



## Tema 4

# Análisis de Sistemas en el Dominio de la Frecuencia



## Indice

- 4.1. Respuesta en frecuencia
- 4.2. Representaciones de la respuesta frecuencial
  - 4.2.1. Diagrama de Bode
  - 4.2.2. Diagrama Magnitud-Fase
  - 4.2.3. Diagrama Polar

## Análisis en el Dominio de la Frecuencia

- Respuesta de los sistemas ante entradas de tipo senoidal.
- **Entrada:** Señales senoidales de distinta frecuencia  $f$  (o pulsación  $\omega=2\pi \cdot f$ ) y, generalmente, de la misma amplitud  $M$ .

$$x(t) = M \cdot \text{sen}(\omega t) \cdot u_0(t) \quad \omega : 0 \rightarrow \infty$$

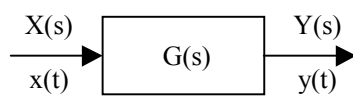
- **Salida:**

**Régimen transitorio:** La señal se va convirtiendo poco a poco en una senoide.

**Régimen permanente:** La señal es una senoide de igual frecuencia que la entrada, pero con distinta amplitud y fase. La diferencia es función de la frecuencia.

$$y_{RP}(t) = |G(j\omega)| \cdot M \cdot \text{sen}(\omega t + \underbrace{|G(j\omega)|}_{\text{phase}})$$

## Respuesta a una Entrada Senoidal (I)



$$x(t) = M \cdot \text{sen}(\omega t) \cdot u_0(t)$$

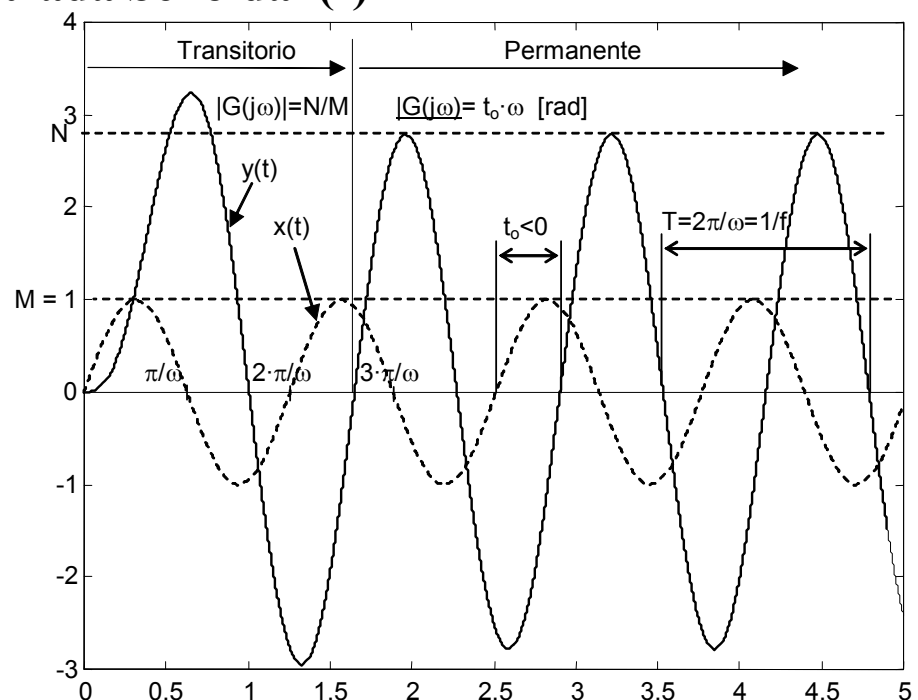
$$M = 1 \quad \omega = 5 \text{ [rad / s]}$$

$$G(s) = \frac{75}{s^2 + 5s + 15}$$

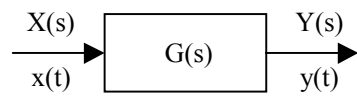
$$G(j\omega) = G(s) \Big|_{s=j\omega}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{N}{M}$$

$$\underline{|G(j\omega)|} = t_o \cdot \omega \text{ [rad]}$$



## Respuesta a una Entrada Senoidal (II)



$$x(t) = M \cdot \text{sen}(\omega \cdot t) \cdot u_0(t)$$

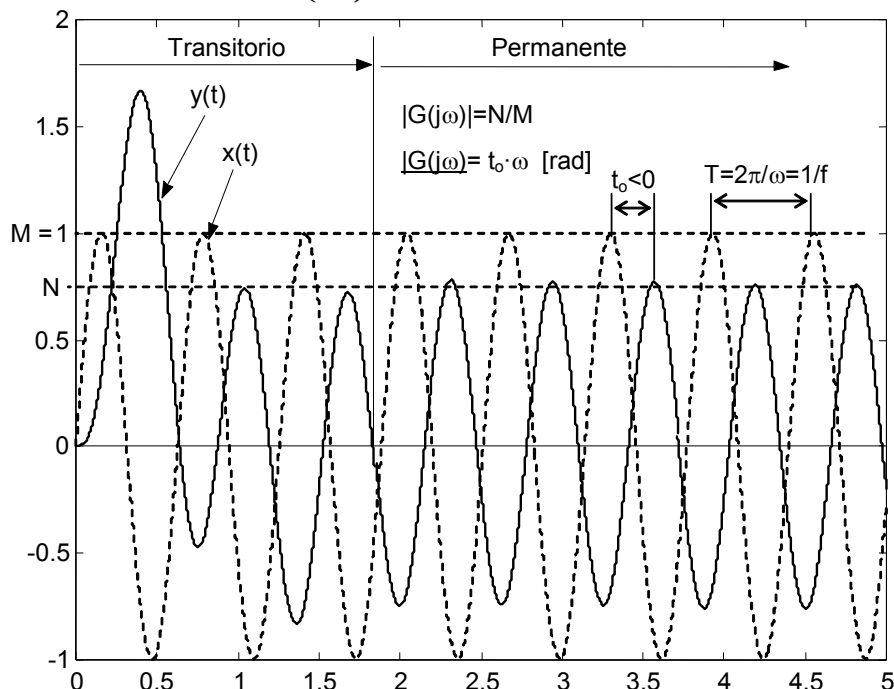
$$M = 1 \quad \omega = 10 \text{ [rad / s]}$$

