H2 LINEALIZACION

La linealización es un procedimiento que permite aproximar un modelo no lineal, por otro que si lo es y que cumple por lo tanto las propiedades de los sistemas lineales, en particular el principio de superposición.

Como se verá esta aproximación no tiene validez universal sino únicamente en el entorno del punto de funcionamiento elegido, por lo que su aplicación está indicada para aquellos sistemas cuyas señales sufren pequeñas variaciones alrededor de sus valores de equilibrio.

Dada la función de una sola variable

$$y = f(x)$$

y un punto de funcionamiento definido por $y_0 = f(x_0)$,

al desarrollar en serie de Taylor la función alrededor de dicho punto se obtiene:

$$y = f(x_0) + \left[\frac{df}{dx}\right]_0 (x - x_0) + \left[\frac{d^2 f}{dx^2}\right]_0 (x - x_0)^2 + ... + \left[\frac{d^n f}{dx^n}\right]_0 (x - x_0)^n$$

y al tomar los dos primeros términos del desarrollo

$$y \approx f(x_0) + \left[\frac{df}{dx}\right]_0 (x - x_0)$$

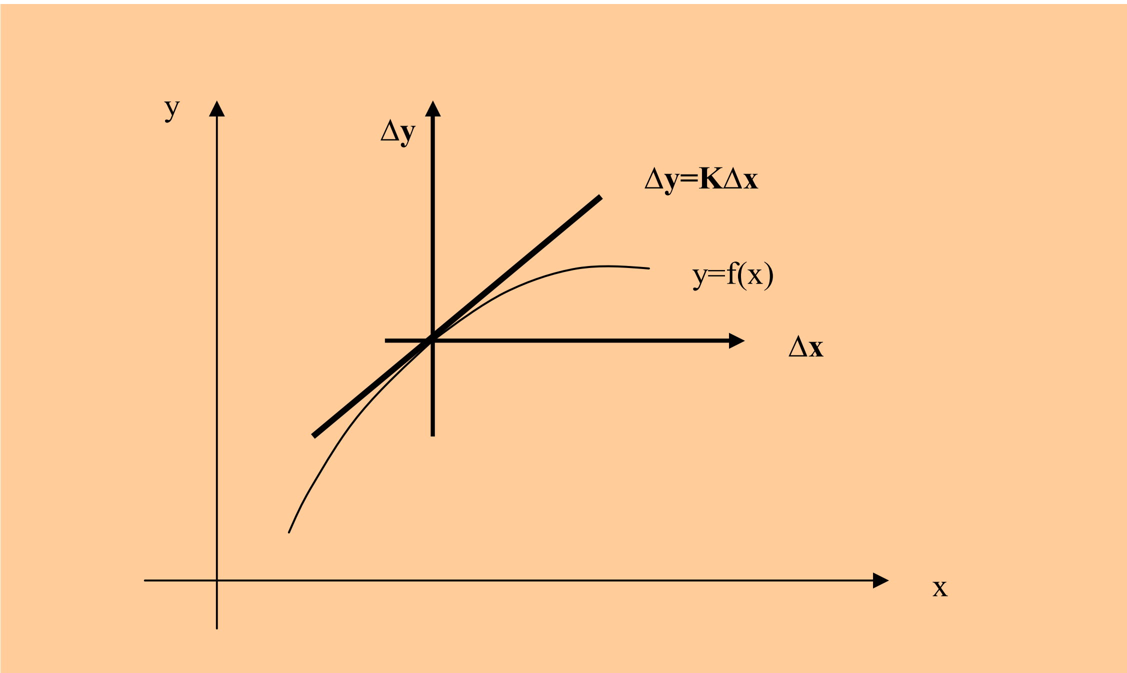
que, dado que se cumple la ecuación del equilibrio $y_0 = f(x_0)$, se transforma en:

$$y - y_0 \approx \left[\frac{df}{dx}\right]_0 (x - x_0)$$, es decir

$$\Delta y \approx K \Delta x$$

donde K es la derivada de la función con respecto a la variable particularizada para el punto de funcionamiento elegido.

En la figura se ve la interpretación gráfica de la linealización que consiste en llevar los ejes al punto de funcionamiento, sustituir la función y la variable por sus incrementos respecto a dicho punto, y sustituir la función por su tangente en dicho punto.



