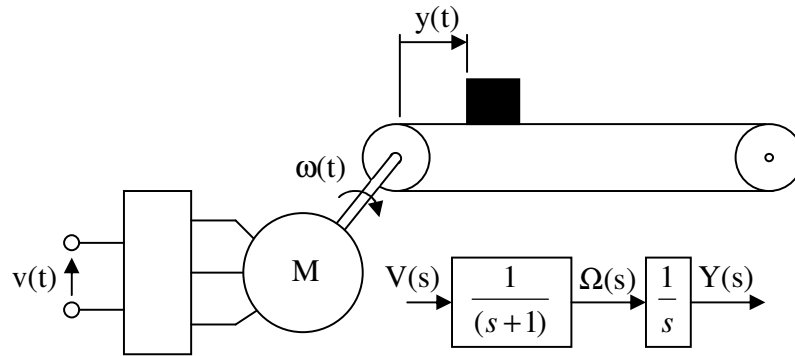


PROBLEMA:

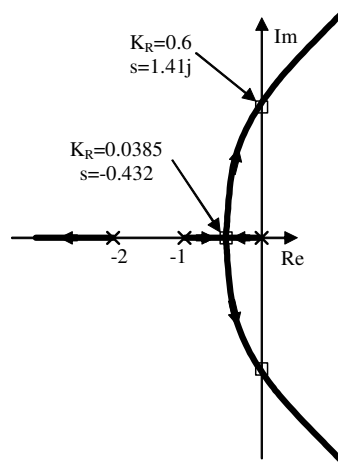
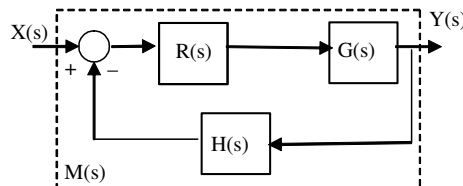
En el sistema de la figura, la relación entre las variables $v(t)$, tensión de control, e $y(t)$, desplazamiento del dispositivo, está definida por la función de transferencia representada.



- a) Indique, razonando la respuesta, si el sistema $G(s)=Y(s)/V(s)$ es estable o inestable.
- b) Razone como se puede determinar y dibuje de forma aproximada, la respuesta $y(t)$ del sistema si la tensión de control $v(t)$ pasa bruscamente de 0 a 2 voltios.
- c) ¿Cómo oscila la velocidad angular $\omega(t)$ si la tensión de control es una función senoidal $v(t)=4 \cdot \text{sen}(0.1 \cdot t) \cdot u_0(t)$? ¿Y la posición $y(t)$?

El sistema se realimenta tal como se indica en la siguiente figura con un sensor que mide la posición del dispositivo móvil y que tiene como función de transferencia $H(s)$ y un regulador de ganancia modificable $R(s)=K_R > 0$. De esta manera, la señal $x(t)$ funciona como referencia de posición del dispositivo. Se representa además el Lugar de las Raíces correspondiente al sistema cuando K_R varía entre 0 e infinito.

$$R(s) = K_R \quad G(s) = \frac{1}{s(s+1)} \quad H(s) = \frac{10}{s+2}$$



- d) ¿Para qué valores de K_R es estable el sistema realimentado?
- e) ¿Qué valores de K_R hacen que el dispositivo se posicione sin oscilaciones una vez establecido un valor de referencia en la entrada $x(t)$?
- f) ¿Dónde se posiciona el dispositivo (valor de $y(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$) si $x(t)=4 \cdot u_0(t)$?
- g) ¿Cuál es el error de posición del sistema?

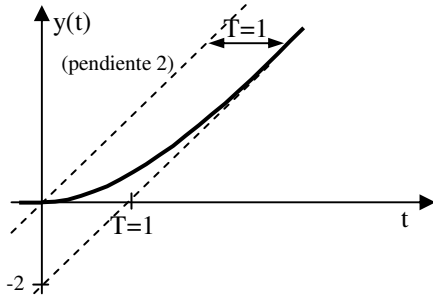
SOLUCIÓN:

a) La función de transferencia $G(s)$ presenta un polo real (estable) y otro en el origen. Esto hace que el sistema sea **limitadamente estable**.

b) El ejercicio se plantea como la respuesta de $G(s)$ ante una entrada escalón. Pero se puede simplificar su interpretación considerando que es lo mismo que la respuesta de un sistema de primer orden ante una entrada en rampa:

$$x(t) = 2 \cdot u_0(t) \Rightarrow Y(s) = X(s) \cdot G(s) = \frac{2}{s} \cdot \frac{1}{s \cdot (s+1)} = \frac{2}{s^2} \cdot \frac{1}{(s+1)} = X_1(s) \cdot G_1(s); \quad x_1(t) = 2 \cdot t \cdot u_0(t) \quad G_1(s) = \frac{1}{(s+1)}$$