$$G(s) = \frac{75}{s^2 + 5s + 15}$$

$$G(j\omega) = G(s) \Big|_{s=j\omega}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{N}{M}$$

$$\angle G(j\omega) = t_o \cdot \omega \text{ [rad]}$$



## Representaciones de la Respuesta Frecuencial

- **Diagrama de Bode:**

Dos curvas en función de la frecuencia  $f$  [Hz] o de la pulsación  $\omega$  [rad/s], en escala logarítmica.

–Relación de amplitudes  $A(\omega) = 20 \cdot \log|G(j\omega)|$  [dB]

–Angulo de fase  $\Psi(\omega) = \angle G(j\omega)$  [°]

- **Diagrama Magnitud-Fase:**

Relación de amplitudes  $A(\omega)$  [dB] en función del Angulo de fase  $\Psi(\omega)$  [°] con la frecuencia o pulsación como parámetro.

- **Diagrama Polar:**

Lugar geométrico de los afijos de los vectores  $G(j\omega)$  cuando  $\omega: 0 \rightarrow \infty$

## Diagrama de Bode (I)

- La relación de amplitudes en decibelios [dB]:

$$A(\omega) = 20 \cdot \log|G(j\omega)| \quad [dB]$$

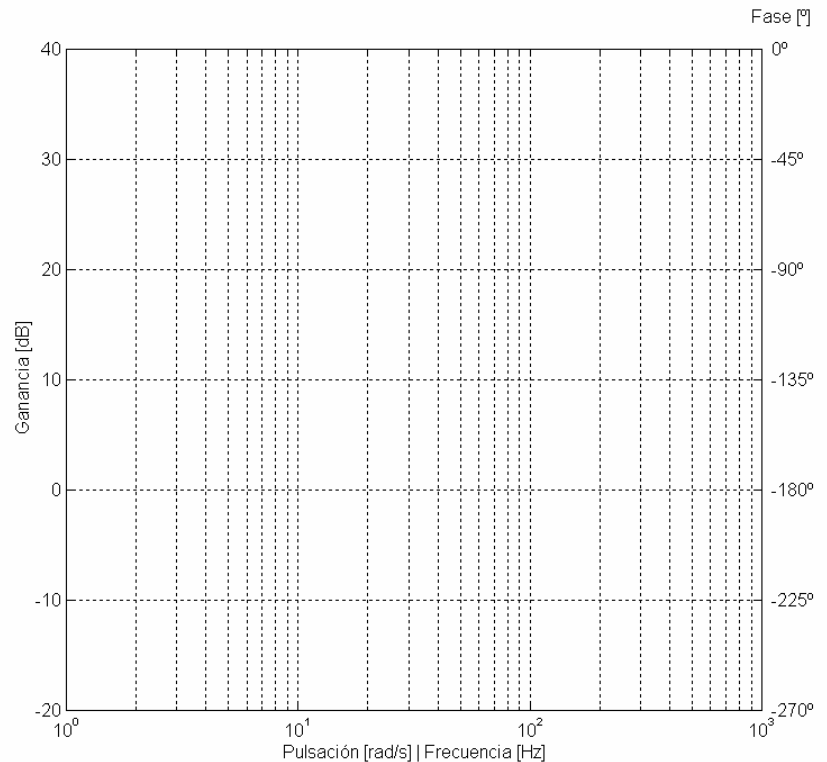
- El ángulo de fase en grados [°]:

$$\Psi(\omega) = \underline{|G(j\omega)| \text{ rad}} \cdot \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} \quad [^\circ]$$

- La frecuencia  $f$  [Hz] o la pulsación  $\omega$  [rad/s] en escala logarítmica

- Multiplicar o dividir por 10 a  $|G(j\omega)|$  supone sumar o restar 20 dB a  $A(\omega)$ .

- Multiplicar por 10 la frecuencia supone subir una **década** y por 2 una **octava**.



## Diagrama de Bode (II)

- Para trabajar con el diagrama de Bode se sustituye  $s=j\omega$  en la función de transferencia del sistema y se expresa con los términos independientes de cada polinomio iguales a 1.

$$G(s) = \frac{K \cdot \prod_{p=1}^P (1 + T_p \cdot s) \cdot \prod_{q=1}^Q \left[ 1 + \frac{2 \cdot \xi_q}{\omega_{nq}} \cdot s + \left( \frac{s}{\omega_{nq}} \right)^2 \right]}{s^N \cdot \prod_{l=1}^L (1 + T_l \cdot s) \cdot \prod_{m=1}^M \left[ 1 + \frac{2 \cdot \xi_m}{\omega_{nm}} \cdot s + \left( \frac{s}{\omega_{nm}} \right)^2 \right]}$$

$$G(j\omega) = \frac{K \cdot \prod_{p=1}^P (1 + T_p \cdot j\omega) \cdot \prod_{q=1}^Q \left[ 1 + \frac{2 \cdot \xi_q}{\omega_{nq}} \cdot j\omega + \left( \frac{j\omega}{\omega_{nq}} \right)^2 \right]}{(j\omega)^N \cdot \prod_{l=1}^L (1 + T_l \cdot j\omega) \cdot \prod_{m=1}^M \left[ 1 + \frac{2 \cdot \xi_m}{\omega_{nm}} \cdot j\omega + \left( \frac{j\omega}{\omega_{nm}} \right)^2 \right]}$$

