II. MODELADO Y REPRESENTACION DE SISTEMAS

El objetivo de este primer bloque de capítulos, una vez definidos los distintos tipos de sistemas que trataremos a lo largo del libro, es presentar las distintas técnicas que utilizaremos para modelar y representar los sistemas. Igualmente se incluyen las herramientas necesarias para desarrollar los conceptos que veremos a lo largo de estos capítulos y del resto del libro. Al final de este bloque el alumno, a partir de la descripción de un sistema, deberá ser capaz de:

- *Hallar un modelo matemático del mismo*
- *Linealizar dicho modelo alrededor de un punto de funcionamiento*
- *Dibujar un diagrama de bloques del sistema linealizado*
- *Simplificar dicho diagrama de bloques hasta obtener las funciones de transferencia del sistema.*
- *Dibujar y resolver el flujograma del sistema*
- *Plantear la ecuación de estado del sistema*
- *Relacionar las matrices de la representación de estado con las funciones de transferencia*

1. Modelos matemáticos de sistemas

1.1 Modelos

La búsqueda del modelo matemático de un sistema consiste en sustituir en su diagrama funcional cada bloque por la ecuación matemática que liga las salidas con las entradas del mismo. Para ello, lógicamente, es necesario conocer las leyes que regulan su funcionamiento. Si el bloque es estático, su modelo será una ecuación que relaciona su variable de entrada con su variable de salida.

$u(t) = R \cdot i(t)$ si el bloque fuese una resistencia

Si se trata de un bloque dinámico la relación entre ambas variables será una ecuación diferencial y por lo tanto en el modelo matemático intervendrán no sólo las variables de entrada y de salida, sino también sus derivadas.

$u(t) = R \cdot i(t) + L \cdot \dfrac{di(t)}{dt}$ si el bloque fuese un circuito R, L.

El modelo matemático del sistema total será el conjunto de los modelos matemáticos de cada uno de los bloques y, por tanto, generalmente será un sistema de ecuaciones diferenciales.

En H1 se encuentran los modelos matemáticos más habituales de un gran número de sistemas físicos.

Ejemplo II-1

Un modelo matemático del sistema del ejemplo I-12 estará constituido por las siguientes ecuaciones:

Modelo de la válvula motorizada (catálogo)

$$\alpha(t) + T\frac{d\alpha(t)}{dt} = K_1 V_a(t) \qquad \text{(bloque dinámico)}$$

Relación entre la sección de paso a la entrada y el caudal de entrada (suponiendo alimentación a presión constante) (Bloque A)

$$Q_e(t) = K_2\alpha(t) \qquad \text{(bloque estático)}$$

Relación entre la sección de paso a la salida y el nivel y el caudal de salida (ecuación de Bernouilli) (Bloque C)

$$Q_s(t) = K_3\beta(t)\sqrt{H(t)} \qquad \text{(bloque estático)}$$

Ecuación de conservación de la materia (La diferencia entre los caudales de entrada y de salida se convierte en una variación del volumen de líquido almacenado) (Sumador y bloque B)

$$Q_e(t) - Q_s(t) = \frac{dA.H(t)}{dt} \qquad \text{(bloque dinámico)}$$

1.2 Modelos lineales de sistemas

Si los modelos matemáticos obtenidos fueran lineales, el estudio de los mismos se simplificaría notablemente al cumplir el *principio de linealidad o de superposición*, ya que bastaría conocer la respuesta del modelo ante un conjunto limitado de entradas (en general impulso, escalón y/o senoide). En efecto, si se cumple el principio de superposición, la respuesta ante una señal que es combinación lineal de otras señales elementales, es la misma combinación lineal de las respuestas de dichas señales elementales. Sin embargo, la mayoría de los modelos no son lineales por lo que el principio de superposición no es aplicable en general. Ahora bien, para pequeñas variaciones alrededor de un punto de funcionamiento, el comportamiento de un gran número de modelos puede aproximarse por el de su modelo linealizado. Este modelo linealizado, sí cumple el principio de superposición, pero sólo en un entorno del punto de funcionamiento elegido y con una ligera desviación con respecto al modelo no lineal. Este error será tanto mayor cuanto más nos alejemos del punto de funcionamiento.

En H2 se encuentra un estudio detallado del proceso de linealización

Ejemplo II-2

En el ejemplo anterior una de las ecuaciones es no lineal puesto que aparece el producto de dos variables y la raíz cuadrada del nivel de líquido. Por ello para obtener un modelo lineal es necesario linealizar, para lo cual es necesario definir un punto de funcionamiento.

Supuesta una tensión de alimentación en equilibrio en el valor V_{a0} y una sección de paso también fija de β_0 debemos calcular el valor de todas las variables significativas en dicho punto de equilibrio.

Al estar en equilibrio, el modelo matemático se simplifica puesto que todas las derivadas se anulan, quedando en el equilibrio el siguiente sistema:

$$\alpha_0 = K_1 V_{a0}$$

$$Q_{e0} = K_2\alpha_0$$

$$Q_{s0} = K_3 \beta_0 \sqrt{H_0}$$

$$Q_{e0} - Q_{s0} = 0$$

Resolviéndolo se obtienen los valores en el equilibrio de todas las variables, H_0, Q_{e0}, Q_{s0}. α_0.

Al linealizar, todas las variables se sustituirán por sus incrementos respectivos respecto a sus valores de equilibrio, obteniéndose:

$$\Delta\alpha(t) + T\frac{d\Delta\alpha(t)}{dt} = K_1 \Delta V_a(t)$$

$$\Delta Q_e(t) = K_2 \Delta\alpha(t)$$

$$\Delta Q_s(t) = K_3 \sqrt{H_0}\,\Delta\beta(t) - \frac{1}{2} K_3 \beta_0 \frac{1}{\sqrt{H_0}} \Delta H(t)$$

$$\Delta Q_e(t) - \Delta Q_s(t) = A\frac{d\Delta H(t)}{dt}$$

que es el modelo linealizado alrededor del punto de equilibrio definido.

