H1 TRANSFORMADA DE LAPLACE

1. Definición

La transformada unilateral de Laplace de una función f(t), es una función de la variable compleja $s = \sigma + j\omega$ definida por:

$$F(s) = \int_{0-}^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} \cdot dt$$

para que la transformada exista es necesario que exista un σ_0 tal que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| f(t) \cdot e^{-\sigma_0 t} \right| < \infty$$

Es decir, basta que exista un σ_0 tal que el producto $f(t) \cdot e^{-\sigma_0 t}$ tienda a cero para que la transformada $F(s)$ exista. Con esta definición la mayoría de las funciones que se utilizan habitualmente en la teoría de control tienen transformada de Laplace, contrariamente a lo que ocurre con la transformada de Fourier, que no está definida para funciones tan habituales como el escalón o la rampa.

Existe, además una expresión analítica que permite obtener la función en el tiempo a partir de su transformada de Laplace:

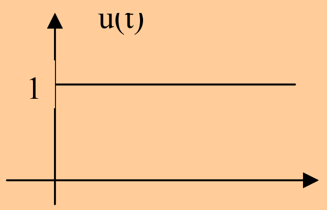
$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_c - j\infty}^{\sigma_c + j\infty} F(s) \cdot e^{st} \cdot ds$$

aunque en el caso habitual de que las transformadas sean funciones racionales, es preferible calcular la transformada inversa utilizando el desarrollo de dicha función en fracciones simples.

2. Transformada de Laplace de funciones típicas.

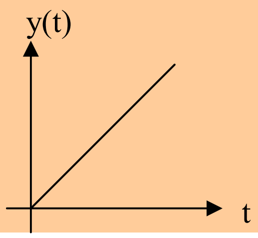
De la aplicación directa de la definición se obtienen las transformadas de Laplace de las siguientes funciones:

Transformada de Laplace del Escalón Unitario



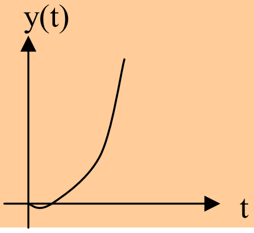
$$u(t) = \begin{cases} 0 & para \quad t < 0 \\ 1 & para \quad t > 0 \end{cases} \qquad U(s) = \frac{1}{s}$$

Transformada de Laplace de la Rampa de pendiente unitaria



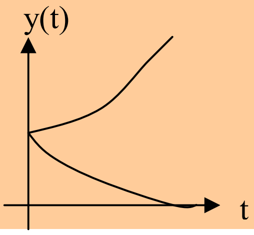
$$y(t) = \begin{cases} 0 & para \quad t \leq 0 \\ t & para \quad t > 0 \end{cases} \qquad Y(s) = \frac{1}{s^2}$$

Transformada de Laplace de la Parábola



$$y(t) = \begin{cases} 0 \quad para \quad t \leq 0 \\ t^n \quad para \quad t > 0 \end{cases} \qquad Y(s) = \frac{1}{s^{n+1}}$$

Transformada de la exponencial



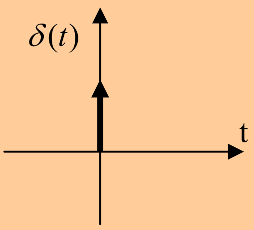
$$y(t) = \begin{cases} 0 \quad para \quad t \leq 0 \\ e^{\mp at} \quad para \quad t > 0 \end{cases} \qquad Y(s) = \frac{1}{s \pm a}$$

Transformada de las funciones senoidales

$$y(t) = \begin{cases} 0 \quad para \quad t \leq 0 \\ sen\omega \cdot t \quad para \quad t > 0 \end{cases} \qquad Y(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$y(t) = \begin{cases} 0 \quad para \quad t \leq 0 \\ \cos\omega \cdot t \quad para \quad t > 0 \end{cases} \qquad Y(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

Igualmente puede obtenerse, la transformada del Impulso de Dirac



$$\delta(t) = \begin{cases} 0 \quad para \quad t < 0 \\ 0\, para t > 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) = 1 \end{cases} \qquad \Delta(s) = 1$$

3. Propiedades de la Transformada de Laplace.

De la definición de transformada de Laplace se pueden deducir las siguientes propiedades:

3.1 Superposición o Linealidad

$$\boxed{L[\alpha \cdot f_1(t) + \beta \cdot f_2(t)] = \alpha \cdot F_1(s) + \beta \cdot F_2(s)}$$

3.2 Desplazamiento en el tiempo

$$L[f(t)] = F(s)$$
$$L[f(t-T)] = e^{-sT} \cdot F(s)$$

De esta propiedad se deduce que un sistema que retarda la señal de entrada en un tiempo T tiene por función de transferencia e^{-sT} .