- Se puede estudiar la respuesta en frecuencia del sistema analizando por separado la respuesta de cada uno de los elementos de la función de transferencia. La suma de todos los resultados será la respuesta del conjunto.

$$K ; (1 + T \cdot j\omega) ; \left[ 1 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_n} \cdot j\omega + \left( \frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2 \right] ; \frac{1}{(j\omega)^N} ; \frac{1}{(1 + T \cdot j\omega)} ; \frac{1}{\left[ 1 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_n} \cdot j\omega + \left( \frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]}$$

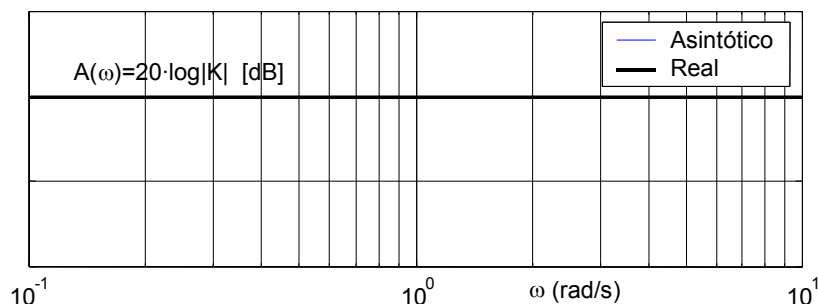
## Respuesta de un término constante

$$G(s) = K \quad G(j\omega) = K$$

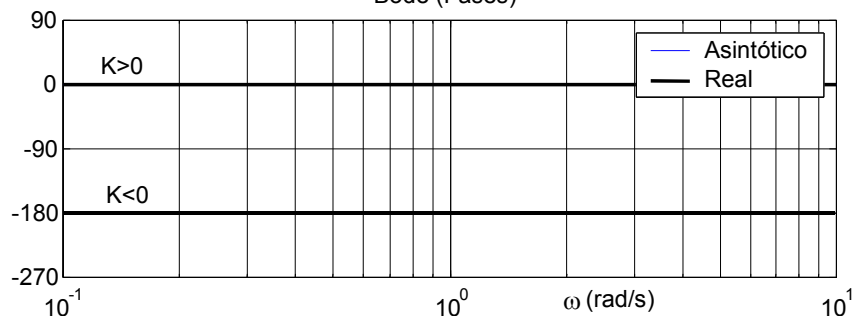
$$A(\omega) = 20 \cdot \log|G(j\omega)| = 20 \cdot \log|K|$$

$$\psi(\omega) = \angle G(j\omega) = \begin{cases} 0^\circ & \text{si } K > 0 \\ -180^\circ & \text{si } K < 0 \end{cases}$$

Bode (Amplitudes)



Bode (Fases)



## Respuesta de un polo en el origen

$$G(s) = \frac{1}{s} \quad G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$$

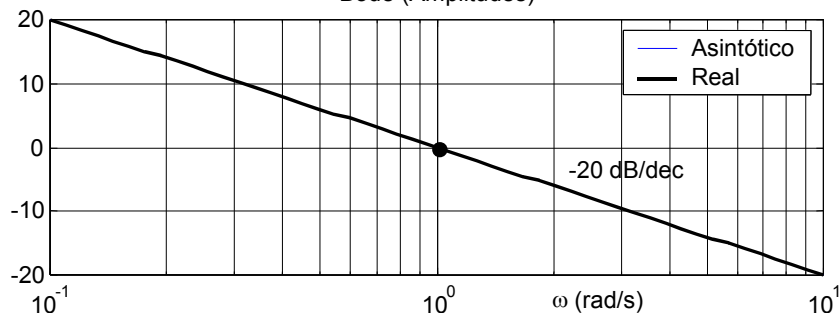
$$A(\omega) = 20 \cdot \log|G(j\omega)| = 20 \cdot \log\left|\frac{1}{j\omega}\right| = 20 \cdot \log 1 - 20 \cdot \log \omega = -20 \cdot \log \omega$$

$$\begin{cases} \omega = 0.1 \Rightarrow A(0.1) = 20 \text{ dB} \\ \omega = 1 \Rightarrow A(1) = 0 \text{ dB} \\ \omega = 10 \Rightarrow A(10) = -20 \text{ dB} \end{cases}$$

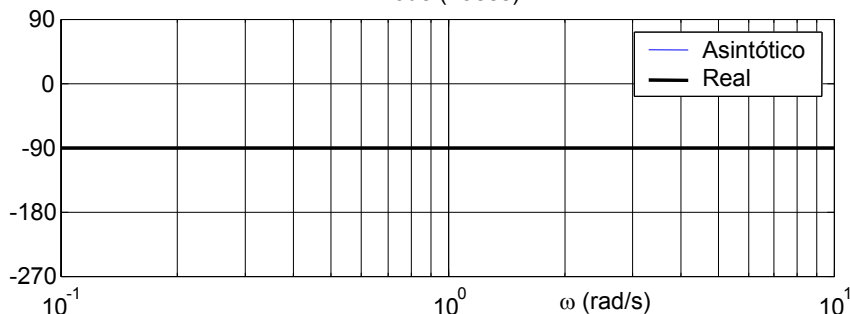
$$\Psi(\omega) = \angle G(j\omega) = \angle \frac{1}{j\omega} = \angle 1 - \angle j\omega = -90^\circ$$

$$\forall \omega; \omega : 0 \rightarrow \infty$$

Bode (Amplitudes)



Bode (Fases)