Es importante hacer notar que de un único modelo no lineal se obtendrán tantos modelos linealizados como puntos de funcionamiento elijamos.

Igualmente existen no linealidades tan fuertes que no es posible su tratamiento mediante la técnica de la linealización. En particular, son importantes determinadas no linealidades que están presentes de forma natural en casi todos los sistemas como pueden ser la saturación, la zona muerta, la histéresis, o bien, otras que introduciremos voluntariamente en el sistema para su control, como, por ejemplo, un dispositivo todo-nada. El estudio de estos casos requiere técnicas específicas que analizaremos en su momento.

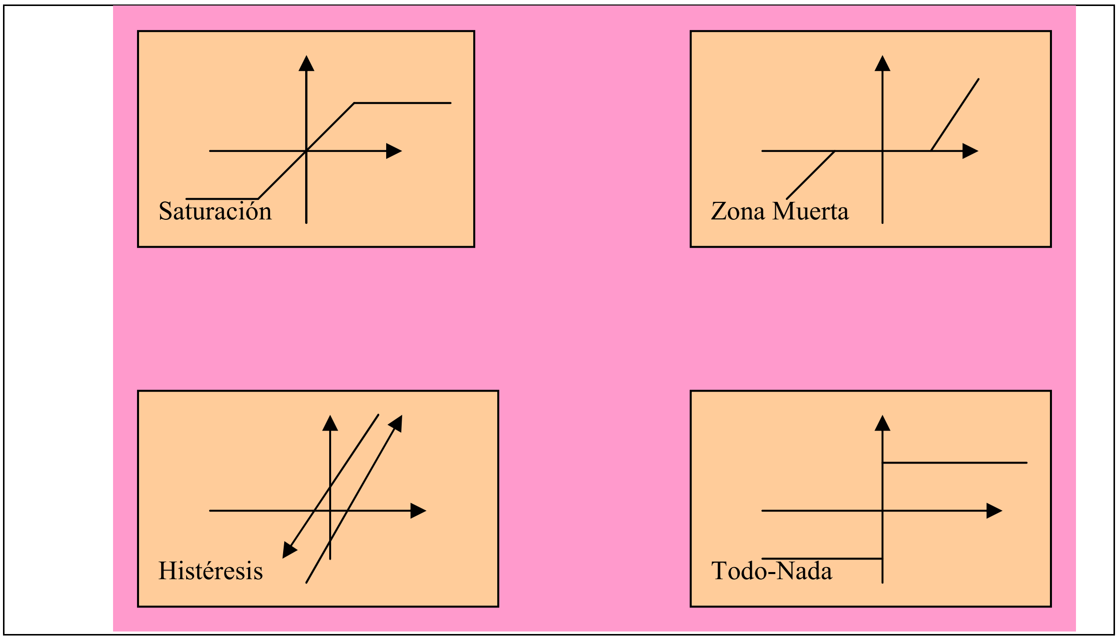


Figura II-1

1.3 Modelos invariantes en el tiempo

Aunque la gran mayoría de los sistemas físicos reales tienen un comportamiento que evoluciona a lo largo de su vida útil, debido fundamentalmente al envejecimiento de sus componentes, en muchos casos, podemos suponer que la respuesta del modelo no depende del instante en que se le aplica la señal de entrada. En estos casos diremos que los modelos son invariantes en el tiempo.

El estudio que vamos a desarrollar se centra en los sistemas lineales e invariantes en el tiempo, sistemas que en la literatura son conocidos como LTI (Linear Time Invariant Systems)

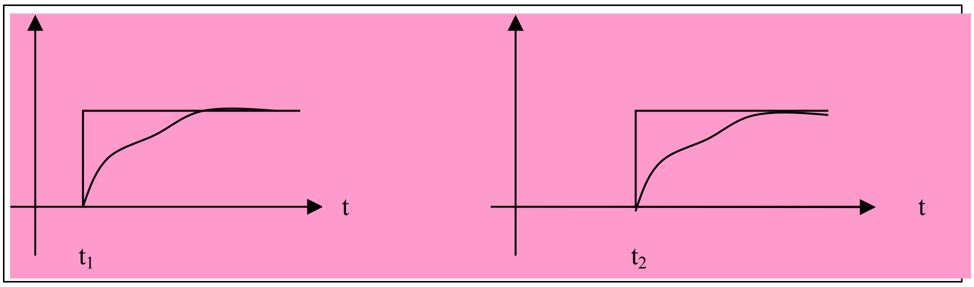


Figura II-2

En el caso de los sistemas continuos LTI, los modelos matemáticos están constituidos por sistemas de ecuaciones diferenciales que ligan la entrada y sus derivadas con la salida y sus derivadas. Cada una de dichas ecuaciones tendrá la forma general

$$a_0 y(t) + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + ... + a_n \frac{d^n t}{dt^n} = b_0 u(t) + b_1 \frac{du(t)}{dt} + ... + b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m}$$

En el caso de los sistemas discretos LTI, las ecuaciones diferenciales se sustituyen por ecuaciones en diferencias cuya forma general será:

$$a_0 y[k] + a_1 y[k-1] + ... + a_n y[k-n] = b_0 u[k] + b_1 u[k-1] + ... + b_m u[k-m]$$

Ejemplo II-3

Desde un punto de vista estrictamente matemático, el conocimiento del sistema de ecuaciones diferenciales o en diferencias que constituye el modelo del sistema permite conocer la respuesta del mismo para cada entrada aplicada. Basta, para ello, con resolver dicho sistema introduciendo los valores de la entrada. La respuesta es, pues, la solución del sistema de ecuaciones diferenciales o en diferencias.

Para el cálculo de dichas soluciones, existen dos caminos: mantenerse en el dominio del tiempo y utilizar técnicas matemáticas de resolución del sistema de ecuaciones en dicho dominio, o bien, utilizar las propiedades de las transformaciones integrales complejas y resolver el sistema en el dominio complejo.

En función del camino utilizado, se definirán dos nuevas formas de representar a los sistemas: el modelo de estado, en el dominio del tiempo, y la función de transferencia en el dominio complejo.