De esta gráfica se deducen fácilmente las consecuencias más importantes del proceso de linealización:

- El valor de la constante (la derivada) depende del punto de funcionamiento elegido, y, por lo tanto el modelo linealizado depende también de dicho punto.
- La aproximación entre la curva original y la recta es tanto más exacta cuanto más cerca estemos del punto elegido, o, lo que es lo mismo, la linealización es válida en un entorno del punto de funcionamiento
- Una vez linealizado el modelo, las variables originales se sustituyen por las variables incrementales respecto del punto de funcionamiento elegido.

Caso general:

En el que caso de que la función a linealizar dependa de n variables, bastará para desarrollar en serie sustituir las derivadas por las derivadas parciales con respecto a cada una de las variables.

Dada $y = f(x_1, x_2, ...x_n)$, que cumple $y_0 = f(x_{10}, x_{20}, ..., x_{30})$

Desarrollando en serie y eliminando los términos de segundo orden, se obtiene:

$$y \approx f(x_{10}, x_{20}, ...x_{n0}) + \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}\right]_0 (x_1 - x_{10}) + \left[\frac{\partial f}{\partial x_2}\right](x_2 - x_{20}) + ... + \left[\frac{\partial f}{\partial x_n}\right](x_n - x_{n0})$$

es decir

$$\Delta y \approx K_1 \Delta x_1 + K_2 \Delta x_n + ... + K_n \Delta x_n$$

que es la ecuación de un hiperplano que pasa por el origen.

EJERCICIO H2-1

Linealizar cada uno de las siguientes ecuaciones:

a) $y'^2 + 5.y.y' + y = u'.\cos u + u^2$

b) $y' + 5.y = 3.u' + u + 1$

en torno al punto de funcionamiento definido por $u_0 = \pi/4$.

La linealización de una ecuación diferencial no lineal, consiste en desarrollar en serie de Taylor cada uno de sus términos alrededor del punto de funcionamiento, y tomar únicamente los términos lineales de dicho desarrollo. Para ello es imprescindible conocer el valor que toman todas las variables en dicho punto de funcionamiento.

1. Cálculo del punto de funcionamiento.

En el punto de funcionamiento, también llamado de equilibrio, las variables que definen el comportamiento del sistema no sufren variaciones por lo que sus derivadas se anulan. Por lo tanto las ecuaciones en el punto de funcionamiento quedan reducidas a:

a) $y_0 = u_0^2$ con $y_0' = 0$; $u_0' = 0$; $u_0 = \pi/4$

b) $5.y_0 = u_0 + 1$ con $y_0' = 0$; $u_0' = 0$; $u_0 = \pi/4$

es decir

a) $y_0 = \pi^2/16$; $y_0' = 0$; $u_0' = 0$; $u_0 = \pi/4$

b) $y_0 = (\pi/4 + 1)/5$; $y_0' = 0$; $u_0' = 0$; $u_0 = \pi/4$

Una vez conocido el valor de todas las variables en el punto de funcionamiento, se puede desarrollar en serie de Taylor cada una de las ecuaciones.

2. Desarrollo en serie de Taylor

Desarrollando cada término de cada una de las ecuaciones y reteniendo únicamente los términos lineales del desarrollo, se obtiene:

a) $y'_0 + [2y']_0.(y'-y'_0) + 5.y_0 y'_0 + [5y']_0.(y-y_0) + [5y]_0(y'-y'_0) + y_0 + [1]_0.(y-y_0) =$
$u'_0 \cos u_0 + [\cos u]_0.(u'-u'_0) - [u' \operatorname{sen} u]_0.(u-u_0) + u_0^2 + [2u]_0.(u-u_0)$

b) $y'_0 + [1]_0.(y'-y'_0) + 5y_0 + [5]_0.(y-y_0) = [3u'_0] + [3]_0.(u'-u'_0) + u_0 + [1]_0.(u-u_0) + 1$

Teniendo en cuenta las ecuaciones del punto de funcionamiento, todos los términos independientes se anulan entre sí. Además haciendo los cambios de variables:

$y'-y'_0 = \Delta y'$

$y - y_0 = \Delta y$

$u'-u'_0 = \Delta u'$

$u - u_0 = \Delta u$

se obtienen las ecuaciones:

a) $2y'_0\,\Delta y' + 5y'_0\,\Delta y + 5y_0\Delta y' + \Delta y = \cos u_0.\Delta u' - u'_0.\operatorname{sen} u_0.\Delta u + 2u_0\Delta u$

b) $\Delta y' + 5\Delta y = 3\Delta u' + \Delta u$

que ya son lineales.

