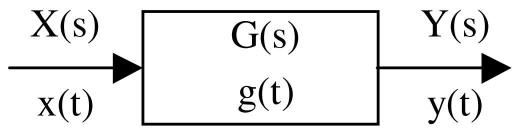
Tabla de Transformadas de Laplace

	$F(s)$	$f(t) \quad t \geq 0 \quad (f(t)=0 \text{ para } t<0)$	Observaciones
1	1	$\delta(t)$	Impulso de Dirac
2	e^{-Ts}	$\delta(t-T)$	Impulso de Dirac retrasado T segundos
3	$\frac{1}{s}$	$u_0(t)$	Escalón unitario
4	$\frac{1}{s}e^{-Ts}$	$u_0(t-T)$	Escalón unitario retrasado T segundos
5	$\frac{1}{s^2}$	t	Rampa unidad $tu_0(t)$
6	$\frac{1}{s^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	n = 1, 2, 3, … 0! = 1
7	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$e^{-at}u_0(t)$
8	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$te^{-at}u_0(t)$
9	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-at}$	n = 1, 2, 3, … 0! = 1
10	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{b-a}(e^{-at}-e^{-bt})$	Polos reales
11	$\frac{1}{s(s+a)}$	$\frac{1}{a}(1-e^{-at})$	(Como 10 con b=0)
12	$\frac{s+z}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{b-a}\left[(z-a)e^{-at}-(z-b)e^{-bt}\right]$	Polos reales
13	$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{a-b}\left[ae^{-at}-be^{-bt}\right]$	(Como 12 con z=0)
14	$\frac{1}{(s+a)(s+b)(s+c)}$	$\frac{e^{-at}}{(b-a)(c-a)}+\frac{e^{-bt}}{(c-b)(a-b)}+\frac{e^{-ct}}{(a-c)(b-c)}$	(Particularizable para c=0)
15	$\frac{(s+z)}{(s+a)(s+b)(s+c)}$	$\frac{(z-a)e^{-at}}{(b-a)(c-a)}+\frac{(z-b)e^{-bt}}{(c-b)(a-b)}+\frac{(z-c)e^{-ct}}{(a-c)(b-c)}$	(Particularizable para c=0 ó z=0)

	$F(s)$	$f(t) \quad t \geq 0 \quad (f(t)=0 \text{ para } t<0)$	Observaciones
16	$\frac{1}{s^2(s+a)}$	$\frac{1}{a^2}(at-1+e^{-at})$	
17	$\frac{1}{s(s+a)^2}$	$\frac{1}{a^2}(1-e^{-at}-ate^{-at})$	
18	$\frac{s+z}{s(s+a)^2}$	$\frac{1}{a^2}(z-ze^{-at}+a(a-z)te^{-at})$	
19	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$sen(\omega t)$	Polos imaginarios puros
20	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos(\omega t)$	Polos imaginarios puros
21	$\frac{s+z}{s^2+\omega^2}$	$\sqrt{\frac{z^2+\omega^2}{\omega^2}}sen(\omega t+\phi) \quad \phi=\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{z}\right)$	Polos imaginarios puros
22	$\frac{1}{s(s^2+\omega^2)}$	$\frac{1}{\omega^2}(1-\cos(\omega t))$	
23	$\frac{s+z}{s(s^2+\omega^2)}$	$\frac{z}{\omega^2}-\sqrt{\frac{z^2+\omega^2}{\omega^4}}\cos(\omega t+\phi) \quad \phi=\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{z}\right)$	
24	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}sen(\omega t)$	Polos complejos
25	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos(\omega t)$	Polos complejos
26	$\frac{s+z}{(s+a)^2+\omega^2}$	$\sqrt{\frac{(z-a)^2+\omega^2}{\omega^2}}e^{-at}sen(\omega t+\phi) \quad \phi=\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{z-a}\right)$	Polos complejos
27	$\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$	$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_n t}sen\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t\right)$	Polos complejos (equivalente a 24)
28	$\frac{s}{(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)}$	$-\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_n t}sen\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t+\phi\right) \quad \phi=\cos^{-1}\xi$	Polos complejos
29	$\frac{\omega_n^2}{s(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)}$	$1-\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_n t}sen\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t+\phi\right) \quad \phi=\cos^{-1}\xi$	