2. Función de Transferencia

2.1 Modelo en Transformadas de Laplace o en Transformada en Z

La transformada de Laplace constituye un método conocido para resolver ecuaciones diferenciales lineales, con lo que, al aplicar transformadas de Laplace a la ecuación diferencial que caracteriza el modelo, estaremos en disposición de resolver dicha ecuación y, por tanto, de hallar su respuesta. Así la transformación de Laplace permite resolver la ecuación del modelo, al tiempo que se obtiene una representación cómoda de las señales, como veremos posteriormente.

Es importante señalar que no es la solución temporal de la ecuación diferencial nuestro objetivo más importante, sino encontrar un método compacto de representación de los sistemas que nos permita conocer de forma simple las principales características de su comportamiento. Esto se consigue con la transformación de Laplace que supone un cambio de la variable independiente, pasando del tiempo a la variable compleja s de Laplace, por lo que se pasa del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia (hay que recordar que $s = \sigma + j\omega$ donde ω tiene el sentido de frecuencia; de pulsación para ser más exactos, puesto que sus unidades son rd/s).

Por supuesto, al final del proceso, deberemos volver al dominio del tiempo, en la gran mayoría de los casos, para expresar los resultados en términos compatibles con la naturaleza del sistema. No obstante, y dada la importancia que tiene la representación frecuencial en la ingeniería, en muchos casos los resultados se expresarán en términos frecuenciales, por lo que, formalmente, ni siquiera se llega a resolver la ecuación diferencial.

Antes de calcular las transformadas de Laplace de las señales que aparecen en el modelo matemático del sistema, supondremos que este se encuentra en equilibrio en el momento de aplicar la señal de entrada, consiguiendo de esta forma que se cumpla la relación fundamental:

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = s \cdot L[f(t)] = s \cdot F(s)$$

(ver en H3 las propiedades de la Transformada de Laplace).

De esta forma se obtiene el modelo en transformadas de Laplace que está compuesto por un conjunto de ecuaciones lineales en las que las transformadas de las señales están multiplicadas por polinomios en la variable s de Laplace.

$$Y(s)\left[a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0\right] = U(s)\left[b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0\right]$$

De forma análoga, los sistemas discretos se representarán utilizando la transformada en z que también convierte las ecuaciones en diferencias en polinomios en la variable compleja z multiplicados por la transformada en z de las secuencias.

En H4 se encuentra la definición y las propiedades de la transformada en z.

$$Y(z)\left[a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + ... + a_n z^{-n}\right] = U(z)\left[b_0 + b_1 z^{-1} + ... + b_m z^{-m}\right]$$

Ejemplo II-4

En el caso del ejemplo II-2, la aplicación de la transformada de Laplace a las funciones incremento de las variables originales del sistema genera el siguiente modelo en transformadas de Laplace.

$$\mathrm{A}(s) + T.s.\mathrm{A}(s) = K_1 V_a(s)$$
$$Q_e(s) = K_2 \mathrm{A}(s)$$
$$Q_s(s) = K_4 \mathrm{B}(s) + K_5 H(s)$$
$$Q_e(s) - Q_s(s) = A.s.H(s)$$

Es importante hacer notar que H(s) es la Transformada de Laplace del incremento de H(t) respecto del punto de equilibrio. Otro tanto ocurre con el resto de las transformadas.

2.2 Función de Transferencia de sistemas continuos y discretos

Dado un sistema con una sola entrada y una salida, su modelo matemático lineal está constituido por una ecuación diferencial en la que una combinación lineal de la entrada y sus derivadas es igual a otra combinación lineal de la salida y sus derivadas.

Del modelo en transformadas de Laplace se obtiene que la relación entre las transformadas de Laplace de la salida y de la entrada es igual a la relación de dos polinomios en s. Siendo el grado de cada uno de los polinomios y sus coeficientes función exclusiva del sistema y, por tanto, independiente de las señales de entrada consideradas. Esta relación se denomina *función de transferencia del sistema*, y es una característica del mismo, por lo que constituye también una forma de representarlo.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + ... + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + ... + a_1 s + a_0}$$

El caso discreto es totalmente análogo al continuo, sustituyendo la variable s por el operador z^{-1}.

$$G(z^{-1}) = \frac{Y(z^{-1})}{U(z^{-1})} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + ... + b_m z^{-m}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + ... + a_n z^{-n}}$$

Dado que z^{-1} tiene el sentido físico del desplazamiento hacia la derecha (o del retardo puro), las funciones de transferencia de los sistemas discretos se representan en muchas ocasiones con exponentes negativos de z.

La información contenida en la función de transferencia es la misma que la que contiene el modelo matemático (en condiciones iniciales nulas), y presenta la ventaja de ser mucho más compacta en su representación que dicho modelo.

En los sistemas con varias entradas y salidas, existirá una función de transferencia entre cada par de entrada-salida, por lo que una de las formas de representar los sistemas multivariables es mediante una matriz de transferencia cuyos elementos son las funciones de transferencia parciales. Para el cálculo de estas funciones parciales es necesario aplicar el principio de superposición.

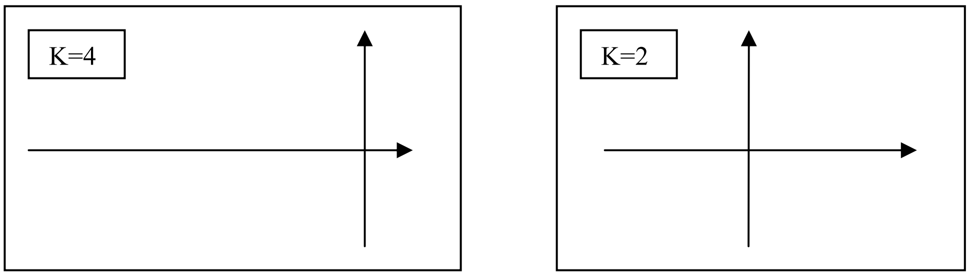
Como veremos con más detalle en el capítulo de análisis, el comportamiento dinámico del sistema depende de los polinomios numerador y denominador de la función de transferencia, en particular de sus raíces. Por ello las raíces del polinomio numerador se denominan los *ceros del sistema*, y las del denominador los *polos del sistema*. Igualmente, por su importancia, el polinomio denominador recibe el nombre de *polinomio característico* del sistema. Así la función de transferencia del sistema queda perfectamente definida por sus polos, sus ceros y una constante. Los polos se representan en el plano complejo por aspas y los ceros por círculos, por lo que la función de transferencia de un sistema puede ser representada por su mapa de polos y ceros, al que hay que añadir una constante.