3.3 Desplazamiento en la frecuencia

$$L[f(t)] = F(s)$$
$$F(s+a) = e^{-at} \cdot F(s)$$

3.4 Escalado en el tiempo

$$L[f(at)] = \frac{1}{|a|} \cdot F\left(\frac{s}{a}\right)$$

3.5 Multiplicación por el tiempo

$$L[f(t)] = F(s)$$
$$L[t \cdot f(t)] = -\frac{d}{ds} F(s)$$

3.6 Diferenciación

$$L[f(t)] = F(s)$$
$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = s \cdot F(s) - f(0^-)$$
$$L\left[\frac{d^m f(t)}{dt^m}\right] = s^m \cdot F(s) + \left[-s^{m-1} f(0^-) - s^{m-2} f^{(1)}(0^-) - \ldots - f^{(m-1)}(0^-)\right]$$

3.7 Integración

$$L[f(t)] = F(s)$$
$$L\left[\int_0^t f(\tau) \cdot d\tau\right] = \frac{1}{s} \cdot F(s)$$

3.8 Convolución

$$L[f_1(t)] = F_1(s) \qquad L[f_2(t)] = F_2(s)$$
$$F_1(s) \cdot F_2(s) = L[f_1(t) * f_2(t)]$$

donde

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau) \cdot d\tau = \int_0^t f_2(\tau) \cdot f_1(t-\tau) \cdot d\tau$$

3.9 Producto en el tiempo

$$L[f_1(t)] = F_1(s) \qquad L[f_2(t)] = F_2(s)$$
$$L[f_1(t) \cdot f_2(t)] = \frac{1}{2\pi j} \cdot F_1(s) * F_2(s)$$

3.10 Teorema del valor inicial

$$f(0) = \lim_{s \to \infty} s \cdot F(s)$$

3.11 Teorema del valor final.

$$f(\infty) = \lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} s \cdot F(s)$$
$$si \quad f(\infty) \quad existe\ y\ está\ a\cot ado.$$

4. Cálculo de la transformada inversa mediante desarrollo en fracciones simples.

En lugar de utilizar la expresión analítica para el cálculo de la transformada inversa de funciones racionales, es preferible utilizar las propiedades de la transformada de Laplace y las tablas de transformadas. El procedimiento más habitual consiste en descomponer en fracciones simples la función F(s), calcular las transformadas inversas de cada una de ellas utilizando la tabla de transformadas y sumar las expresiones analíticas de cada una de ellas para hallar la función f(t).

Al ser la función F(s) racional el tipo de fracciones simples que pueden aparecer en su desarrollo es limitado. A continuación se incluye la lista de las fracciones simples posibles y sus correspondientes transformadas inversas.

$$F(s) = \frac{K}{s} \qquad para \quad t > 0 \quad f(t) = K$$

$$F(s) = \frac{K}{s^n} \qquad para \quad t > 0 \quad f(t) = K \cdot t^{n-1}$$

$$F(s) = \frac{K}{s+a} \qquad para \quad t > 0 \quad f(t) = K \cdot e^{-at}$$

$$F(s) = \frac{K}{(s+a)^2} \qquad para \quad t > 0 \quad f(t) = K \cdot t \cdot e^{-at}$$

$$F(s) = \frac{K}{s^2 + a^2} \qquad para \quad t > 0 \quad f(t) = \frac{K}{a} \cdot sen\, at$$

$$F(s) = \frac{K \cdot s}{s^2 + a^2} \qquad para \quad t > 0 \quad f(t) = K \cdot \cos at$$

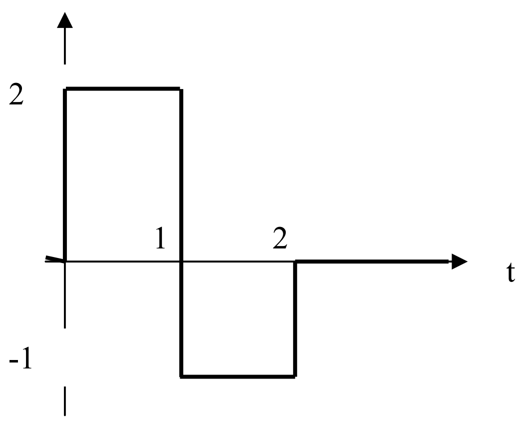
$$F(s) = \frac{K}{(s+a)^2 + b^2} \qquad para \quad t > 0 \quad f(t) = \frac{K}{b} e^{-at} \cdot sen\, bt$$