## Respuesta de más de un cero o polo en el origen

$$G(s) = s^{\pm N} \quad G(j\omega) = (j\omega)^{\pm N}$$

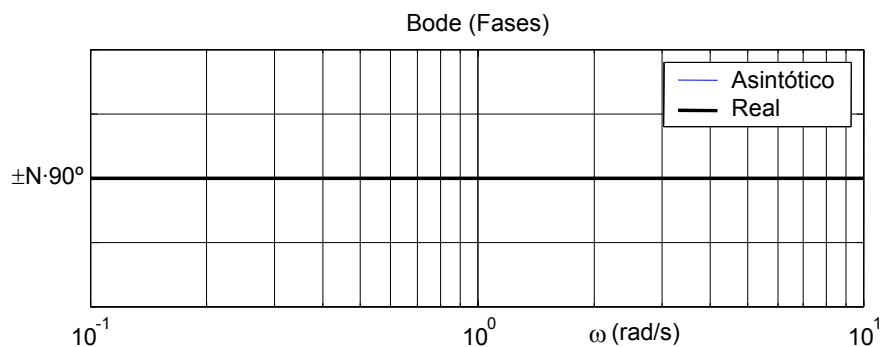
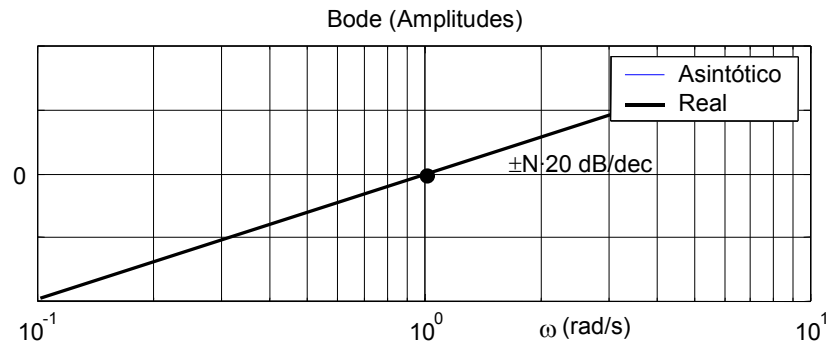
$$A(\omega) = 20 \cdot \log |G(j\omega)| =$$

$$= 20 \cdot \log |(j\omega)^{\pm N}| = \pm N \cdot 20 \cdot \log \omega$$

$(\omega = 1 \Rightarrow A(1) = 0 \text{ dB})$

$$\Psi(\omega) = \angle G(j\omega) = \angle (j\omega)^{\pm N} =$$

$$= \pm N \cdot \angle j\omega = \pm N \cdot 90^\circ$$



## Respuesta de un polo real

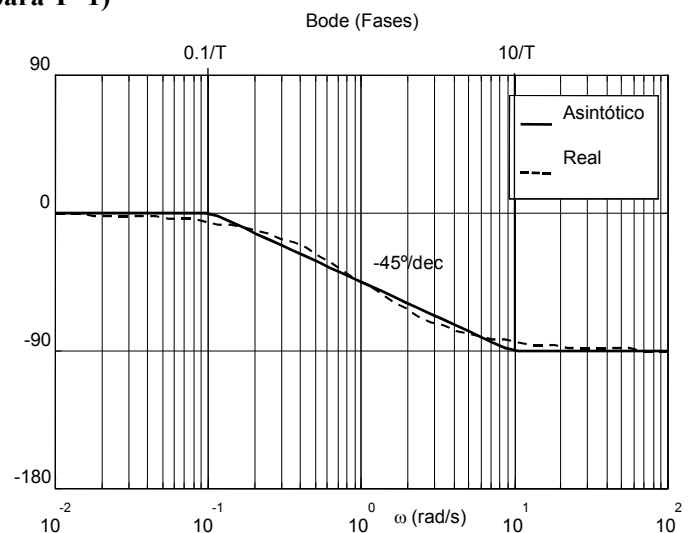
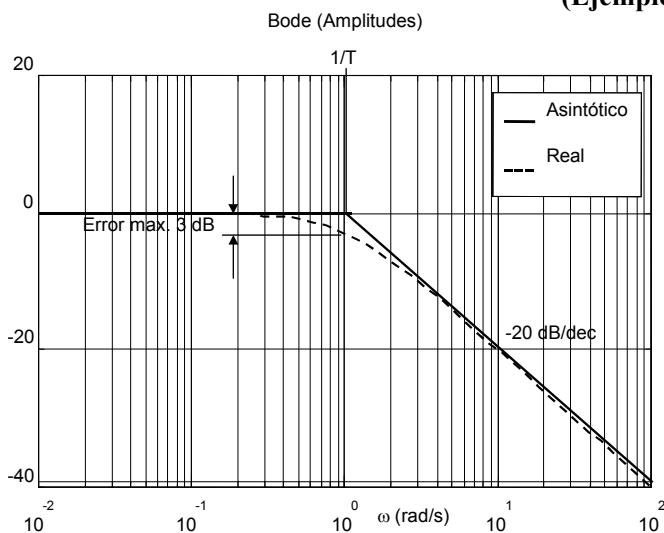
$$G(s) = \frac{1}{1+T \cdot s} \quad G(j\omega) = \frac{1}{1+T \cdot j\omega}$$

$$A(\omega) = -20 \cdot \log \sqrt{1 + (\omega \cdot T)^2}$$

$$\Psi(\omega) = -\arctg(\omega \cdot T)$$

$$\begin{cases} \text{Si } \omega \rightarrow 0 \Rightarrow \Psi(\omega) \rightarrow 0^\circ \\ \text{Si } \omega \rightarrow \infty \Rightarrow \Psi(\omega) \rightarrow -90^\circ \end{cases}$$

(Ejemplo para T=1)



