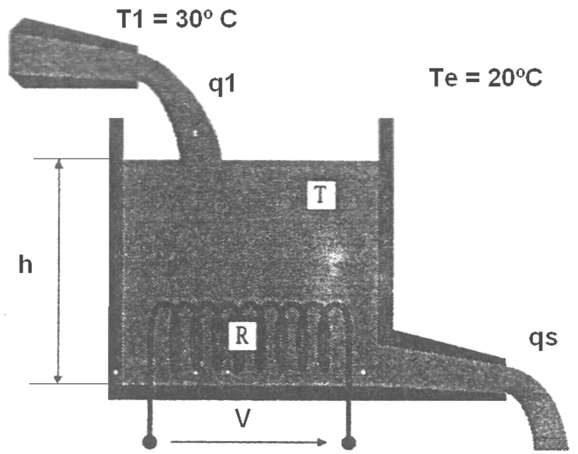
Sea un depósito de base cuadrada con lados de 0,5 m de longitud interior. Dicho depósito se alimenta con una cantidad q_1 de un líquido a temperatura constante de T_1=30ºC y tiene una salida inferior, por la que fluye un caudal q_S a la temperatura T que se supondrá homogénea para todo el líquido del depósito.



El depósito tiene un calentador de tipo resistivo ($W=V^2/R$), y presenta unas pérdidas caloríficas que se supondrán proporcionales a la diferencia de temperatura $T-T_e$ y a la superficie lateral. La base está suficientemente aislada y se suponen despreciables las pérdidas por la superficie del líquido.

La temperatura exterior T_e, se supone constante e igual a 20º C y la resistencia del calentador R es de 0,24 Ω. El líquido tiene una densidad ρ de 1 gr/cm^3 y un calor específico c_e de 1 cal/gr·ºC. La constante de transición de calor de las paredes del depósito K es de $6{,}25 \cdot 10^{-3}$ cal/s·cm^2 ·ºC, y la equivalencia del julio a calorías es de 1 julio = 0,24 calorías.

El sistema está en equilibrio para:

v = 100 Voltios $\quad$ q_1= 0,5 l/s $\quad$ h= 0,8 m

Obtener:

1º) Valor de T en el punto de equilibrio.
2º) Diagrama de bloques.
3º) Función de transferencia $T(s)/Q_1(s)$ y $T(s)/V(s)$ válidas para el punto de funcionamiento indicado.

Las ecuaciones del sistema son, con S_B (superficie de la base) y S_L (superficie lateral):

Ecuación de continuidad del caudal:

$$S_B \frac{dh(t)}{dt} = q_1(t) - q_s(t)$$

Ecuación de continuidad de la presión (Bernouilli):

$$q_S(t) = K_1 \sqrt{h(t)}$$

Ecuación de la conservación de la energía:

$$q_1(t) \cdot \rho \cdot c_e \cdot T_1 + \frac{v^2(t)}{R} =$$

$$= q_S(t) \cdot \rho \cdot c_e \cdot T(t) + K \cdot (T(t) - T_e) \cdot S_L(t) + \rho \cdot c_e \cdot S_B \cdot h(t) \cdot \frac{dT(t)}{dt} + \rho \cdot c_e \cdot S_B \cdot T(t) \cdot \frac{dh(t)}{dt}$$

siendo en el primer miembro: el primer sumando, la aportación de energía en el líquido de entrada y el segundo sumando, la aportación de energía del calentador

En el segundo miembro: el primer sumando, la energía perdida por el líquido de salida; el segundo sumando, la energía perdida por las paredes del depósito;
el tercer sumando, la energía absorbida por el líquido al aumentar la temperatura; el cuarto sumando, la energía absorbida por el líquido al aumentar el volumen.

En primer lugar se pasarán todas las constantes al sistema internacional:

$$L = 0.5\,\text{m}, \quad \text{es decir:} \quad \begin{cases} S_B = 0.5^2 = 0.25\,m^2 \quad \text{(superficie de la base)} \\ S_L = 4 \cdot 0.5 \cdot h(t) = 2h(t)\ \text{m}^2 \quad \text{(superficie lateral)} \end{cases}$$

$$T_1 = 30°C$$
$$T_e = 20°C$$
$$R = 0.24\,\Omega$$

$$\rho = 1\ \text{gr/cm}^3 = \frac{10^{-3}\,\text{kg}}{10^{-6}\,\text{m}^3} = 10^3\,\text{kg/m}^3$$

$$c_e = 1\,\text{cal/gr}\cdot°C = \frac{1}{0.24 \cdot 10^{-3}}\,\frac{\text{Julios}}{\text{kg}\cdot°C}$$

$$K = 6.25 \cdot 10^{-3}\,\frac{\text{cal}}{\text{s}\cdot\text{cm}^2\cdot°C} = \frac{6.25 \cdot 10^{-3}}{0.24 \cdot 10^{-4}}\,\frac{\text{Julios}}{\text{s}\cdot\text{m}^2\cdot°C}$$