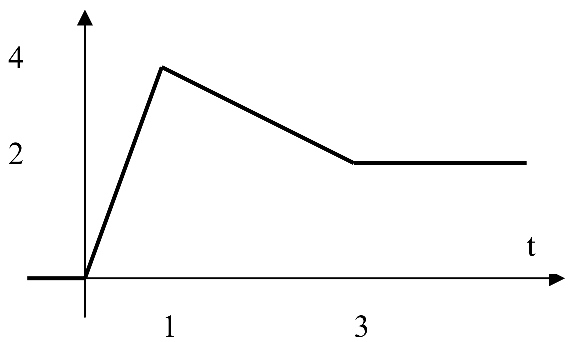
$$F(s) = \frac{K \cdot s}{(s+a)^2 + b^2} \qquad para \quad t > 0 \quad f(t) = K \cdot e^{-at} \cdot \cos bt - \frac{K \cdot a}{b} \cdot e^{-at} \cdot sen\, bt$$

Ejercicios.

PROBLEMA 1

Obtener las Transformadas de Laplace de las siguientes funciones:



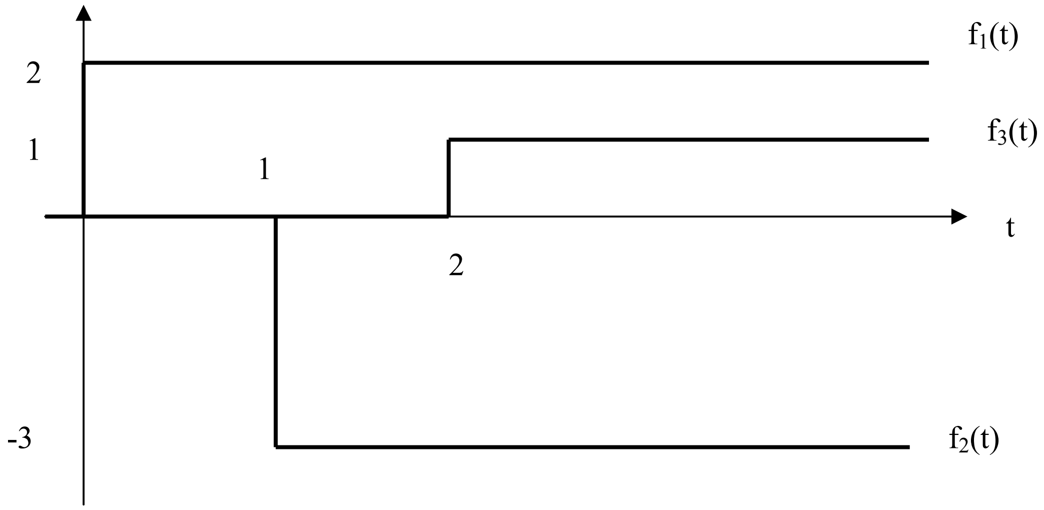


A. Aplicando la definición de la Transformada de Laplace de una función se obtiene para la primera de ellas:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t).e^{-st}.dt = \int_0^{1} 2.e^{-st}.dt + \int_1^{2} (-1).e^{-st}.dt + \int_2^{\infty} 0.e^{-st}.dt =$$

$$= \left[\frac{-2.e^{-st}}{s}\right]_0^1 + \left[\frac{1.e^{-st}}{s}\right]_1^2 = \frac{2}{s} - \frac{3.e^{-s}}{s} + \frac{1.e^{-2s}}{s} = F(s)$$

También se puede resolver el problema descomponiendo la función en suma de funciones de transformadas conocidas:

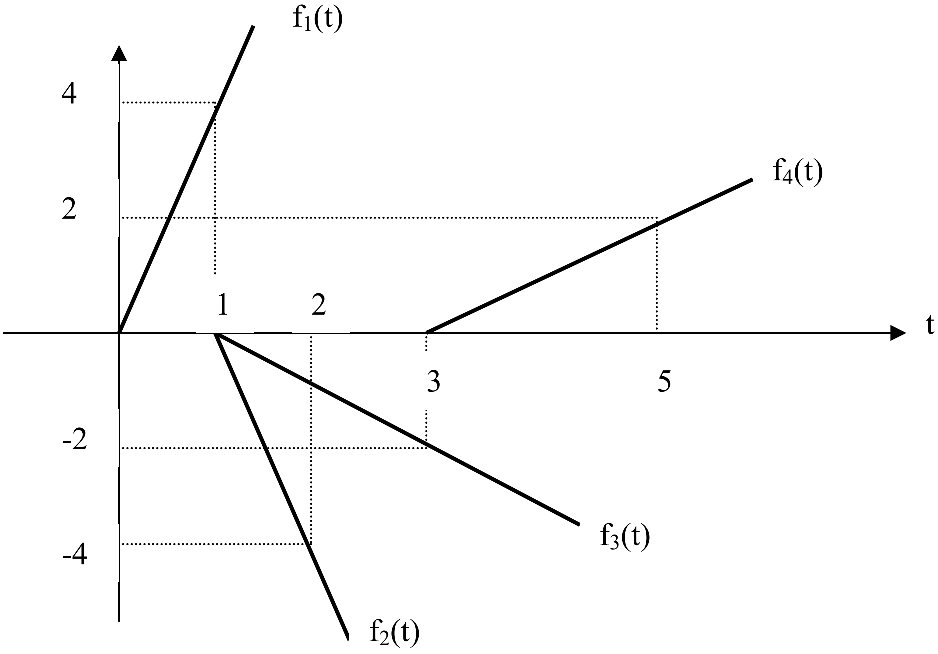


Puesto que $f(t) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t)$, aplicando la propiedad de linealidad se cumplirá que: $F(s) = F_1(s) + F_2(s) + F_3(s)$. Puesto que $f_2(t)$ y $f_3(t)$ son escalones trasladados en el tiempo uno y dos segundos respectivamente, y con amplitudes –3 y 1, sus transformadas de Laplace serán:

$F_1(s) = \frac{2}{s}$; $F_2(s) = -\frac{3.e^{-s}}{s}$; $F_3(s) = \frac{1.e^{-2s}}{s}$

Y por lo tanto $F(s) = \frac{2}{s} - \frac{3.e^{-s}}{s} + \frac{1.e^{-2s}}{s}$

B. En este caso la función puede descomponerse en suma de funciones rampa desplazadas en el tiempo:



Cuyas transformadas de Laplace son:

$F_1(s) = \frac{4}{s^2}$; $F_2(s) = \frac{-4.e^{-s}}{s^2}$; $F_3(s) = \frac{-1.e^{-s}}{s^2}$; $F_4(s) = \frac{1.e^{-3s}}{s^2}$

Aplicando la propiedad de linealidad se obtiene la transformada de la función f(t):

$$F(s) = \frac{4}{s^2} - \frac{5.e^{-s}}{s^2} + \frac{1.e^{-3s}}{s^2}$$

Como puede verse, la utilización de las propiedades de la Transformada de Laplace representa un método de resolución más rápido y seguro que la aplicación directa de la definición

PROBLEMA 2

Calcular las transformadas inversas de Laplace de las siguientes funciones:

a) $F(s) = \frac{(s+1)}{s.(s^2+2s+2)}$

b) $F(s) = \frac{(s+2)}{(s+1)^2}$

c) $F(s) = \frac{(s+1)}{s^2.(s+2).(s^2+2s+2)}$

El método que se va a utilizar consiste en descomponer la función en fracciones simples y hallar las transformadas inversas de cada una de dichas fracciones.

a) $F(s) = \frac{(s+1)}{s.(s^2+2s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+2.s+2}$

Identificando ambos numeradores:

$s + 1 = A.(s^2 + 2.s + 2) + s.(B.s + C)$

$$\begin{cases} 0 = A + B & B = -1/2 \\ 1 = 2.A + C & C = 0 \\ 1 = 2.A & A = 1/2 \end{cases}$$

$$F(s) = \frac{1/2}{s} - \frac{1/2.s}{s^2+2s+2}$$

Cálculo de las transformadas inversas

$L^{-1}\left[\frac{1/2}{s}\right] = u_0(t).1/2$ donde $u_0(t)$ es el escalón unitario

Para calcular la transformada inversa de una fracción con polos complejos, se realizarán las siguientes transformaciones:

$\frac{1/2.s}{s^2+2s++2} = \frac{1/2.s}{(s+1)^2+1^2}$ es decir se pone el denominador en forma de $(s+a)^2 + b^2$