## Respuesta de un cero real

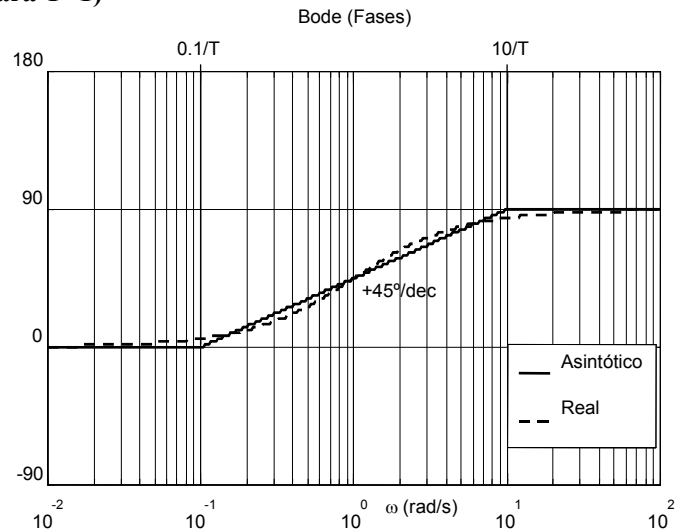
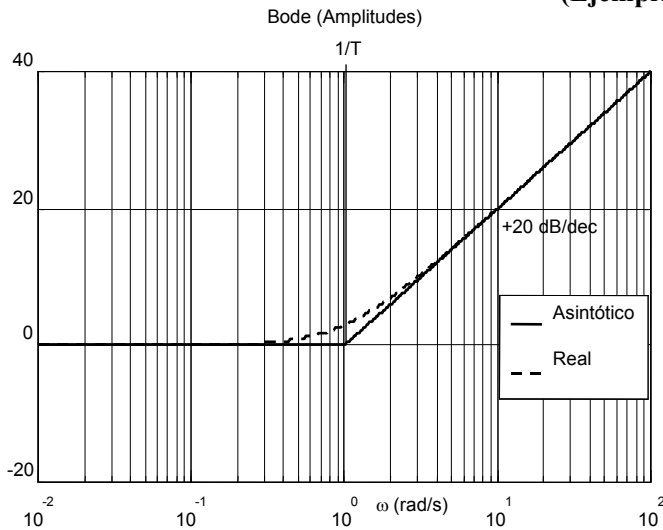
$$G(s) = 1 + T \cdot s \quad G(j\omega) = 1 + T \cdot j\omega$$

$$A(\omega) = 20 \cdot \log \sqrt{1 + (\omega \cdot T)^2}$$

$$\Psi(\omega) = \arctg(\omega \cdot T)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } \omega \rightarrow 0 \Rightarrow \Psi(\omega) \rightarrow 0^\circ \\ \text{Si } \omega \rightarrow \infty \Rightarrow \Psi(\omega) \rightarrow 90^\circ \end{array} \right.$$

(Ejemplo para T=1)



## Respuestas de otros ceros o polos reales

- Para N polos o ceros con la misma frecuencia de corte, las pendientes de los trazados asintóticos de cada representación se multiplican por N. También se multiplica por N el error de representación.
- Si los signos de los coeficientes del polinomio que representa al polo o cero real cambian, la curva de relación de amplitudes no cambia, pero la de fases si.

Ceros	$\omega \rightarrow 0$	$\omega \rightarrow \infty$	Polos	$\omega \rightarrow 0$	$\omega \rightarrow \infty$
$(1+T \cdot j\omega)$	$0^\circ \rightarrow$	$90^\circ$	$1/(1+T \cdot j\omega)$	$0^\circ \rightarrow$	$-90^\circ$
$(1-T \cdot j\omega)$	$0^\circ \rightarrow$	$-90^\circ$	$1/(1-T \cdot j\omega)$	$0^\circ \rightarrow$	$90^\circ$
$(-1+T \cdot j\omega)$	$180^\circ \rightarrow$	$90^\circ$	$1/(-1+T \cdot j\omega)$	$-180^\circ \rightarrow$	$-90^\circ$
$(-1-T \cdot j\omega)$	$-180^\circ \rightarrow$	$-90^\circ$	$1/(-1-T \cdot j\omega)$	$180^\circ \rightarrow$	$90^\circ$

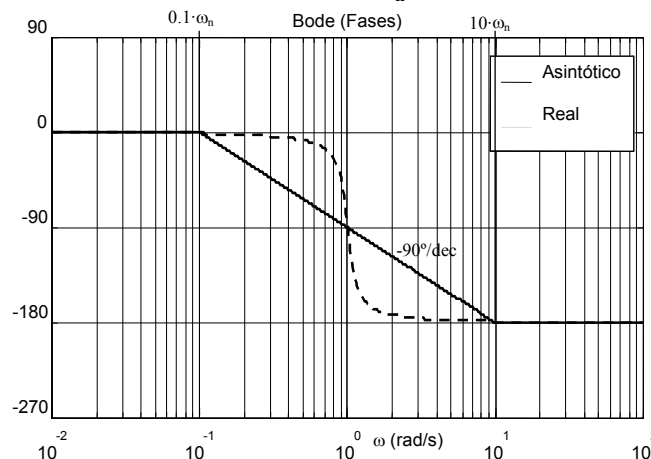
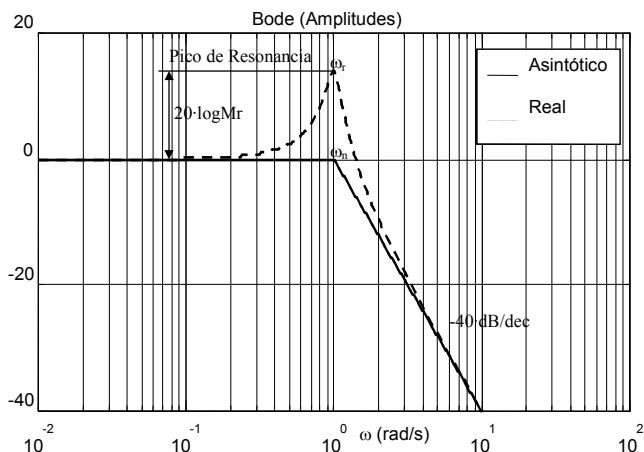
## Respuesta de un par de polos complejos (I)

