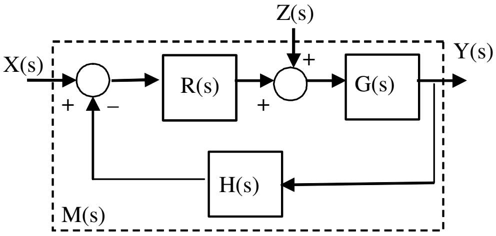
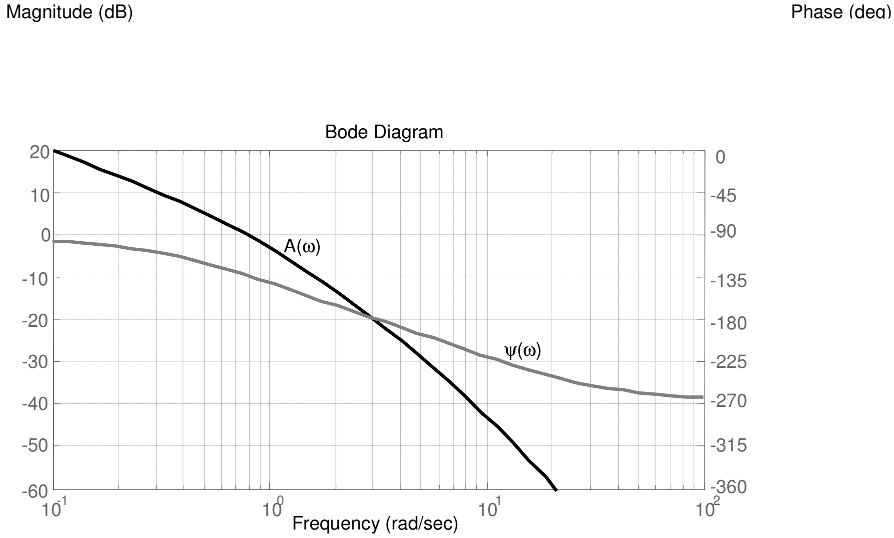
PROBLEMA:

Dado el sistema de la figura y el diagrama de bode de R(s)·G(s)·H(s) para K_R=1:

$$R(s)=\frac{K_R}{s} \quad G(s)=\frac{1}{s+1} \quad H(s)=\frac{10}{s+10}$$





a) Determinar los valores de K_R que hacen estable al sistema en bucle cerrado, M(s).
b) Determinar los error de posición en régimen permanente del sistema si K_R=1.
c) Describir el comportamiento de la respuesta del sistema y(t) cuando la entrada z(t) cambia bruscamente de valor (se produce un escalón en z(t)).
d) Determinar los márgenes de estabilidad del sistema si K_R=1.
e) ¿Qué valor debe tener K_R para que el margen de ganancia sea de 40 dB?

SOLUCIÓN:

a) La función de transferencia en bucle cerrado es: $M(s)=\dfrac{K_R\cdot(s+10)}{s\cdot(s+1)\cdot(s+10)+10\cdot K_R}$

Si se aplica el criterio de Routh al denominador de M(s): $s^3+11\cdot s^2+10\cdot s+10\cdot K_R=0$

1) Todos los coeficientes del polinomio tienen que ser mayores que cero: $10K_R>0 \Rightarrow \underline{K_R>0}$

2) Se construye la tabla:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 10 \\ s^2 & 11 & 10\cdot K_R \\ s^1 & \dfrac{110-10\cdot K_R}{11} & \\ s^0 & 10\cdot K_R & \end{array}$$

Los coeficientes de la primera columna han de ser positivos ya que no puede haber cambios de signo en la primera columna:

$110-10\cdot K_R>0 \Rightarrow \underline{K_R<11}$

$10\cdot K_R>0 \Rightarrow \underline{K_R>0}$

Por lo tanto el sistema en bucle cerrado es estable si: $\boxed{0<K_R<11}$

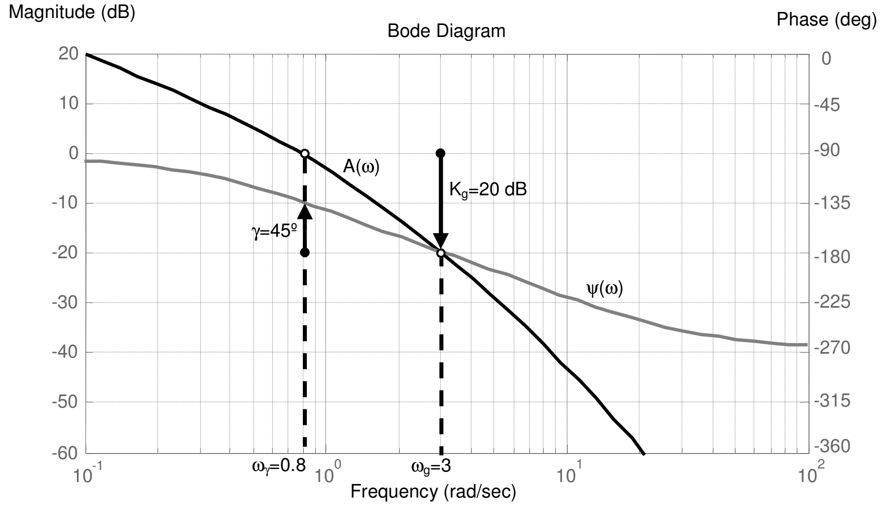
También se puede deducir que el valor máximo que puede tener K_R es aproximadamente 10 a partir del margen de ganancia que tiene el sistema y que se calcula más adelante. Este resulta ser K_g=20 dB => K_g=10 cuando K_R=1, por lo tanto K_R se podría multiplicar hasta por 10 antes de que el sistema se volviese inestable. La diferencia entre K_R<10 o K_R<11 está en la imprecisión de los datos que se obtienen de un gráfico como es el de Bode.

b) Para calcular el error en régimen permanente, se determina primero cual es el tipo del sistema. Para ello se observa cuantos polos en el origen tiene la función de transferencia de la cadena directa R(s)·G(s). En este caso el sistema es de Tipo 1, por lo tanto: $e_P = 0$

c) Al existir un polo en el origen en la función de transferencia R(s) antes de la entrada de perturbación z(t), un escalón en esta variable provocará variaciones transitorias en la salida y(t), pero volverá al valor que tenía antes del instante de producirse el escalón. Se puede comprobar calculando y(∞) cuando z(t)=u_0(t):

$$y(\infty)=\lim_{t\to\infty} y(t)=\lim_{s\to 0} s\cdot Y(s)=\lim_{s\to 0} s\cdot Z(s)\cdot\frac{Y(s)}{Z(s)}=\lim_{s\to 0} s\cdot\frac{1}{s}\cdot\frac{s\cdot(s+10)}{s\cdot(s+1)\cdot(s+10)+10\cdot K_R}=0$$

d) Acudiendo al diagrama de bode de $R(s)\cdot G(s)\cdot H(s)$ para $K_R = 1$, los márgenes del sistema en bucle cerrado, M(s), serán:



Ambos márgenes son positivos, por lo que se confirma que el sistema en bucle cerrado es estable para $K_R = 1$.

e) Para que el margen de ganancia aumente hasta 40 dB, la curva A(ω) debe "bajar" 20 dB, es decir la ganancia de $R(s)\cdot G(s)\cdot H(s)$ se tiene que dividir por 10, por lo que $K_R = 1/10 = 0.1$