$G_1(s)$ tiene una constante de tiempo $T_1=1$ segundo y una ganancia $K_1=1$, su respuesta a una rampa de pendiente 2 será:



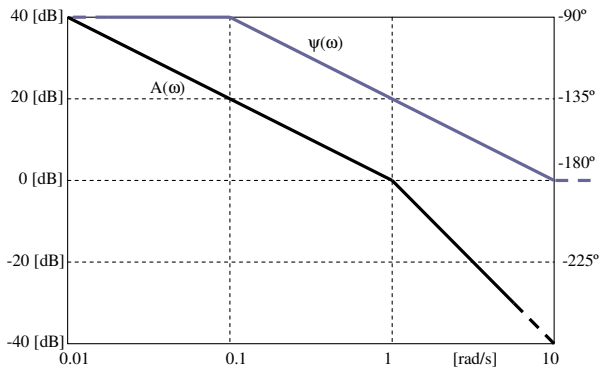
Se puede comprobar mediante la Antitransformada de Laplace:

$$Y(s) = X(s) \cdot G(s) = \frac{2}{s^2 \cdot (s+1)}$$

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = 2 \cdot (t-1 + e^{-t}) \cdot u_0(t)$$

c) La respuesta $\omega(t)$ en régimen permanente será: $\omega_{RP}(t) = 4 \cdot |G_1(0.1 \cdot j)| \cdot \text{sen}(0.1 \cdot t + |G_1(0.1 \cdot j)|)$. Se puede calcular fácilmente: $G_1(0.1 \cdot j) = 1 / (0.1 \cdot j + 1) \Rightarrow |G_1(0.1 \cdot j)| \approx 1$; $\angle G_1(0.1 \cdot j) \approx 0 \Rightarrow \omega_{RP}(t) = 4 \cdot \text{sen}(0.1 \cdot t)$.

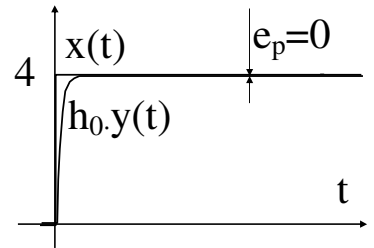
Para obtener $y_{RP}(t) = 4 \cdot |G(0.1 \cdot j)| \cdot \text{sen}(0.1 \cdot t + |G(0.1 \cdot j)|)$, es quizás más cómodo trazar el diagrama de bode de $G(s)$ y obtener $A(0.1)$ y $\Psi(0.1)$. Del diagrama de Bode se obtiene $A(0.1) = 20 \text{ dB} \Rightarrow |G(0.1 \cdot j)| = 10$; $\Psi(0.1) = -90^\circ \Rightarrow \angle G(0.1 \cdot j) = -\pi/2$. $y_{RP}(t) = 40 \cdot \text{sen}(0.1 \cdot t - \pi/2)$.



d) El lugar de las raíces indica que el sistema será estable si $0 < K_R < 0.6$, ya que para valores superiores los dos polos que están sobre las ramas que cruzan el eje imaginario harán que el sistema $M(s)$ sea inestable.

e) Considerando dominantes los dos polos de $M(s)$ que se encuentran sobre las dos ramas más próximas al eje imaginario, deducimos que el comportamiento de $M(s)$ puede ser similar al de un sistema de 2º orden. Para que un sistema de 2º orden responda por ejemplo a una entrada escalón en $x(t)$ sin oscilaciones, es necesario que sea sobreamortiguado, es decir, que sus dos polos sean reales. Esto sucede si $0 < K_R < 0.0385$. Para valores superiores a 0.0385 el sistema tendrá dos polos complejos conjugados y presentaría la sobreoscilación y oscilaciones típicas de un sistema subamortiguado ante una entrada escalón.

f) Teniendo en cuenta que el sistema presenta error de posición nulo ($e_p=0$) debido a que $R(s) \cdot G(s)$ es de Tipo 1, y que la ganancia de los elementos de realimentación es $h_0 = \lim_{s \rightarrow 0} H(s) = 5$, ante la entrada $x(t) = 4 \cdot u_0(t)$ la salida en régimen permanente deberá alcanzar el valor $4/h_0$. Es decir, como $e_p=0 \Rightarrow x(\infty) = h_0 \cdot y(\infty) = 4 \Rightarrow y(\infty) = 0.8$.



Se puede comprobar también a través del teorema del valor final:

$$y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot Y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot X(s) \cdot M(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{R(s) \cdot G(s)}{1 + R(s) \cdot G(s) \cdot H(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{4 \cdot K_R \cdot (s+2)}{s \cdot (s+1)(s+2) + 10 \cdot K_R} = 0.8$$

g) $R(s) \cdot G(s)$ es de Tipo 1, por lo tanto: $e_p = 0$