Sustituyendo valores se obtiene:

a) $\dfrac{5\pi^3}{16}\Delta y' + \Delta y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\Delta u' + \dfrac{\pi}{2}\Delta u$

b) $\Delta y' + 5\Delta y = 3\Delta u' + \Delta u$

que son las ecuaciones linealizadas alrededor del punto de funcionamiento definido por $u_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

EJERCICIO H2-2

Las siguientes ecuaciones constituyen el modelo de un sistema con entradas x(t), p(t) y salida y(t):

$$\frac{dy(t)}{dt} = m(t) - p(t)$$

$$m(t) + 3.\frac{dm(t)}{dt} = 4.sen(x(t)-c(t))$$

$$c(t) = \sqrt{y(t)}$$

Linealizar dicho modelo en torno al punto de funcionamiento definido por $x_0=1$, $p_0=2$.

De las tres ecuaciones que forman el modelo, sólo las dos últimas presentan no linealidades. Sin embargo el proceso a seguir es idéntico para las tres ecuaciones.

1. Cálculo del punto de equilibrio

Teniendo en cuenta que en dicho punto las derivadas se anulan, las ecuaciones de equilibrio serán:

$0 = m_0 - p_0$

$m_0 = 4.\operatorname{sen}(x_0 - c_0)$

$c_0 = \sqrt{y_0}$

junto con $x_0 = 1$ y $p_0 = 2$
Resolviendo este sistema se obtiene

$$m_0 = 2$$

$$\operatorname{sen}(x_0 - c_0) = \frac{1}{2} \Rightarrow x_0 - c_0 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x_0 - c_0 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

De entre todas las soluciones posibles para c_0 habrá que tomar la que tenga más sentido físico. En este caso se supondrá $c_0 = 1 - \frac{\pi}{6}$

$$y_0 = c_o^2 = (1 - \frac{\pi}{6})^2$$

2. Linealización

Una vez obtenidos los valores de todas las variables en el punto de equilibrio se puede proceder a linealizar el modelo. Desarrollando en serie de Taylor alrededor del punto de equilibrio y despreciando los términos no lineales se obtiene:

$$\frac{d\Delta y}{dt} = \Delta m - \Delta p$$

$$\Delta m + \frac{3d\Delta m}{dt} = 4\cos(x_0 - c_0)\Delta x - 4\cos(x_0 - c_0)\Delta c$$

$$\Delta c = \frac{1}{2\sqrt{y_0}}\Delta y$$

Como puede observarse, en el caso de la primera ecuación que ya era lineal, el proceso de linealización se reduce a un cambio de variables, sustituyendo las originales por sus incrementos respecto de los valores de equilibrio.
Sustituyendo valores el modelo linealizado queda:

$$\frac{d\Delta y}{dt} = \Delta m - \Delta p$$

$$\Delta m + \frac{3d\Delta m}{dt} = 2\sqrt{3}\Delta x - 2\sqrt{3}\Delta c$$

$$\Delta c = \frac{1}{2.(1 - \pi/6)}\Delta y$$

EJERCICIO H2-3

Dado el sistema
$y' + x.y + y = x^2 + 2$
obtener el modelo lineal correspondiente al punto de funcionamiento definido por $x_0=3$.
Si la entrada x(t) pasa bruscamente de valer 3 a valer a) 3,2 b) 5
comparar los valores finales obtenidos con el modelo linealizado, con los que se deducen del sistema original, comentando las diferencias.

Para el cálculo del modelo lineal es necesario conocer el valor de todas las variables en el punto de equilibrio. En el equilibrio se cumple:

$$x_0 y_0 + y_0 = x_0^2 + 2$$

$$y_0 = \frac{x_0^2 + 2}{x_0 + 1} \qquad \text{si } x_0 = 3 \qquad y_0 = \frac{9+2}{3+1} = \frac{11}{4}$$

Por lo tanto el modelo linealizado alrededor de dicho punto será:

$$\Delta y' + x_0 \Delta y + y_0 \Delta x + \Delta y = 2 x_0 \Delta x$$

es decir

$$\Delta y' + 4\Delta y + \frac{11}{4}\Delta x = 6\Delta x$$

Las variaciones indicadas para x(t) suponen para Δx(t) la siguiente evolución:

a) Δx(t) varía de 0 a 0,2 unidades
b) Δx(t) varía de 0 a 2 unidades

Los valores finales correspondientes al modelo linealizado se deducen calculando los nuevos valores de las variables en el nuevo punto de equilibrio, para lo cual se anulan las derivadas del modelo linealizado y se sustituye Δx(t) por sus nuevos valores.