Ejemplo II-5

Los sistemas con funciones de transferencia

$$G(s) = \frac{4\cdot(s+3)}{(s+1)\cdot(s^2+4s+5)} \qquad \text{y} \qquad G(z) = \frac{2\cdot(z-0,2)}{(z-0,8)\cdot(z-0,6)}$$

pueden ser representados en planos planos s y z:

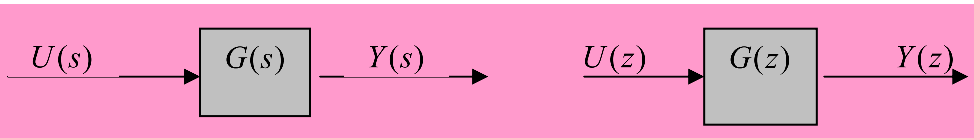


Es importante resaltar que esta representación gráfica equivale, si las condiciones iniciales son nulas, a la ecuación diferencial (o en diferencias) del modelo matemático del sistema.

3. Representación gráfica de sistemas

3.1 Diagrama de bloques

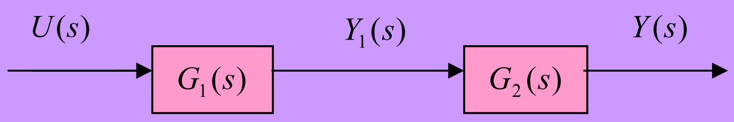
De la definición de función de transferencia se deduce la relación fundamental de los sistemas en el dominio de Laplace o en el dominio Z; que la transformada (en s o en Z) de la señal de salida es igual al producto de la transformada en s o en z de la señal de entrada, por la función de transferencia del sistema. Esta propiedad nos permite una representación de los sistemas análoga al diagrama funcional, pero en la que se insertan las funciones de transferencia de cada sistema en los bloques que lo representan.



$$Y(s) = G(s).U(s) \qquad\qquad Y(z) = G(z)\cdot U(z)$$

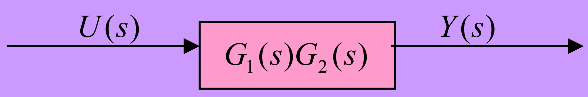
Las formas básicas de interconexión de subsistemas son las siguientes:

Sistemas en serie

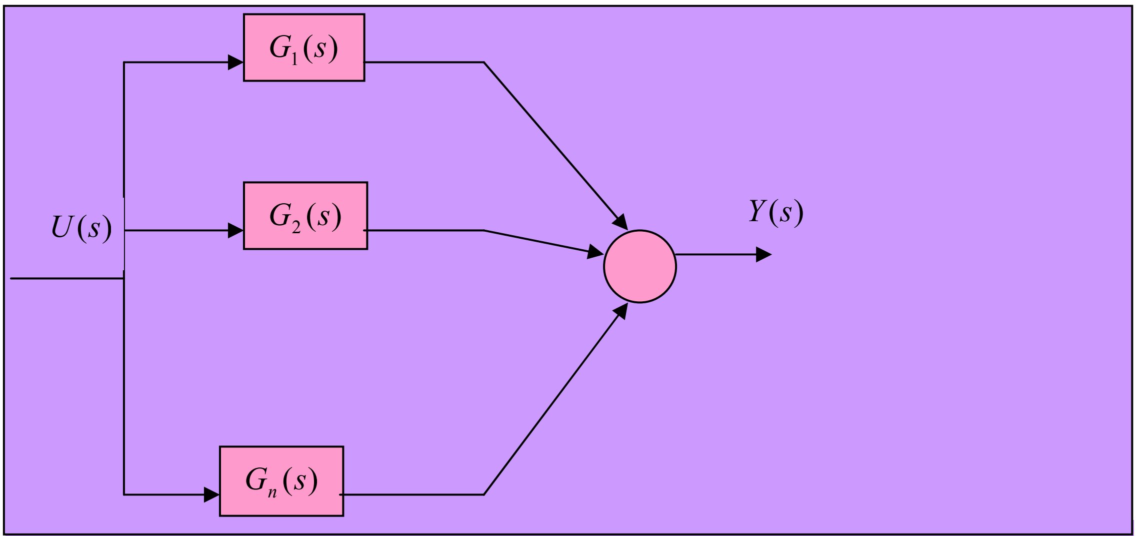


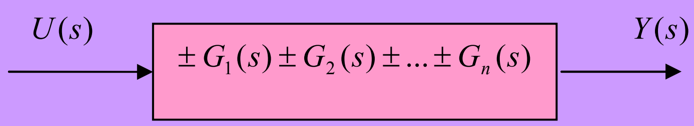
$$Y(s) = G_2(s)Y_1(s)$$

$$Y_1(s) = G_1(s)U(s) \qquad Y(s) = G_1(s)G_2(s)U(s)$$

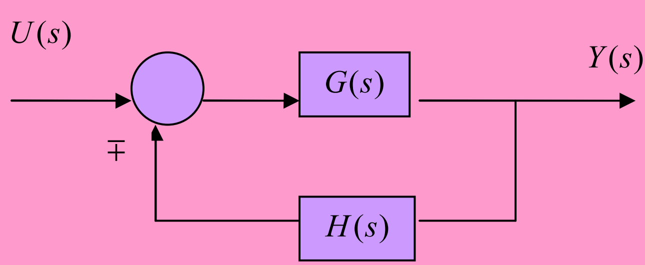


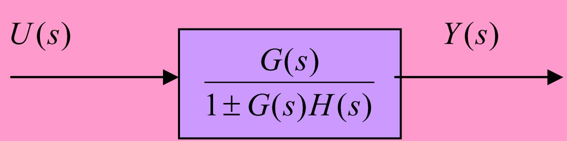
Sistemas en paralelo





Sistemas realimentados



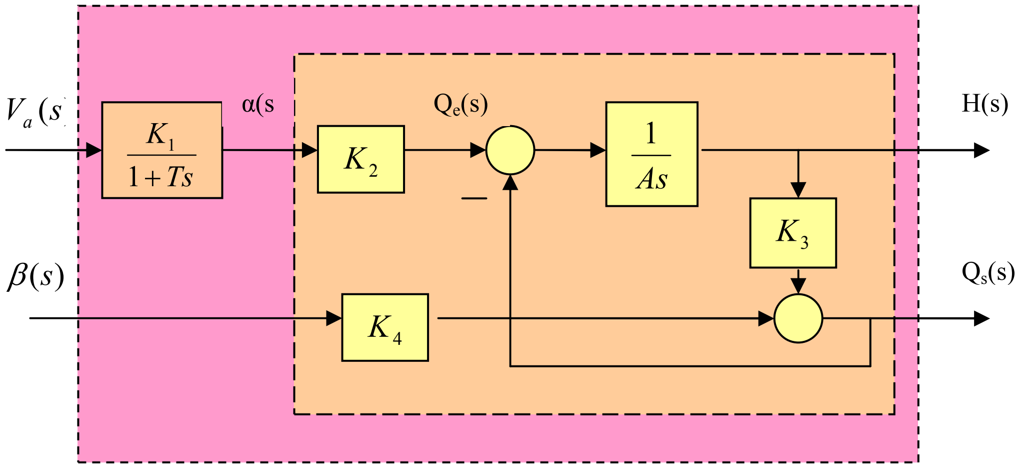


En estos últimos sistemas, dada su importancia en el control, cada una de las funciones de transferencia recibe un nombre propio. Así, a G(s), que es la función de transferencia que une directamente la entrada con la salida, se la denomina cadena directa, a H(s) realimentación, al producto G(s)H(s) cadena abierta y a la función de transferencia global cadena cerrada.

Cualquier otra combinación de subsistemas puede ser reducida a alguna de las anteriores, como se detalla en H5, por lo que es posible, simplificando el diagrama de bloques, obtener la función de transferencia global entre la entrada y la salida del sistema.

Ejemplo II-6

Partiendo del diagrama funcional del ejemplo 10, y utilizando el modelo en transformadas de Laplace del ejemplo 14 se puede obtener el diagrama de bloques del sistema.

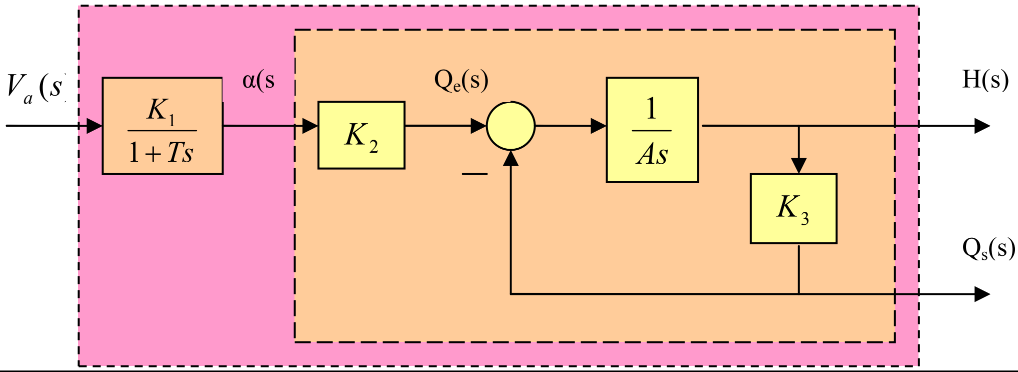


Al ser un sistema con dos entradas y dos salidas, existen cuatro funciones de transferencia en el mismo: $\frac{H(s)}{V_a(s)};\frac{H(s)}{\beta(s)};\frac{Q_s(s)}{V_a(s)}\,y\,\frac{Q_s(s)}{\beta(s)}$

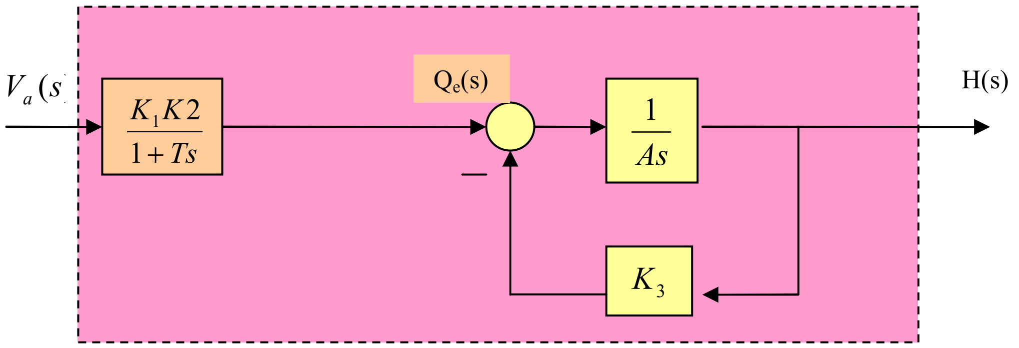
Para calcularlas será necesario aplicar el principio de superposición y considerar nulas, alternativamente, cada una de las entradas.