$$0 < \xi < 1$$

$$G(s) = \frac{1}{1 + (2 \cdot \xi / \omega_n) \cdot s + (1 / \omega_n)^2 \cdot s^2} \quad G(j\omega) = \frac{1}{1 + (2 \cdot \xi / \omega_n) \cdot j\omega + (1 / \omega_n)^2 \cdot (j\omega)^2} \quad A(\omega) = -20 \cdot \log \sqrt{[1 - (\omega / \omega_n)^2]^2 + 4 \cdot \xi^2 \cdot (\omega / \omega_n)^2}$$

$$si \quad 0 < \xi < 0.707 \quad \left\{ \begin{array}{l} M_r = \frac{1}{2 \cdot \xi \cdot \sqrt{1 - \xi^2}} \leftarrow \text{Pico de Resonancia} \\ \omega_r = \omega_n \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot \xi^2} \leftarrow \text{Frecuencia de Resonancia} \end{array} \right. \quad \Psi(\omega) = -\arctg \left[ \frac{2 \cdot \xi \cdot (\omega / \omega_n)}{1 - (\omega / \omega_n)^2} \right] \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Si } \omega \rightarrow 0 \Rightarrow \Psi(\omega) \rightarrow 0^\circ \\ \text{Si } \omega \rightarrow \infty \Rightarrow \Psi(\omega) \rightarrow -180^\circ \end{array} \right.$$

(Ejemplo para  $\omega_n=1, \xi=0.1$ )

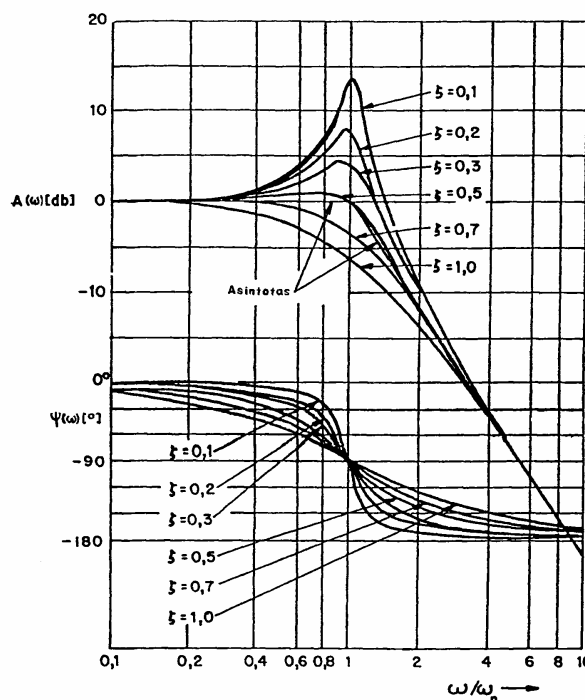


## Respuesta de un par de polos complejos (II)

$$G(s) = \frac{1}{1 + (2 \cdot \xi / \omega_n) \cdot s + (1 / \omega_n)^2 \cdot s^2}$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + (2 \cdot \xi / \omega_n) \cdot j\omega + (1 / \omega_n)^2 \cdot (j\omega)^2}$$

Comparación de la respuesta en frecuencia cuando se modifica el parámetro  $\xi$



## Ejemplo de diagrama de Bode de un sistema (I)

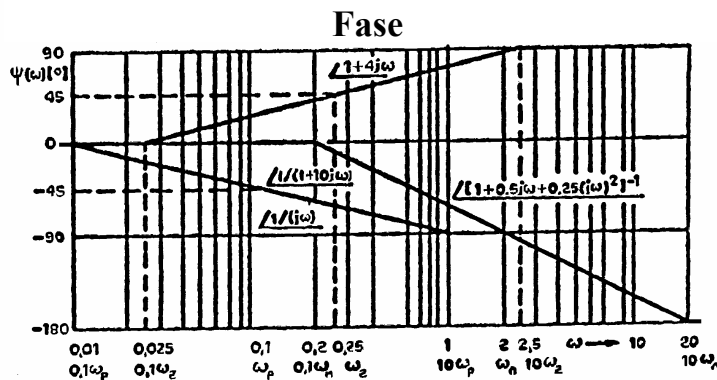
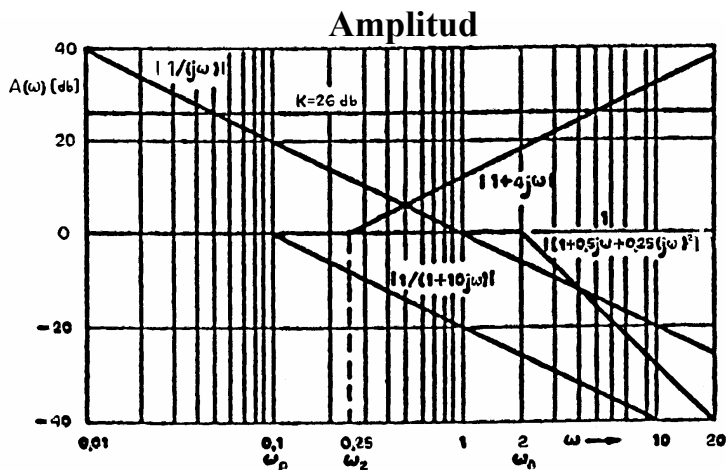
$$G(s) = \frac{32 \cdot (s + 0.25)}{s \cdot (s + 0.1) \cdot (s^2 + 2 \cdot s + 4)} \quad G(s) = \frac{20 \cdot (1 + 4 \cdot s)}{s \cdot (1 + 10 \cdot s) \cdot (1 + 0.5 \cdot s + 0.25 \cdot s^2)}$$

$$G(j\omega) = \frac{20 \cdot (1 + 4 \cdot j\omega)}{j\omega \cdot (1 + 10 \cdot j\omega) \cdot (1 + 0.5 \cdot j\omega + 0.25 \cdot (j\omega)^2)}$$

