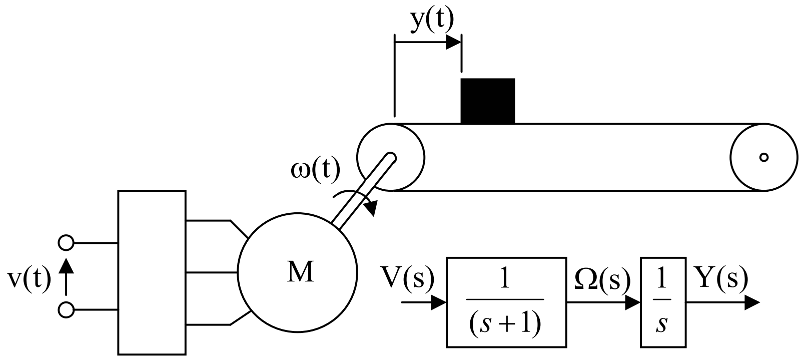
PROBLEMA:

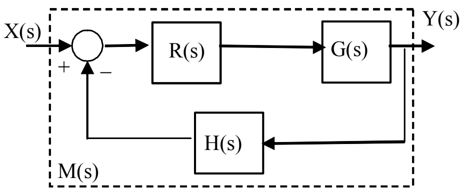
En el sistema de la figura, la relación entre las variables v(t), tensión de control, e y(t), desplazamiento del dispositivo, está definida por la función de transferencia representada.

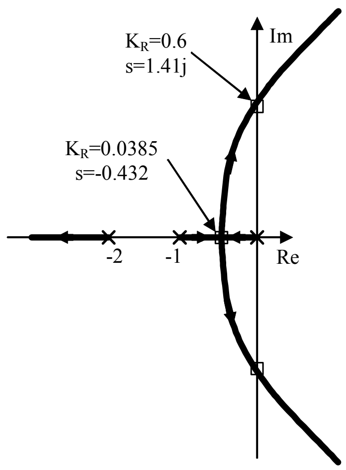


a) Indique, razonando la respuesta, si el sistema G(s)=Y(s)/V(s) es estable o inestable.
b) Razone como se puede determinar y dibuje de forma aproximada, la respuesta y(t) del sistema si la tensión de control v(t) pasa bruscamente de 0 a 2 voltios.
c) ¿Cómo oscila la velocidad angular ω(t) si la tensión de control es una función senoidal $v(t)=4\cdot sen(0.1\cdot t)\cdot u_0(t)$?¿Y la posición y(t)?

El sistema se realimenta tal como se indica en la siguiente figura con un sensor que mide la posición del dispositivo móvil y que tiene como función de transferencia H(s) y un regulador de ganancia modificable $R(s)=K_R>0$. De esta manera, la señal x(t) funciona como referencia de posición del dispositivo. Se representa además el Lugar de las Raíces correspondiente al sistema cuando K_R varía entre 0 e infinito.

$$R(s) = K_R \quad G(s) = \frac{1}{s(s+1)} \quad H(s) = \frac{10}{s+2}$$





d) ¿Para qué valores de K_R es estable el sistema realimentado?
e) ¿Qué valores de K_R hacen que el dispositivo se posicione sin oscilaciones una vez establecido un valor de referencia en la entrada x(t)?
f) ¿Dónde se posiciona el dispositivo (valor de y(t) cuando $t\rightarrow\infty$) si $x(t)=4\cdot u_0(t)$?
g) ¿Cuál es el error de posición del sistema?

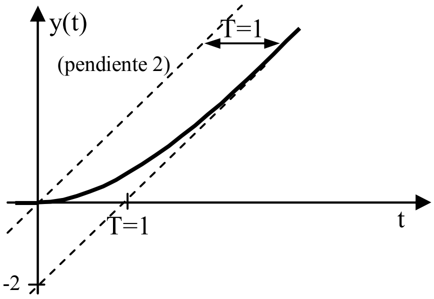
SOLUCIÓN:

a) La función de transferencia G(s) presenta un polo real (estable) y otro en el origen. Esto hace que el sistema sea **limitadamente estable**.

b) El ejercicio se plantea como la respuesta de G(s) ante una entrada escalón. Pero se puede simplificar su interpretación considerando que es lo mismo que la respuesta de un sistema de primer orden ante una entrada en rampa:

$$x(t) = 2 \cdot u_0(t) \Rightarrow Y(s) = X(s) \cdot G(s) = \frac{2}{s} \cdot \frac{1}{s \cdot (s+1)} = \frac{2}{s^2} \cdot \frac{1}{(s+1)} = X_1(s) \cdot G_1(s); \quad x_1(t) = 2 \cdot t \cdot u_0(t) \quad G_1(s) = \frac{1}{(s+1)}$$

