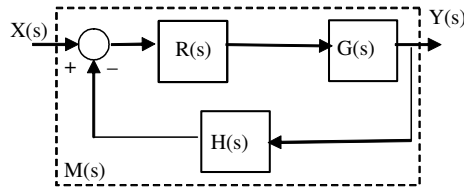


PROBLEMA:

Dado el sistema de la siguiente figura, ajuste el valor de K_R para que el margen de fase del sistema sea de 45° . ¿Qué ocurriría con el margen de fase y la estabilidad del sistema si la realimentación tiene un retardo puro de un segundo? ¿Qué corrección habría que hacer sobre K_R para mantener la estabilidad del sistema?



$$R(s) = K_R \quad G(s) = \frac{1}{(s+1)} \quad H(s) = \frac{10}{s+2}$$

SOLUCIÓN:

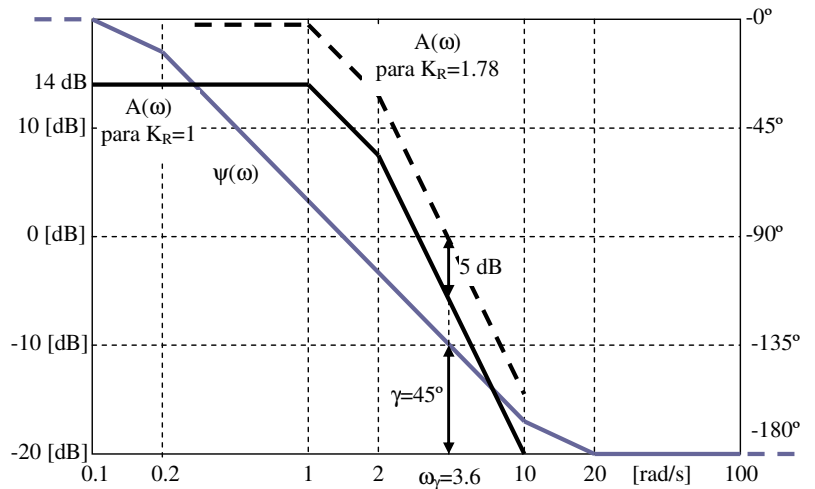
Se dibuja inicialmente el diagrama de bode del sistema en bucle abierto $R(s) \cdot G(s) \cdot H(s)$, suponiendo un valor inicial para K_R , por ejemplo $K_R=1$.

$$R(s) \cdot G(s) \cdot H(s) = K_R \cdot \frac{1}{(s+1)} \cdot \frac{10}{(s+2)}$$

$$R(j\omega) \cdot G(j\omega) \cdot H(j\omega) = \frac{5}{(j\omega+1)(0.5 \cdot j\omega+1)}$$

$$20 \cdot \log 5 = 14 \text{ dB}$$

$$\omega_1 = 1 \text{ rad/s} \quad \omega_2 = 2 \text{ rad/s}$$



A través de este trazado se puede ver que, para que el margen de fase sea de $\gamma=45^\circ$, la frecuencia a la que corta la curva $A(\omega)$ la horizontal por 0 dB debe de ser aproximadamente $\omega_\gamma=3.6$ rad/s. Para ello, la curva $A(\omega)$ que se ha trazado para $K_R=1$ debería de subir al menos 5 dB, es decir, hay que multiplicar K_R por $10^{5/20}=1.78$: $K_R=1.78$

El efecto sobre la estabilidad del sistema de la presencia de un retardo puro en la realimentación es muy negativo: puede hacer que el margen de fase se haga incluso negativo haciendo al sistema en bucle cerrado inestable. Esto se puede ver al trazar el diagrama de bode de un retardo $T=1$ segundo que, al sumarlo al Bode anterior, dará como resultado que el margen de fase se baje aproximadamente 206° a la pulsación $\omega_\gamma=3.6$, haciendo inestable el sistema.

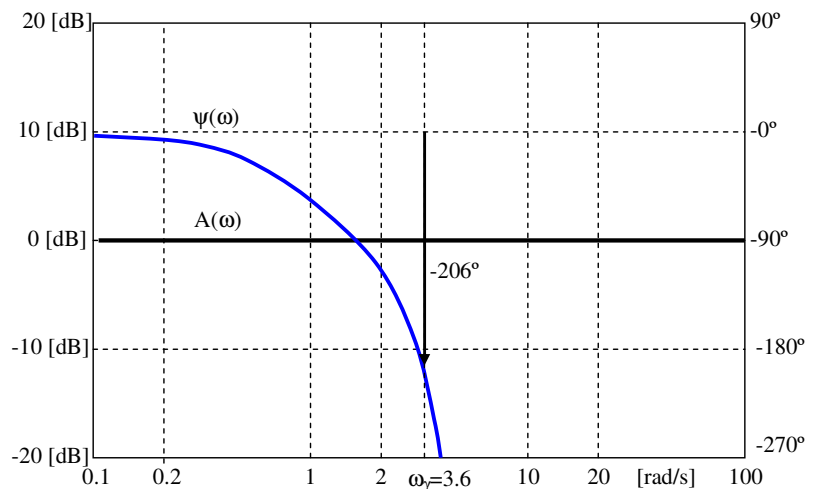
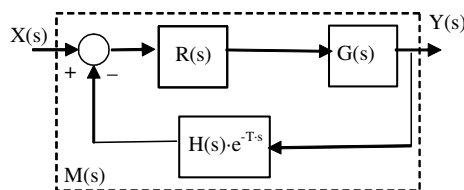
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = e^{-T \cdot s} \quad \text{donde } T = 1$$