a) $4\Delta y_0 + \frac{11}{4} \cdot 0{,}2 = 1{,}2 \Rightarrow \Delta y_0 = 0{,}28625 \Rightarrow y_0 = \frac{11}{4} + 0{,}28625 = 3{,}03625$

b) $4\Delta y_0 + \frac{11}{4} \cdot 2 = 12 \Rightarrow \Delta y_0 = 6{,}5 \Rightarrow y_0 = \frac{11}{4}$+6,5=9,25

Los valores finales del sistema no lineal se deducen calculando los nuevos valores de equilibrio para u_0=3,2 y para u_0=5

$$y_0 = \frac{x_0^2 + 2}{x_0 + 1}$$

a) y_0= 2,9143
b) y_0 = 4,5

La diferencia entre los valores finales del sistema original y del linealizado es mayor en el segundo caso que en el primero: Esto es debido a que la señal de entrada u(t) está sometida a una mayor variación respecto del punto de funcionamiento en este segundo caso y a que el modelo linealizado solo es preciso en un entorno de dicho punto de funcionamiento.

Por lo tanto cuanto mayor es la variación de la señal de entrada alrededor del punto de funcionamiento, tanto menor es la precisión del modelo linealizado.

EJERCICIO H2-4

Dado el sistema

$$\frac{dy(t)}{dt} + u(t).y(t) = u^2(t) + 5$$

se pide linealizarlo en torno a los puntos de funcionamiento *a) u_0=10*
b) u_0=2

Dibujar con detalle la señal y(t) cuando u(t) varía bruscamente

a) de 10 a 11 unidades
b) de 2 a 3 unidades

¿En cual de los puntos de funcionamiento se aproxima mejor el sistema linealizado al real?

- Cálculo del punto de equilibrio

En el equilibrio la ecuación que caracteriza al sistema es

$u_0 y_0 = u_0^2 + 5$ es decir $y_0 = \dfrac{u_0^2 + 5}{u_0}$

a) $y_0 = 10{,}5$ $u_0 = 10$

b) $y_0 = 4{,}5$ $u_0 = 2$

- Linealización

$$\frac{d\Delta y(t)}{dt} + u_0 \Delta y(t) + y_0 \Delta u(t) = 2u_0 \Delta u(t)$$

a) $\dfrac{d\Delta y(t)}{dt} + 10\Delta y(t) + 10{,}5\Delta u(t) = 20\Delta u(t) \Rightarrow \dfrac{d\Delta y(t)}{dt} + 10\Delta y(t) = 9{,}5\Delta u(t)$

b) $\dfrac{d\Delta y(t)}{dt} + 2\Delta y(t) + 4{,}5\Delta u(t) = 4\Delta u(t) \Rightarrow \dfrac{d\Delta y(t)}{dt} + 2\Delta y(t) = -0{,}5\Delta u(t)$

En ambos casos $\Delta u = 1$ por lo que los nuevos valores del equilibrio serán

a) $\Delta y_0 = 0{,}95 \cdot 1 = 0{,}95 \Rightarrow y_0 = 10{,}5 + 0{,}95 = 11{,}45$

b) $\Delta y_0 = \dfrac{-0{,}5}{2} = -0{,}25 \Rightarrow y_0 = 4{,}5 - 0{,}25 = 4{,}25$

Para comparar el comportamiento de los sistemas linealizados y el del sistema real, vamos a comparar estos valores finales con los correspondientes al sistema real.

Calculando, en la ecuación no lineal, el valor de y(t) en el equilibrio cuando u_0=11 y cuando u_0 =3, obtenemos los valores finales del sistema real

$$y_0 = \frac{u_0^2 + 5}{u_0}$$

a) u_0 =11 $y_0 = 11{,}4545$

b) u_0= 3 $y_0 = 4{,}6667$

Estos valores muestran que el modelo linealizado se aproxima más al modelo no lineal en el primer punto de funcionamiento. donde la curva y su tangente se aproximan más. La explicación se encuentra en la forma de la curva: Como se ve en la figura la curva y su tangente se aproximan más en el primer punto que en el segundo.