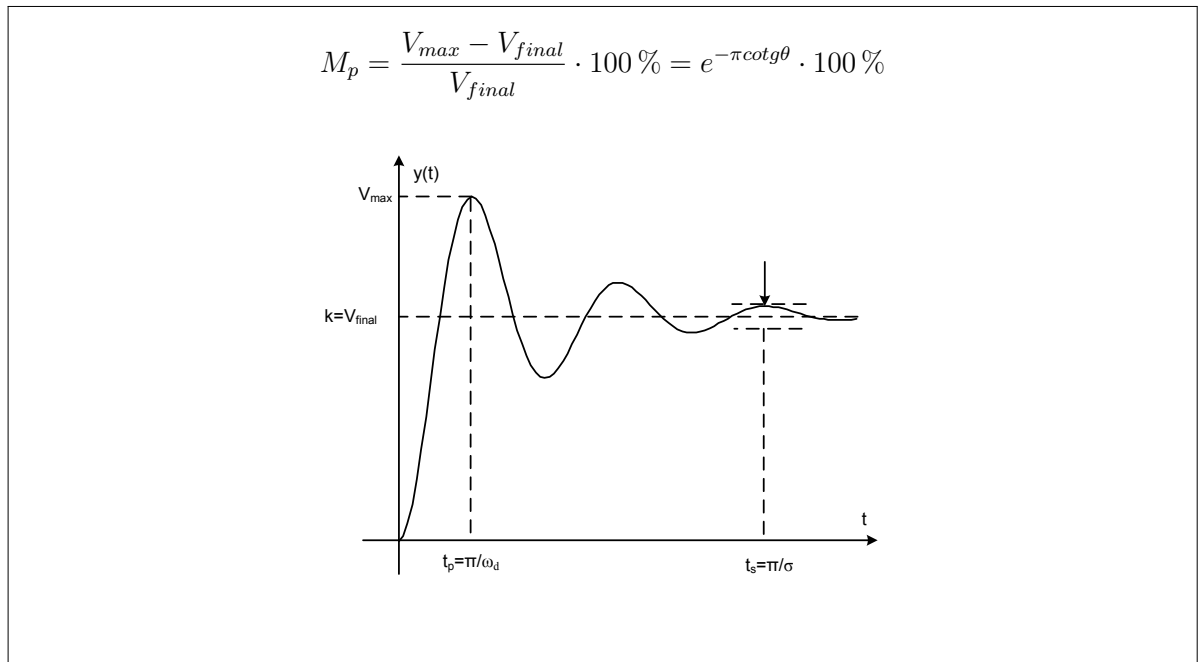
$$Y(s) = \frac{1}{s} \cdot G(s) = \frac{k\omega_n^2}{s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}$$

obteniéndose las siguientes expresiones analíticas de las respuestas:

**Caso general**  $0 < \xi < 1$

$$y(t) = k \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} \cdot e^{-\sigma t} \cdot \text{sen}(\omega_d t + \theta) \right]$$