Sistemas de Primer Orden (I)

$$G(s) = \frac{K}{1 + T \cdot s}$$

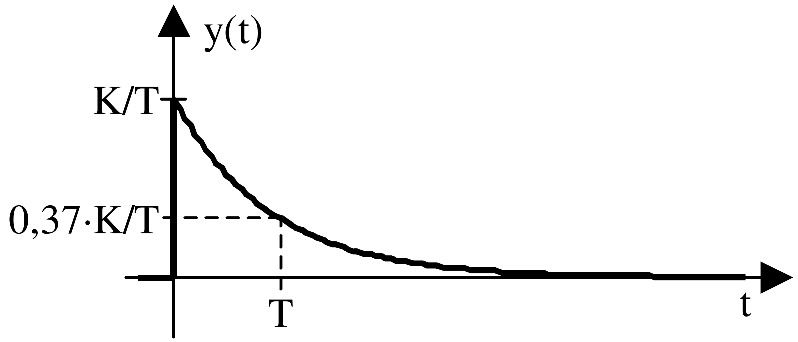


K: ganancia estática o en régimen permanente

T: constante de tiempo

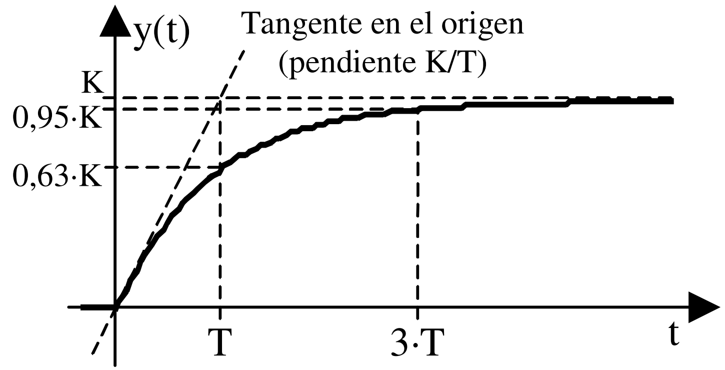
- Respuesta impulsional: X(s)=1

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = L^{-1}[G(s)] = \frac{K}{T} e^{\frac{-t}{T}} \cdot u_0(t)$$



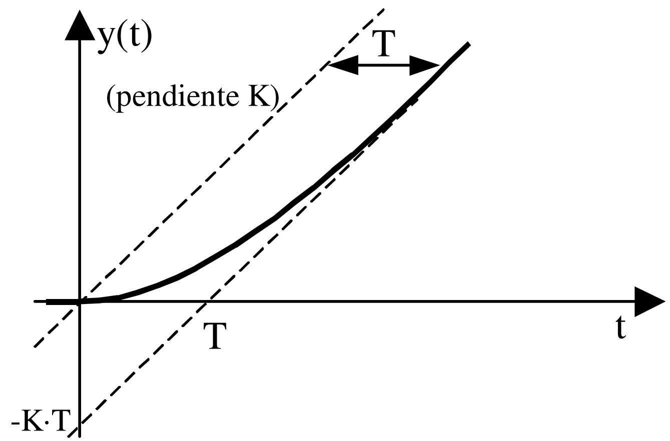
- Respuesta a un escalón: X(s)=1/s

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = L^{-1}\left[\frac{G(s)}{s}\right] = K \cdot (1 - e^{\frac{-t}{T}}) \cdot u_0(t)$$



- Respuesta a una rampa: X(s)=1/s²

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = L^{-1}\left[\frac{G(s)}{s^2}\right] = [K \cdot (t - T) + K \cdot T \cdot e^{\frac{-t}{T}}] \cdot u_0(t)$$



Sistemas de Segundo Orden (I)

$$G(s)=\frac{K\cdot\omega_n^2}{s^2+2\cdot\xi\cdot\omega_n\cdot s+\omega_n^2}=\frac{K}{\frac{1}{\omega_n^2}\cdot s^2+\frac{2\cdot\xi}{\omega_n}\cdot s+1}=\frac{K_s}{s^2+a\cdot s+b}$$