- Cálculo de $\frac{H(s)}{V_a(s)}\,y\,\frac{Q_s(s)}{V_a(s)}$

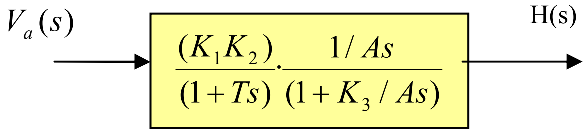
Suponiendo $\beta(s)=0$, el diagrama de bloques anterior queda:



donde aparecen dos bloques en serie y un bucle de realimentación, por lo que puede simplificarse de la siguiente forma para el cálculo de $\frac{H(s)}{V_a(s)}$



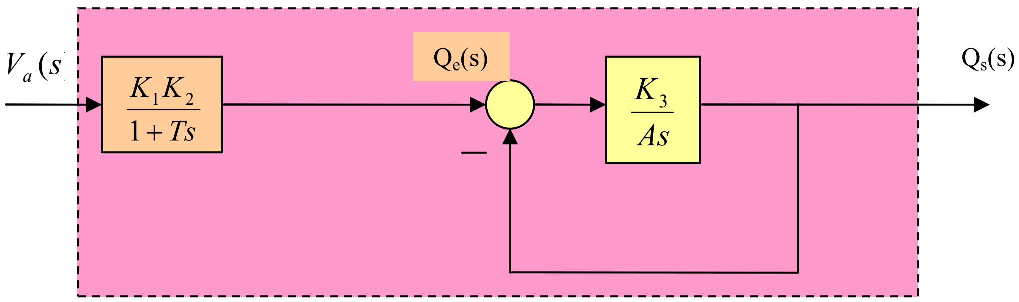
que por aplicación directa de las expresiones vistas anteriormente queda:



es decir:

$$\frac{H(s)}{V_a(s)} = \frac{K_1K_2}{(1+Ts)(As+K_3)} = \frac{K_1K_2/K_3}{(1+Ts)(1+(A/K_3)s)}$$

Para el cálculo de $\frac{Q_s(s)}{V_a(s)}$ se obtendría el siguiente diagrama:

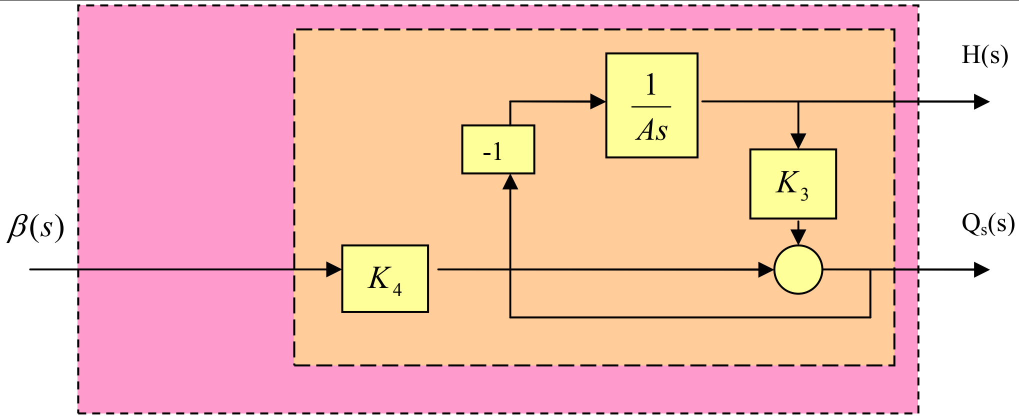


que da lugar a la función de transferencia:

$$\frac{Q_a(s)}{V_a(s)} = \frac{K_1K_2}{(1+Ts)}\frac{K_3/As}{(1+K_3/As)} = \frac{K_1K_2}{(1+Ts)(1+(A/K_3)s)}$$

- Cálculo de $\frac{H(s)}{\beta(s)}\, y\, \frac{Q_s(s)}{\beta(s)}$

En este caso hay que hacer $V_a(s) = 0$, obteniéndose el siguiente diagrama:



que está constituido por un sistema en serie con otro que está realimentado positivamente. En este último, la cadena directa vale 1, mientras que la realimentación vale $\frac{-K_3}{As}$ cuando se toma $Q_s(s)$ como salida, obteniéndose, por tanto, la siguiente función de transferencia:

$$\frac{Q_s(s)}{\beta(s)} = K_4 \frac{1}{1-(-K_3/As)} = \frac{A(K_4/K_3)s}{1+(A/K_3)s}$$

Al tomar H(s) como salida, la cadena directa del sistema realimentado es $-1/As$

y la realimentación K_3 ,con lo que la función de transferencia queda:

$$\frac{H(s)}{\beta(s)} = K_4 \frac{-1/As}{1-(-K_3/As)} = \frac{-K_4/K_3}{1+(A/K_3)s}$$

La matriz de transferencia entre el vector de transformadas de las entradas y el de las transformadas de las salidas está formada por estas cuatro funciones de transferencia, cumpliéndose, por tanto:

$$\begin{matrix} H(s) \\ Q_s(s) \end{matrix} = \begin{matrix} \frac{K_1K_2/K_3}{(1+Ts)[1+(A/K_3)s]} & \frac{-K_4/K_3}{1+(A/K_3)s} \\ \frac{K_1K_2}{(1+Ts)[1+(A/K_3)s]} & \frac{(AK_4/K_3)s}{1+(A/K_3)s} \end{matrix} \; \begin{matrix} V_a(s) \\ \beta(s) \end{matrix}$$

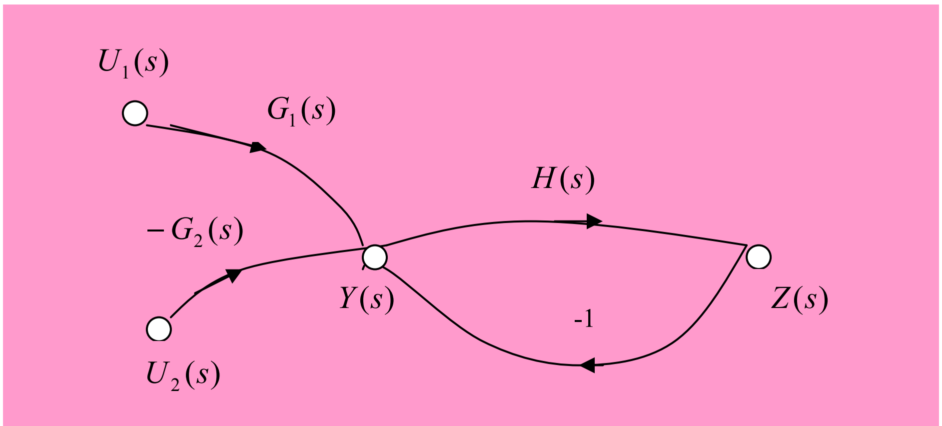
es decir:

$$H(s) = \frac{K_1K_2/K_3}{(1+Ts)[1+(A/K_3)s]} \cdot V_a(s) - \frac{K_4/K_3}{[1+(A/K_3)s]} \cdot \beta(s)$$

$$Q_a(s) = \frac{K_1K_2}{(1+Ts)[1+(A/K_3)s]} \cdot V_a(s) + \frac{[AK_4/K_3]s}{[1+(A/K_3)s]} \cdot \beta(s)$$