donde  $\theta = \arcsen(\xi)$



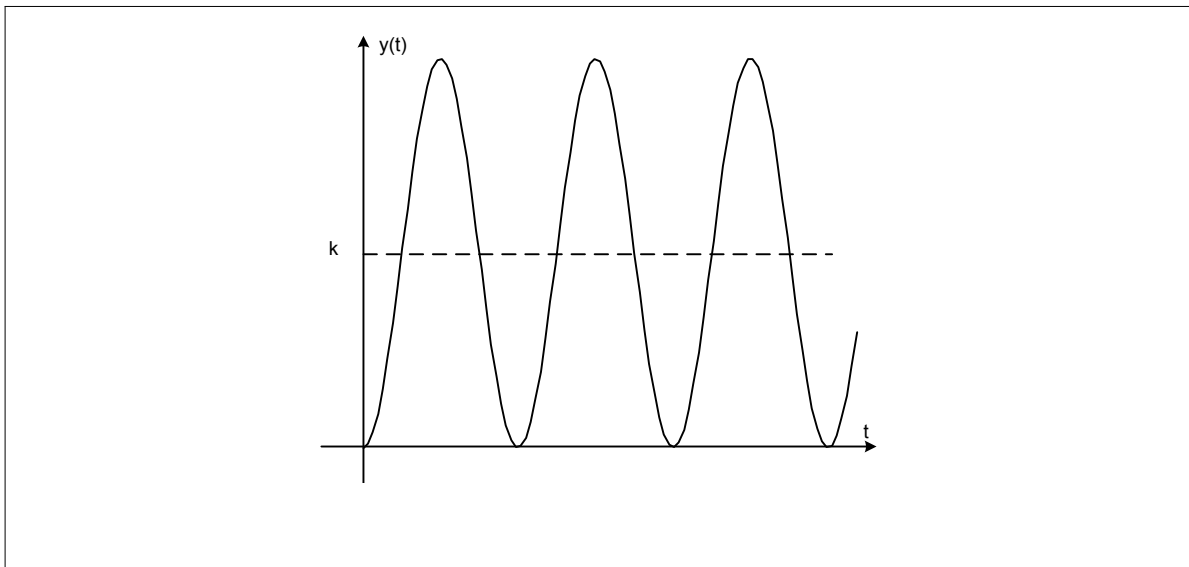
Como puede verse en la figura los sistemas de segundo orden siguen al escalón de entrada, amplificándolo por su ganancia estática, pero con un régimen transitorio cuya duración depende de  $\sigma$  (parte real de los polos) y que se caracteriza por oscilaciones de pulsación  $\omega_d$  (parte imaginaria de los polos). Es muy importante definir el primer máximo caracterizado por una sobreoscilación que depende de (que es función de la relación entre la parte imaginaria y la parte real de los polos) y que se produce en el instante  $t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$ .

Como puede verse existe una relación directa entre las principales características de la respuesta y la posición de los polos sobre el plano complejo.

### Caso $\xi = 0$

En este caso la expresión analítica de la respuesta es

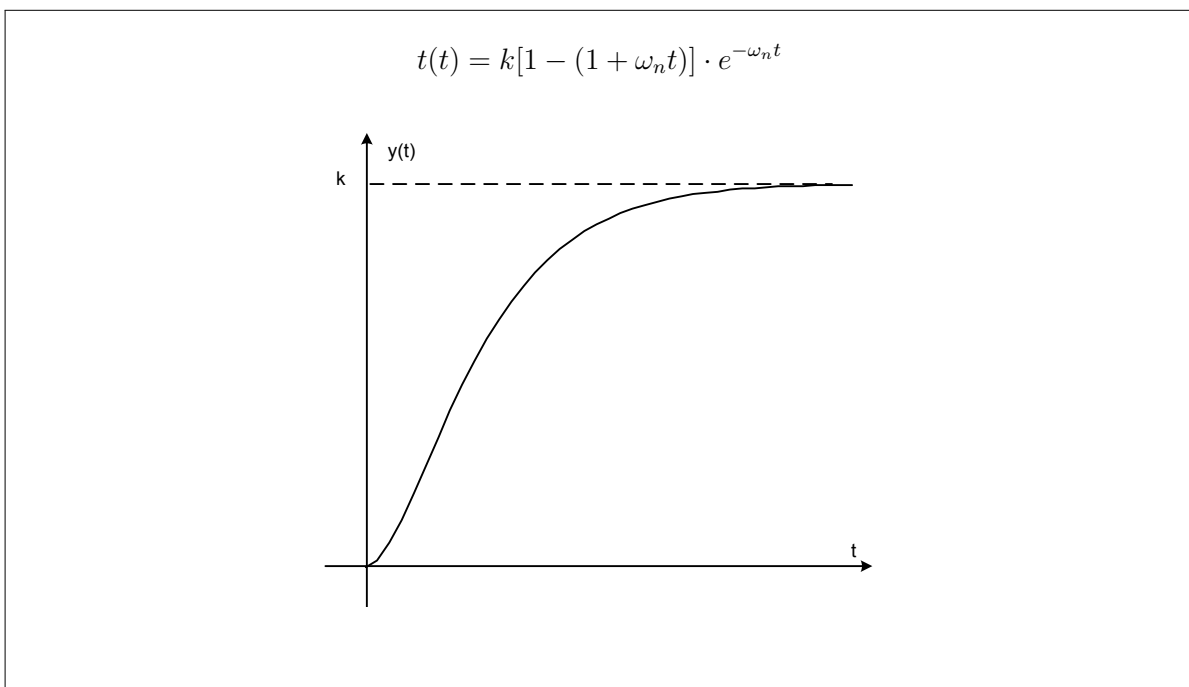
$$y(t) = k[1 - \cos(\omega_n t)]$$



Que es una senoide no amortiguada de pulsación  $\omega_n$ .