Si a,b>0, el sistema es estable

$$s^2+2\cdot\xi\cdot\omega_n\cdot s+\omega_n^2=0$$

Las raíces del polinomio (polos del sistema) son :

$$s_{1,2}=-\xi\cdot\omega_n\pm\omega_n\cdot\sqrt{\xi^2-1}$$

Si $\xi<1$ las raíces son complejas conjugadas :

$$\sigma=\xi\cdot\omega_{\mathrm{n}}\qquad \omega_d=\omega_n\cdot\sqrt{1-\xi^2}$$

$$s_{1,2}=-\sigma\pm j\cdot\omega_d$$

K: ganancia estática

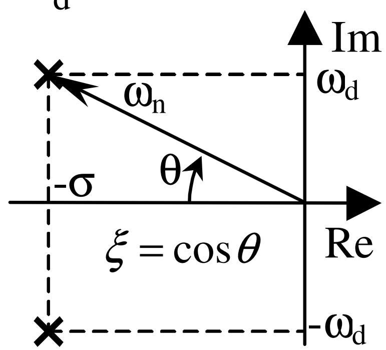
$T=2\cdot\xi/\omega_n$: constante de tiempo

$\xi>0$: coeficiente de amortiguamiento

$\omega_n>0$: frecuencia natural del sistema

$\sigma>0$: constante de amortiguamiento o factor de decrecimiento

Si $\xi<1$, ω_d : frecuencia amortiguada



Sistemas de Segundo Orden (II)

$$si \quad 0<\xi<0.707 \begin{cases} M_r = \dfrac{1}{2\cdot\xi\cdot\sqrt{1-\xi^2}} & \leftarrow \text{Pico de Resonancia} \\ \omega_r = \omega_n\cdot\sqrt{1-2\cdot\xi^2} & \leftarrow \text{Frecuencia de Resonancia} \end{cases}$$

Sobreoscilación :

$$M_p = e^{\frac{-\pi\cdot\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}\cdot 100[\%] = e^{\frac{-\pi\cdot\sigma}{\omega_d}}\cdot 100[\%] = e^{-\pi\cdot\mathrm{cotg}\,\theta}\cdot 100[\%] = \frac{B-A}{A}\cdot 100[\%]$$

Tiempo de subida :

$$t_r = \frac{\pi-\theta}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{\pi-\theta}{\omega_d}$$

Tiempo de pico :

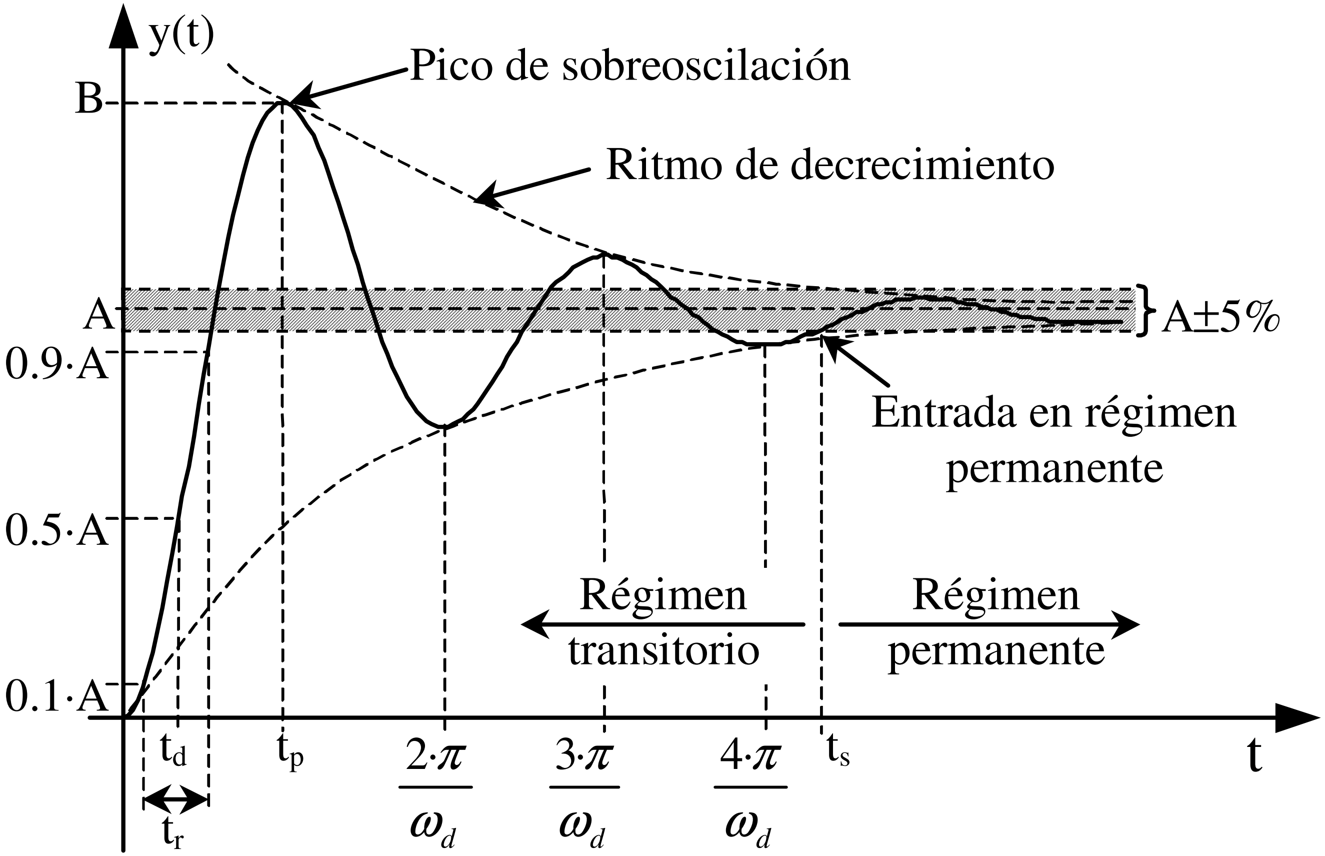
$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{\pi}{\omega_d}$$