A continuación se efectúa el cambio de variable S = s+1, es decir S = s+a, con lo que se obtiene:

$$\frac{1/2.S-1/2}{S^2+1}$$

De acuerdo con la propiedad de traslación de la transformada de Laplace:

$$L^{-1}\left[\frac{1/2.s}{(s+1)^2+1}\right] = e^{-t}.L^{-1}\left[\frac{1/2.S-1/2}{S^2+1}\right]$$

$$L^{-1}\left[\frac{1/2.S-1/2}{S^2+1}\right] = L^{-1}\left[\frac{1/2.S}{S^2+1}\right] - 1/2.\ L^{-1}\left[\frac{1}{S^2+1}\right] = \frac{1}{2}.\cos.t - \frac{1}{2}.\text{sen}.t$$

Por lo tanto:

$$L^{-1}\left[\frac{1/2.s}{(s+1)^2+1}\right] = \frac{1}{2}e^{-t}.\left[\cos.t - \text{sen}.t\right]$$

Y $f(t) = \frac{1}{2}(1 - e^{-t}.\left[\cos.t - \text{sen}.t\right])$ para $t > 0$

b) $F(s) = \frac{(s+2)}{(s+1)^2}$

Haciendo el cambio s+1 = S se obtiene:

$$F(S) = \frac{S+1}{S^2} = \frac{1}{S} + \frac{1}{S^2}$$

$L^{-1}\left[\frac{1}{S} + \frac{1}{S^2}\right] = 1 + t$ para $t > 0$

Por lo tanto

$L^{-1}[F(s)] = e^{-t}.(1 + t)$ para $t > 0$

c) $F(s) = \frac{(s+1)}{s^2.(s+2).(s^2+2s+2)}$

Descomponiendo en fracciones simples:

$$F(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+2} + \frac{Ds+E}{s^2+2s+2}$$

Identificando coeficientes se obtiene:

$$F(s) = \frac{-1/8}{s} + \frac{1/4}{s^2} + \frac{-1/8}{s+2} + \frac{1/4s}{s^2+2s+2}$$

Y teniendo en cuenta los resultados anteriores:

$f(t) = L^{-1}[F(s)] = -1/8 + 1/4t - 1/8.e^{-2t} + 1/4(\cos.t - \text{sen}.t).e^{-t}$ para $t>0$

Ejemplo 3

Dado el sistema definido por su modelo matemático (ejercicio …), calcular la respuesta del mismo cuando la señal de entrada varía bruscamente de a .

Incluir una exponencial en la transformada que se convierte en un retardo

5. Conclusiones

De la exposición anterior de las propiedades de la transformada de Laplace y de los ejemplos se pueden deducir las siguientes conclusiones de gran importancia en el tratamiento de los sistemas de control mediante su función de transferencia:

Ventajas en la representación de los sistemas:

5.1 Un sistema físico puede ser representado por su función de transferencia, es decir por un número finito de números reales o complejos, lo que siempre es preferible a representarlo mediante la ecuación diferencial

5.2 Como se verá en el capítulo de análisis, estos números tienen un sentido físico claro, lo que no siempre sucede con los coeficientes de la ecuación diferencial.

5.3 Los polos y los ceros de la función de transferencia pueden ser representados gráficamente sobre el plano complejo s, lo que permitirá, en la fase de análisis desarrollar métodos gráficos basados en dicha representación.

Ventajas en la resolución de la ecuación diferencial

5.4 Trabajar en el dominio s de Laplace supone enormes ventajas de cálculo puesto que se sustituye la integral de convolución, de difícil resolución, por un simple producto de funciones racionales y por el cálculo de la transformada inversa.

5.5 Del cálculo de la transformada inversa utilizando el desarrollo en fracciones simples, se deduce fácilmente, que la forma de la respuesta está caracterizada por el denominador de su transformada de Laplace, es decir por la señal de entrada y por los polos del sistema.

5.6 En particular polos con parte real negativa dan lugar a respuestas que tienden a cero, al aumentar el tiempo, y polos con parte real positiva dan lugar a respuestas que tienden a infinito al aumentar el tiempo.

5.7 De lo anterior se deduce con facilidad uno de los criterios para determinar la estabilidad de un sistema: todos sus polos deben estar en el semiplano negativo.

5.8 La aplicación del teorema del valor final permite conocer dicho valor en el caso de sistemas estables, sin necesidad de calcular la transformada inversa.

5.9 Por lo tanto desde el dominio de Laplace es posible conocer la estabilidad y el comportamiento en régimen permanente de los sistemas. El comportamiento transitorio puede también deducirse fácilmente de los polos y ceros del sistema. Por ello no será necesario realizar la transformación inversa para analizar un sistema dinámico.