$$G(j\omega) = e^{-j\omega} = |1| \angle -\omega$$

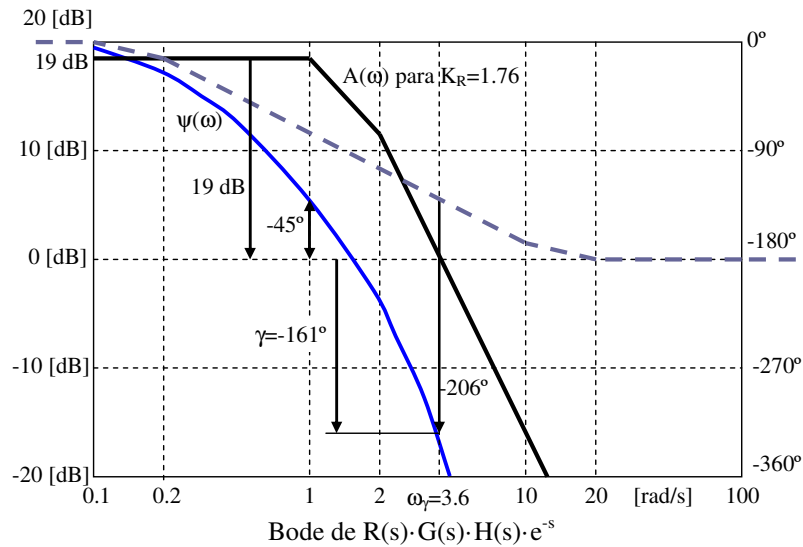
$$A(\omega) = 0 \text{ [dB]}$$

$$\psi(\omega) = -\omega \text{ [rad]}$$

para $\omega_\gamma = 3.6 \Rightarrow \psi(\omega_\gamma) = -3.6 \cdot \frac{180}{\pi} = -206.26^\circ$



Bode de un retardo puro de un segundo



El margen de fase con el retardo de un segundo en la realimentación sería $\gamma = -161^\circ$, el sistema $M(s)$ será inestable. Para recuperar la estabilidad con un margen de fase de nuevo de $\gamma = 45^\circ$, habría que hacer “descender” la curva $A(\omega)$ 19 dB. Es decir, multiplicar la K_R actual por $10^{-19/20} = 0.1122$: $K_R = 1.76 \cdot 0.1122 \approx 0.2$

APENDICE

Si el retardo fuese sólo de 0.1 segundos:

Hará que el margen de fase se reduzca haciendo al sistema en bucle cerrado menos estable. Esto se puede ver al trazar el diagrama de bode de un retardo $T=0.1$ segundos que, al sumarlo al Bode anterior, dará como resultado que el margen de fase se reducirá aproximadamente 20° .

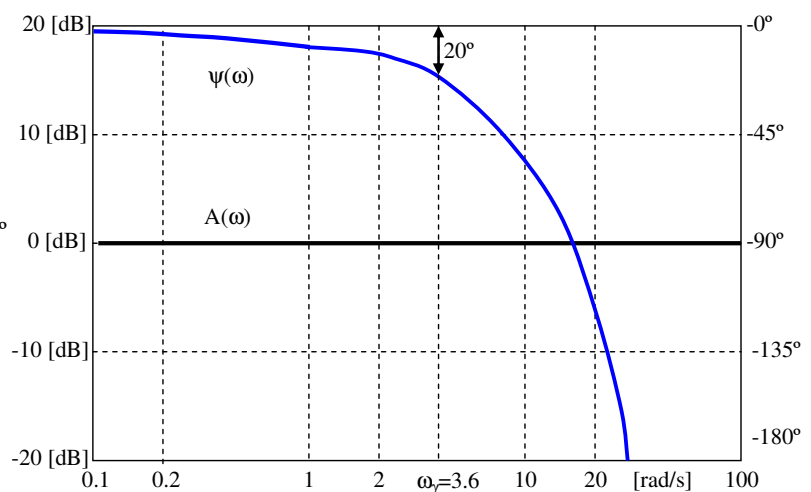
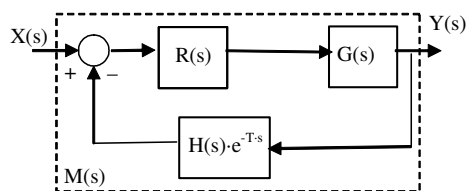
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = e^{-T \cdot s} \quad \text{donde } T = 0.1$$

$$G(j\omega) = e^{-0.1 \cdot j\omega} = |1| \angle -0.1 \cdot \omega$$

$$A(\omega) = 0 \quad [\text{dB}]$$

$$\psi(\omega) = -0.1 \cdot \omega \quad [\text{rad}]$$

$$\text{para } \omega_\gamma = 3.6 \Rightarrow \psi(\omega_\gamma) = -0.1 \cdot 3.6 \cdot \frac{180}{\pi} = -20.6^\circ$$



Para mantener el margen de estabilidad anterior sería necesario disminuir el valor de K_R .