3.2 Flujograma

La representación mediante flujogramas es similar a la del diagrama de bloques. En ella las señales están representadas por nodos, y los subsistemas, por flechas orientadas que parten del nodo correspondiente a la señal de entrada y terminan en el nodo correspondiente a la señal de salida. Cada flecha lleva asociada la transmitancia que es la función de transferencia entre las señales asociadas a los nodos de entrada y salida. La ventaja de esta representación frente al diagrama de bloques es la existencia de una expresión analítica, la fórmula de Mason (detallada en H6), que permite calcular las funciones de transferencia del flujograma sin necesidad de simplificarlo.

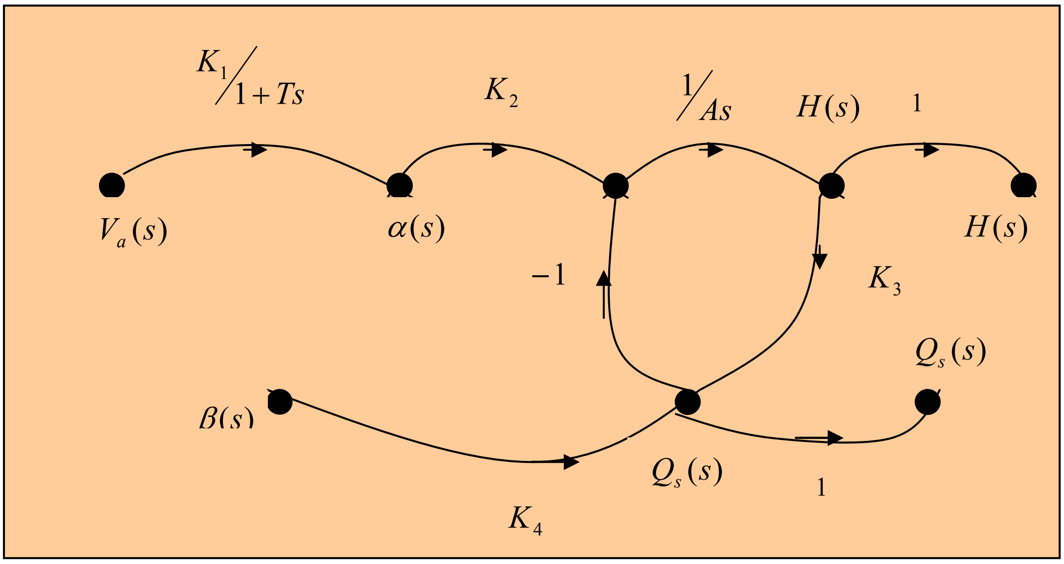


$$Y(s) = U_1(s)G_1(s) - U_2(s)G_2(s) - Z(s)$$
$$Z(s) = Y(s)H(s)$$

Dicha fórmula está basada en las transmitancias de los trayectos existentes entre la entrada y la salida y de los bucles existentes en el flujograma.

Ejemplo II-7

El diagrama de bloques del ejemplo II-6 puede ser representado por el siguiente flujograma:



En este flujograma sólo aparece un bucle cuya transmitancia es $-K_3/_{As}$, por lo tanto el discriminante del flujograma vale

$$\Delta = 1 + K_3/_{As}$$

- Función de transferencia $\dfrac{H(s)}{V_a(s)}$

Entre estos dos nodos sólo existe un trayecto de transmitancia $\frac{K_1K_2}{(1+Ts)As}$. Por lo tanto aplicando la fórmula de Mason se obtiene:

$$\frac{H(s)}{V_a(s)} = \frac{\dfrac{K_1K_2}{(1+Ts)As}}{1+{K_3}/{As}} = \frac{K_1K_2/K_3}{(1+Ts)[1+(A/K_3)s]}$$

- Función de transferencia $\frac{H(s)}{\beta(s)}$

Entre estos dos nodos existe un trayecto de transmitancia $-K_4/As$, por lo que la función de transferencia quedará:

$$\frac{H(s)}{\beta(s)} = \frac{-K_4/As}{1+K_3/As} = \frac{-K_4/K_3}{1+(A/K_3)s}$$

Para el cálculo de las funciones de transferencia, considerando la salida $Q_s(s)$, el procedimiento es el mismo, existiendo también un solo trayecto entre dicha salida y cada una de las entradas.

De la comparación de este ejercicio con el anterior se deduce que la utilización de la fórmula de Mason, supone un gran ahorro de tiempo frente a la simplificación del diagrama de bloques, sobre todo cuando existe más de una entrada o salida. Sin embargo hay que resaltar que, en el caso de flujogramas complejos, también la utlización de la fórmula de Mason puede ser una fuente de error por la dificultad existente de determinar el número de bucles en esos casos. En cualquier caso la fórmula de Mason es mucho más fácil de implementar en un computador.

4. Modelos de estado

4.1 Variables de estado

En el capítulo 1 se han definido las variables de estado de un sistema como el conjunto de variables del mismo que es preciso conocer en un determinado instante para poder determinar su evolución a partir de dicho instante. Por ello, las variables de estado resumen el pasado del sistema cuyo conocimiento es necesario para conocer su evolución futura.