A partir de las tres ecuaciones que modelan el comportamiento del sistema, se calcula el punto de equilibrio:

$$v_0 = 100\,\text{Voltios}$$
$$q_{10} = 0.5 \cdot 10^{-3}\,\text{m}^3/\text{s}$$
$$h_0 = 0.8\,\text{m}$$
$$q_{S0} = q_{10} = 0.5 \cdot 10^{-3}\,\text{m}^3/\text{s}$$
$$K_1 = \frac{q_{S0}}{\sqrt{h_0}} = \frac{0.5 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{0.8}} = 0.56 \cdot 10^{-3}$$

$$q_{10}\rho c_e T_1 + \frac{v_0^2}{R} = q_{S0}\rho c_e T_0 + K(T_0 - T_e)2h_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{0.5 \cdot 10^{-3} \cdot 10^3}{0.24 \cdot 10^{-3}}30 + \frac{100^2}{0.24} = \frac{0.5 \cdot 10^{-3} \cdot 10^3}{0.24 \cdot 10^{-3}}T_0 + \frac{6.25 \cdot 10^{-3}}{0.24 \cdot 10^{-4}}(T_0 - 20)2 \cdot 0.8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_0 = 45°C$$

Se linealizan las ecuaciones del sistema en torno al punto de equilibrio anterior:

$$0.25\,\dot{h} = q_1 - q_s$$

$$q_s = \frac{0.56 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot \sqrt{0.8}}\,h = 3.13 \cdot 10^{-4}\,h$$

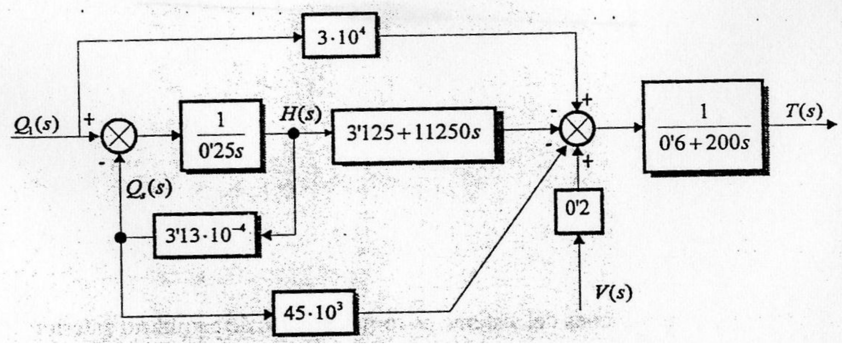
$$\frac{10^3}{0.24 \cdot 10^{-3}}\,30\,q_1 + \frac{2 \cdot 100}{0.24}\,v = \frac{10^3}{0.24 \cdot 10^{-3}}\,[\,45 q_s + 0.5 \cdot 10^{-3}\,T\,] + \frac{6.25 \cdot 10^{-3}}{0.24 \cdot 10^{-4}}\,2\,[\,45\,h + 0.8\,T - 20\,h\,] + \frac{10^3}{0.24 \cdot 10^{-3}}\,0.25 \cdot 0.8\frac{dT}{dt} + \frac{10^3}{0.24 \cdot 10^{-3}}\,0.25\,45\,\frac{dh}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 30 \cdot 10^3\,q_1 + 200 \cdot 10^{-3}\,v = 45 \cdot 10^3\,q_s + 0.5\,T + 3.125\,h + 0.1\,T + 200\,\dot{T} + 11250\dot{h}$$

Transformando por Laplace:

$$\begin{cases} 3 \cdot 10^4 Q_1(s) + 0.2\,V(s) = 45 \cdot 10^3 Q_s(s) + (0.6 + 200s)T(s) + (3.125 + 11250s)H(s) \\ 0.25\,s H(s) = Q_1(s) - Q_s(s) \\ Q_s(s) = 3.13 \cdot 10^{-4} H(s) \end{cases}$$

Con lo que el diagrama de bloques queda:



$$\frac{T(s)}{Q_1(s)} = -\frac{15 \cdot 10^3 s + 31.28}{(0.6 + 200s)\,(s + 12.52 \cdot 10^{-4})}$$

$$\frac{T(s)}{V(s)} = \frac{1}{3 + 10^3 s}$$