Tiempo de establecimiento :

$$t_s = \frac{\pi}{\xi\cdot\omega_n} = \frac{\pi}{\sigma} \quad \text{(aprox.)}$$

Tiempo de retardo :

$$t_d = \frac{1+\frac{\xi}{\sqrt{2}}}{\omega_n} \quad \text{(aprox.)}$$



Criterio de Estabilidad de Routh

Indica si existen raíces con parte real positiva en un polinomio:

$$a_0 \cdot s^n + a_1 \cdot s^{n-1} + a_2 \cdot s^{n-2} + \ldots + a_{n-2} \cdot s^2 + a_{n-1} \cdot s + a_n = 0$$

1) $\forall a_i,\ a_i > 0$ (es decir, todos con el mismo signo y sin nulos)

2) Se construye la siguiente tabla:

$$\begin{array}{c|ccccc}
s^n & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \ldots \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \ldots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \ldots \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & \\
s^2 & u_1 & u_2 & & & \\
s^1 & v_1 & & & & \\
s^0 & w_1 & & & &
\end{array}$$

$$b_1 = \frac{a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3}{a_1} = -\frac{1}{a_1}\begin{bmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{bmatrix}$$

$$b_2 = \frac{a_1 \cdot a_4 - a_0 \cdot a_5}{a_1} = -\frac{1}{a_1}\begin{bmatrix} a_0 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{bmatrix}$$

$$b_3 = \frac{a_1 \cdot a_6 - a_0 \cdot a_7}{a_1} = -\frac{1}{a_1}\begin{bmatrix} a_0 & a_6 \\ a_1 & a_7 \end{bmatrix}$$

$\ldots$

$$c_1 = \frac{b_1 \cdot a_3 - a_1 \cdot b_2}{b_1} = -\frac{1}{b_1}\begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}$$

$$c_2 = \frac{b_1 \cdot a_5 - a_1 \cdot b_3}{b_1} = -\frac{1}{b_1}\begin{bmatrix} a_1 & a_5 \\ b_1 & b_3 \end{bmatrix}$$

El sistema que tenga como denominador ese polinomio, será estable si todos los $a_i > 0$ y todos los coeficientes de la primera columna de la tabla son también estrictamente positivos.

El polinomio tiene tantos polos con parte real positiva como cambios de signo se producen en la primera columna de la tabla