Frecuencias de corte

$A(\omega)$	$\Psi(\omega)$
$\omega_p = 0.1$	$0.1 \cdot \omega_p = 0.01$
$\omega_z = 0.25$	$0.1 \cdot \omega_z = 0.025$
$\omega_n = 2$	$0.1 \cdot \omega_n = 0.2$
	$10 \cdot \omega_p = 1$
	$10 \cdot \omega_z = 2.5$
	$10 \cdot \omega_n = 20$

Pico de Resonancia  $\left\{ \begin{array}{l} \omega_n = 2 \\ \xi = 0.5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} M_r = 1.15 \Rightarrow 1.24 \text{ dB} \\ \omega_r = 1.41 \text{ rad/s} \end{array} \right.$



## Ejemplo de diagrama de Bode de un sistema (II)

- Tabla para el trazado asintótico de  $A(\omega)$

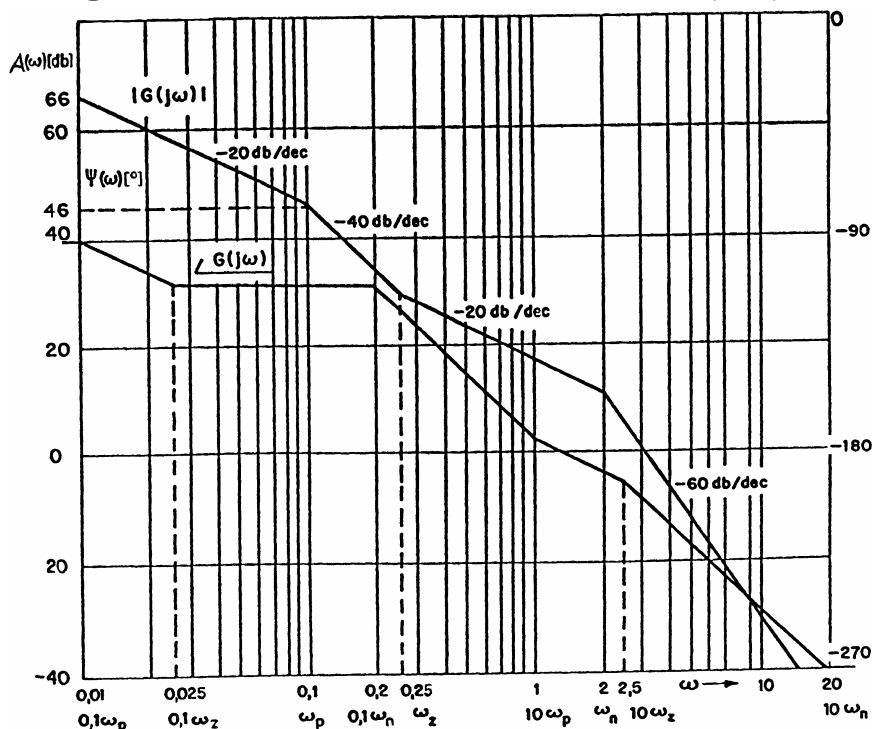
Elemento	Frecuencia de corte	Cambio de pendiente	Pendiente acumulada
$K=20 \equiv 26 \text{ [dB]}$	No tienen, frecuencia de corte. Su representación es una recta de pendiente -20dB/dec que pasa por 26 dB para $\omega=1$	0 dB/dec	-20 dB/dec (pendiente inicial)
$1/(j \cdot \omega)$ ( $\omega=1 \Rightarrow 0 \text{ dB}$ )		-20 dB/dec	
$1/(1+10 \cdot j \cdot \omega)$	$\omega_p=0.1$	-20 dB/dec	-40 dB/dec
$(1+4 \cdot j \cdot \omega)$	$\omega_z=0.25$	+20 dB/dec	-20 dB/dec
$1/(1+0.5 \cdot j \cdot \omega + 0.25 \cdot (j \cdot \omega)^2)$	$\omega_n=2$	-40 dB/dec	-60 dB/dec

- Tablas para el trazado asintótico de  $\Psi(\omega)$

Elemento	$\omega \rightarrow 0$	$\omega \rightarrow \infty$
$K=20 > 0$	$0^\circ$	$0^\circ$
$1/(j \cdot \omega)$	$-90^\circ$	$-90^\circ$
$1/(1+10 \cdot j \cdot \omega)$	$0^\circ$	$-90^\circ$
$(1+4 \cdot j \cdot \omega)$	$0^\circ$	$90^\circ$
$1/(1+0.5 \cdot j \cdot \omega + 0.25 \cdot (j \cdot \omega)^2)$	$0^\circ$	$-180^\circ$
Total	$-90^\circ$	$-270^\circ$