**Caso  $\xi = 1$**

Al ser los polos reales dobles, la respuesta es sobreamortiguada.



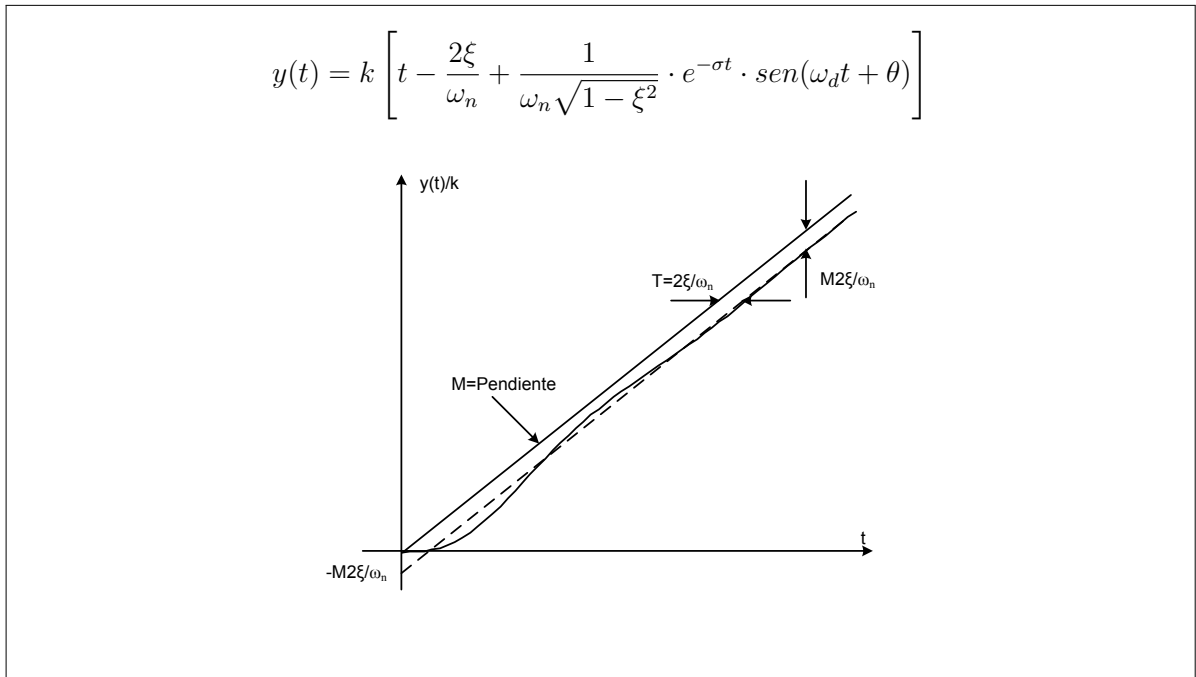
### B.1.5. Respuesta a la Rampa

Integrando las respuestas anteriores o calculando la transformada inversa de

$$Y(s) = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{k\omega_n^2}{(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}$$

Se obtienen las siguientes respuestas

**Caso general**  $0 < \xi < 1$



Como puede observarse en la figura la respuesta en régimen permanente es una rampa de pendiente  $K$  veces mayor que la rampa de entrada y retardada respecto de esta  $\frac{2\xi}{\omega_n}$ .

En el caso de  $\xi = 1$ , la respuesta será similar en régimen permanente con un retardo igual a dos veces la constante de tiempo correspondiente al polo doble, y en el caso de  $\xi = 0$  no existirá tal régimen permanente puesto que la respuesta quedará oscilando alrededor de la rampa de salida.

### B.1.6. Relación entre la respuesta al escalón y la posición de los polos sobre el plano complejo

De las expresiones anteriores puede deducirse que existe una relación directa entre la posición de los polos sobre el plano complejo y la respuesta al escalón, pudiendo resumirse dicha relación en los siguientes puntos:

- Si los polos se desplazan hacia el semiplano positivo el sistema se hace inestable.
- Si los polos se sitúan sobre el eje imaginario el sistema queda oscilando con su frecuencia natural.
- Si los polos se desplazan hacia la izquierda, la duración del transitorio (tiempo de establecimiento) disminuye.