Obviamente, en un sistema estático no existen variables de estado, al depender su salida en un determinado instante únicamente del valor de la entrada en ese instante. Por lo tanto el concepto de variable de estado está íntimamente ligado al de almacenamiento de energía o de información.

Ejemplo II-8

La ejecución de un algoritmo en un computador es una forma directa de visualizar las variables de estado. Si el algoritmo es estático (p. ej. una tabla de cuadrados) no es necesario almacenar en memoria valores anteriores de las secuencias. Si el algoritmo es dinámico (p. ej. y(k)=y(k-1)+u(k)), es necesario guardar el resultado y(k) hasta la siguiente ejecución del algoritmo en que se convierte en y(k-1). Por lo tanto, en una ecuación en diferencias, el número de variables de estado será igual al número de valores anteriores necesarios para realizar el cálculo

De forma análoga, en un sistema continuo, cada dispositivo capaz de almacenar energía necesita una variable de estado que indique, en cada instante, su nivel de carga, es decir, su condición en dicho instante. El conjunto de estas variables define el estado del sistema.

La evolución de cada una de las variables de estado se reflejará mediante una ecuación diferencial de primer orden. Esta evolución será función de los valores de todas las variables de estado y de los valores de las entradas en ese instante.

$\frac{dx}{dt} = f(x,u)$ donde x y u son vectores

si el modelo es lineal se obtendrá

$$\frac{dx_i}{dt} = a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + \cdots + a_{in} \cdot x_n + b_{i1} \cdot u_1 + \cdots + b_{im} \cdot u_m$$

Ejemplo II-9

El sistema del ejemplo II-1 presenta dos variables cuyos valores representan la historia del sistema. Estas son la altura de líquido en el depósito y la posición de la válvula de entrada, variables que se corresponden con las dos únicas derivadas que aparecen en el modelo matemático $\frac{d\alpha}{dt}$ y $\frac{dh}{dt}$. Por lo tanto este par de variables pueden ser consideradas como variables de estado del sistema.

4.2 Ecuación de estado

El conjunto de las ecuaciones anteriores forman lo que se denomina la ecuación de estado del sistema, que es una ecuación matricial donde x es el vector de las variables de estado, A es una matriz cuadrada de dimensión (n,n), B es una matriz de dimensiones (n.m) y u es el vector de las señales de entrada de dimensión m.

$$\dot{X} = A \cdot X + B \cdot U$$

Ejemplo II-10

4.3 Ecuación de la salida

La dinámica del sistema se concentra en la evolución de las variables de estado por lo que los valores de las salidas, en un instante, son una función estática del estado y de las entradas en dicho instante.

Si el modelo es lineal, se obtiene

$$Y = C \cdot X + D \cdot U$$

donde y es el vector de salidas de dimensiones , C es una matriz de dimensiones x es el vector de estado, d es una matriz de dimensiones y u es el vector de entradas.

Ejemplo II-11

Al conjunto de las ecuaciones de estado y de salida se le denomina modelo de estado del sistema.

Ejemplo II-12

Es importante señalar que la elección de las variables de estado no es única. Desde un punto de vista físico, es obvio que tanto la altura del líquido en el depósito como el caudal de salida en un determinado instante, resumen la historia del depósito por lo que cualquiera de las dos señales pueden formar parte de las variables de estado del sistema. Desde un punto de vista matemático, al estar relacionadas ambas variables por una relación estática, el conocimiento que aporta una u otra es exactamente el mismo en cada instante.

En general, si se aplica una transformación lineal T al vector de estado se obtiene otro vector de estado que cumplirá el nuevo modelo de estado;

5. Relación entre el modelo de estado y la representación por función de transferencia.

6. Recapitulación

A continuación se incluyen, de forma sintética, la aplicación de los distintos métodos de representación vistos en estos dos primeros capítulos, en el caso del depósito del ejemplo I-12.

Esquema

Diagrama Funcional

Modelo Matemático No lineal

Modelo matemático linealizado

Diagrama de Bloques

Flujograma

Función de transferencia

Mapa de polos y ceros

Modelo de estado

Matrices A, B, C, D

En este capítulo hemos visto las distintas formas de representar a los sistemas. A partir de su modelo matemático lineal o linealizado hemos llegado a las dos formas básicas de representación: la función de transferencia y las ecuaciones de estado. La función de transferencia es una característica del sistema, y, por lo tanto, tiene la misma información que el modelo matemático del sistema (en condiciones iniciales nulas), es una función de la variable compleja s, para sistemas continuos, o z, para los discretos, y por lo tanto puede ser representada en el plano complejo s o z. En el próximo capítulo veremos la relación entre esa representación del sistema sobre el plano complejo y su comportamiento dinámico, llegando a relaciones muy simples entre la posición de los polos y ceros sobre dicho plano y las características de las respuestas. La función de transferencia constituye la base de la representación externa de los sistemas.

Igualmente hemos desarrollado el diagrama funcional, sustituyendo en sus bloques la representación del sistema por su función de transferencia. Esto nos permite conocer la función de transferencia de un sistema global a partir de las funciones de transferencia de sus subsistemas, además nos da una representación gráfica del sistema en la que aparecen las transformadas de sus señales, representación que será muy importante a la hora de establecer un esquema de control para el sistema.

Tanto la función de transferencia como el diagrama de bloques se definen exclusivamente para modelos lineales. Ahora bien, existen un gran número de sistemas no lineales que pueden ser aproximados por modelos lineales utilizando la técnica de la linealización.

La representación interna de los sistemas está constituida por su ecuación de estado y, por lo tanto, por las matrices A y B. Esta representación presenta, frente a la función de transferencia, el inconveniente de ser más abstracta, puesto que los coeficientes de las matrices no siempre tienen sentido físico. Sin embargo es una representación matemáticamente muy compacta y generalizable a los sistemas multivariables.

GLOSARIO

Función de Transferencia	
Polos	
Ceros	
Cadena Directa	
Cadena Abierta	
Cadena Cerrada	
Realimentación	
Modelos LTI	
Superposición	
Diagrama de Bloques	
Flujograma	