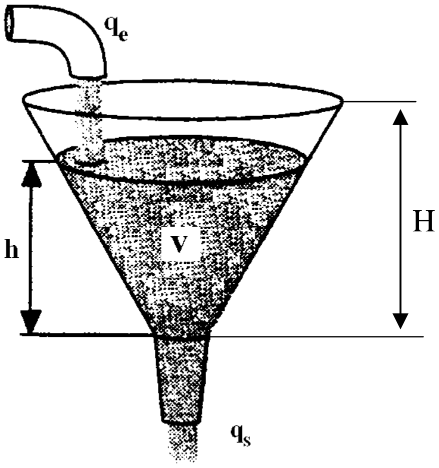
PROBLEMA:
Se dispone de un depósito cónico como el de la figura, en el que el volumen v(t) de líquido contenido es proporcional, con constante K, al cubo de la altura h(t) del líquido en el depósito. El depósito se llena con un caudal $q_e(t)$ y se vacía con otro caudal $q_s(t)$. Se pide:



a) Linealizar las ecuaciones entorno al punto de equilibrio $q_{e0}=1$. Dibujar el diagrama de bloques considerando $q_e(t)$ como entrada y q_s como salida. Obtener la función de transferencia entre $q_s(t)$ y $q_e(t)$ (dejar resultados en función de B).
b) Calcular el valor final de $q_s(t)$ si $q_e(t)$ se incrementa en una unidad de manera brusca.
c) Con el mismo incremento en $q_e(t)$ ¿Cuál debe de ser el valor de la altura H para que el líquido llene completamente el depósito sin rebosar?

Como ecuaciones simplificadas se tomarán las siguientes:

Del enunciado se deduce que el volumen será: $v(t) = K \cdot h^3(t)$

La diferencia entre el caudal que entra y el que sale pasa a incrementar el volumen de líquido en el depósito es:

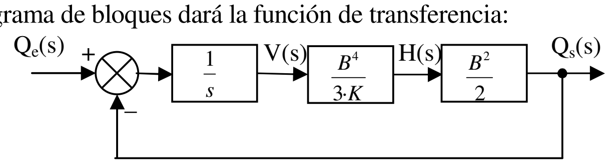
$$q_e(t) - q_s(t) = \frac{dv(t)}{dt}$$

El caudal de salida puede expresarse como: $q_s(t) = B \cdot \sqrt{h(t)}$ donde B es una constante que depende de g, del área del orificio de salida y del coeficiente de contracción de vena.

SOLUCIÓN:
a) Es preciso linealizar las dos ecuaciones no lineales del sistema y determinar h_0 para el punto de funcionamiento dado. Finalmente, se sustituye el valor de h_0 y se pasa a transformadas de Laplace:

$$\begin{cases} \Delta v(t) = K \cdot 3 \cdot h_0^2 \cdot \Delta h(t) \\ \Delta q_e(t) - \Delta q_s(t) = \dfrac{d\Delta v(t)}{dt} \\ \Delta q_s(t) = B \cdot \dfrac{1}{2 \cdot \sqrt{h_0}} \cdot \Delta h(t) \end{cases} \qquad \begin{aligned} & q_{s0} = q_{e0} = 1 \\ & h_0 = \frac{q_{s0}^2}{B^2} = \frac{1}{B^2} \\ & v_0 = K \cdot h_0^3 = \frac{K}{B^6} \end{aligned} \qquad \begin{cases} V(s) = \dfrac{3 \cdot K}{B^4} \cdot H(s) \\ Q_e(s) - Q_s(s) = s \cdot V(s) \\ Q_s(s) = \dfrac{B^2}{2} \cdot H(s) \end{cases}$$

El diagrama de bloques dará la función de transferencia:



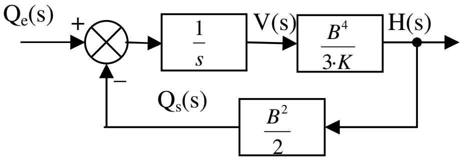
$$M(s) = \frac{Q_s(s)}{Q_e(s)} = \frac{\dfrac{B^6}{6 \cdot K \cdot s}}{1 + \dfrac{B^6}{6 \cdot K \cdot s}} = \frac{\dfrac{B^6}{6 \cdot K}}{s + \dfrac{B^6}{6 \cdot K}}$$

b) Se puede aplicar el teorema del valor final, teniendo en cuenta que el sistema es estable y que $q_e(t)$ es un escalón unitario:

$$\Delta q_s(\infty) = \lim_{t \to \infty} \Delta q_s(t) = \lim_{s \to 0} s \cdot Q_s(s) = \lim_{s \to 0} s \cdot Q_e(s) \cdot M(s) = \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{\dfrac{B^6}{6 \cdot K}}{s + \dfrac{B^6}{6 \cdot K}} = 1$$

Por lo tanto: $q_s(\infty) = q_{s0} + \Delta q_s(\infty) = 1 + 1 = 2$

c) En este caso habrá que buscar la función de transferencia $H(s)/Q_e(s)$:



$$M_H(s) = \frac{H(s)}{Q_e(s)} = \frac{\dfrac{B^4}{3 \cdot K \cdot s}}{1 + \dfrac{B^6}{6 \cdot K \cdot s}} = \frac{\dfrac{B^4}{3 \cdot K}}{s + \dfrac{B^6}{6 \cdot K}}$$

De nuevo, se puede aplicar el teorema del valor final, teniendo en cuenta que el sistema es estable y que $q_e(t)$ es un escalón unitario:

$$\Delta h(\infty) = \lim_{t \to \infty} \Delta h(t) = \lim_{s \to 0} s \cdot H(s) = \lim_{s \to 0} s \cdot Q_e(s) \cdot M_H(s) = \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{\dfrac{B^4}{3 \cdot K}}{s + \dfrac{B^6}{6 \cdot K}} = \frac{2}{B^2}$$

Por lo tanto: $h(\infty) = h_0 + \Delta h(\infty) = \dfrac{1}{B^2} + \dfrac{2}{B^2} = \dfrac{3}{B^2}$. Para que el deposito no rebose su altura total deberá ser $\mathbf{H=3/B^2}$.