$G_1(s)$ tiene una constante de tiempo T_1=1 segundo y una ganancia K_1=1, su respuesta a una rampa de pendiente 2 será:



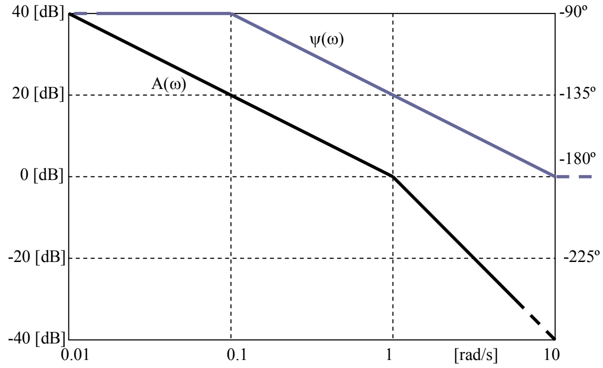
Se puede comprobar mediante la Antitransformada de Laplace:

$$Y(s) = X(s)\cdot G(s) = \frac{2}{s^2\cdot(s+1)}$$

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = 2\cdot(t-1+e^{-t})\cdot u_0(t)$$

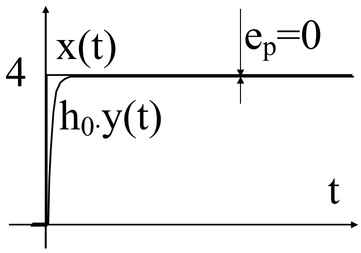
c) La respuesta $\omega(t)$ en régimen permanente será: $\omega_{RP}(t)=4\cdot|G_1(0.1\cdot j)|\cdot \text{sen}(0.1\cdot t+\underline{|G_1(0.1\cdot j)})$. Se puede calcular fácilmente: $G_1(0.1\cdot j)=1/(0.1\cdot j+1) \Rightarrow |G_1(0.1\cdot j)|\approx 1$; $\underline{|G_1(0.1\cdot j)}\approx 0 \Rightarrow$ $\mathbf{\omega_{RP}(t)=4\cdot sen(0.1\cdot t)}$.

Para obtener $y_{RP}(t)=4\cdot|G(0.1\cdot j)|\cdot \text{sen}(0.1\cdot t+\underline{|G(0.1\cdot j)})$, es quizás más cómodo trazar el diagrama de bode de G(s) y obtener A(0.1) y $\Psi(0.1)$. Del diagrama de Bode se obtiene A(0.1)=20dB$\Rightarrow$ $|G(0.1\cdot j)|=10$; $\Psi(0.1)=-90º \Rightarrow \underline{|G(0.1\cdot j)}=-\pi/2$. $\mathbf{y_{RP}(t)=40\cdot sen(0.1\cdot t-\pi/2)}$.



d) El lugar de las raíces indica que el sistema será **estable si $0<K_R<0.6$**, ya que para valores superiores los dos polos que están sobre las ramas que cruzan el eje imaginario harán que el sistema M(s) sea inestable.

e) Considerando dominantes los dos polos de M(s) que se encuentran sobre las dos ramas más próximas al eje imaginario, deducimos que el comportamiento de M(s) puede ser similar al de un sistema de 2º orden. Para que un sistema de 2º orden responda por ejemplo a una entrada escalón en x(t) sin oscilaciones, es necesario que sea sobreamortiguado, es decir, que sus dos polos sean reales. Esto sucede si **$0<K_R<0.0385$**. Para valores superiores a 0.0385 el sistema tendrá dos polos complejos conjugados y presentaría la sobreoscilación y oscilaciones típicas de un sistema subamortiguado ante una entrada escalón.



f) Teniendo en cuenta que el sistema presenta error de posición nulo (e_p=0) debido a que R(s)·G(s) es de Tipo 1, y que la ganancia de los elementos de realimentación es $h_0=\lim_{s\to 0}H(s)=5$, ante la entrada $x(t)=4\cdot u_0(t)$ la salida en régimen permanente deberá alcanzar el valor $4/h_0$. Es decir, como $e_p=0 \Rightarrow x(\infty)=h_0\cdot y(\infty)=4 \Rightarrow$ $\mathbf{y(\infty)=0.8}$.

Se puede comprobar también a través del teorema del valor final:

$$y(\infty) = \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} s\cdot Y(s) = \lim_{s\to 0} s\cdot X(s)\cdot M(s) = \lim_{s\to 0} s\cdot\frac{4}{s}\cdot\frac{R(s)\cdot G(s)}{1+R(s)\cdot G(s)\cdot H(s)} = \lim_{s\to 0}\frac{4\cdot K_R\cdot(s+2)}{s\cdot(s+1)(s+2)+10\cdot K_R} = 0.8$$

g) R(s)·G(s) es de Tipo 1, por lo tanto: $\mathbf{e_p = 0}$