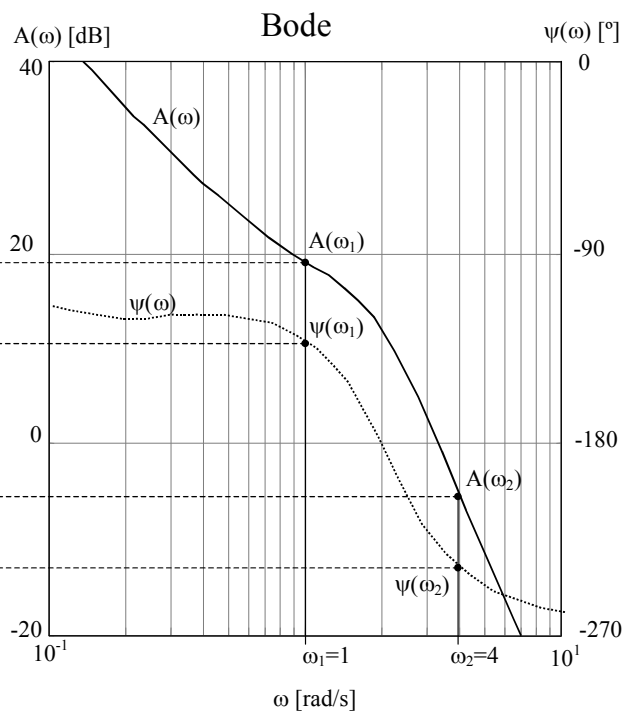
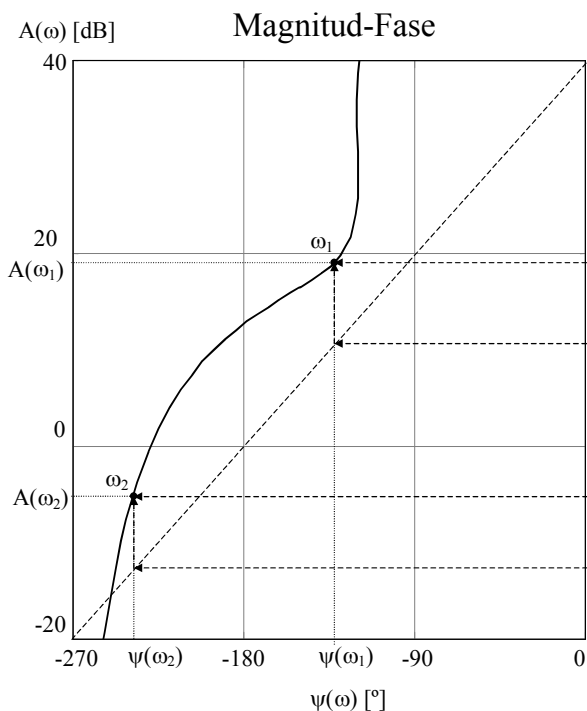
Elemento	Frecuencia de corte	Cambio de pendiente	Pendiente acumulada
$K=20 > 0$ ( $0^\circ$ )	No tienen. Es una horizontal por $-90^\circ$	$0^\circ/\text{dec}$	$0^\circ/\text{dec}$ (inicial)
$1/(j \cdot \omega)$ ( $-90^\circ$ )		$0^\circ/\text{dec}$	
$1/(1+10 \cdot j \cdot \omega)$	$0.1 \cdot \omega_p = 0.01$	$-45^\circ/\text{dec}$	$-45^\circ/\text{dec}$
$(1+4 \cdot j \cdot \omega)$	$0.1 \cdot \omega_z = 0.025$	$+45^\circ/\text{dec}$	$0^\circ/\text{dec}$
$1/(1+0.5 \cdot j \cdot \omega + 0.25 \cdot (j \cdot \omega)^2)$	$0.1 \cdot \omega_n = 0.2$	$-90^\circ/\text{dec}$	$-90^\circ/\text{dec}$
$1/(1+10 \cdot j \cdot \omega)$	$10 \cdot \omega_p = 1$	$+45^\circ/\text{dec}$	$-45^\circ/\text{dec}$
$(1+4 \cdot j \cdot \omega)$	$10 \cdot \omega_z = 2.5$	$-45^\circ/\text{dec}$	$-90^\circ/\text{dec}$
$1/(1+0.5 \cdot j \cdot \omega + 0.25 \cdot (j \cdot \omega)^2)$	$10 \cdot \omega_n = 20$	$+90^\circ/\text{dec}$	$0^\circ/\text{dec}$

## Ejemplo de diagrama de Bode de un sistema (III)

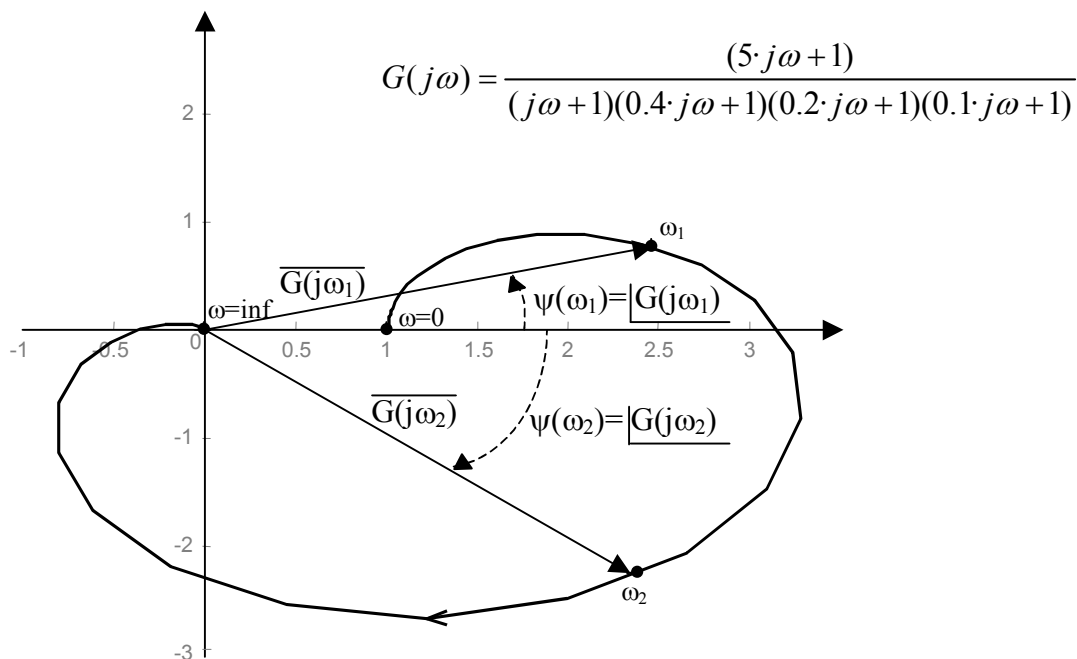


## Diagrama Magnitud-Fase

$$G(s) = \frac{32 \cdot (s + 0.25)}{s \cdot (s + 0.1) \cdot (s^2 + 2s + 4)}$$

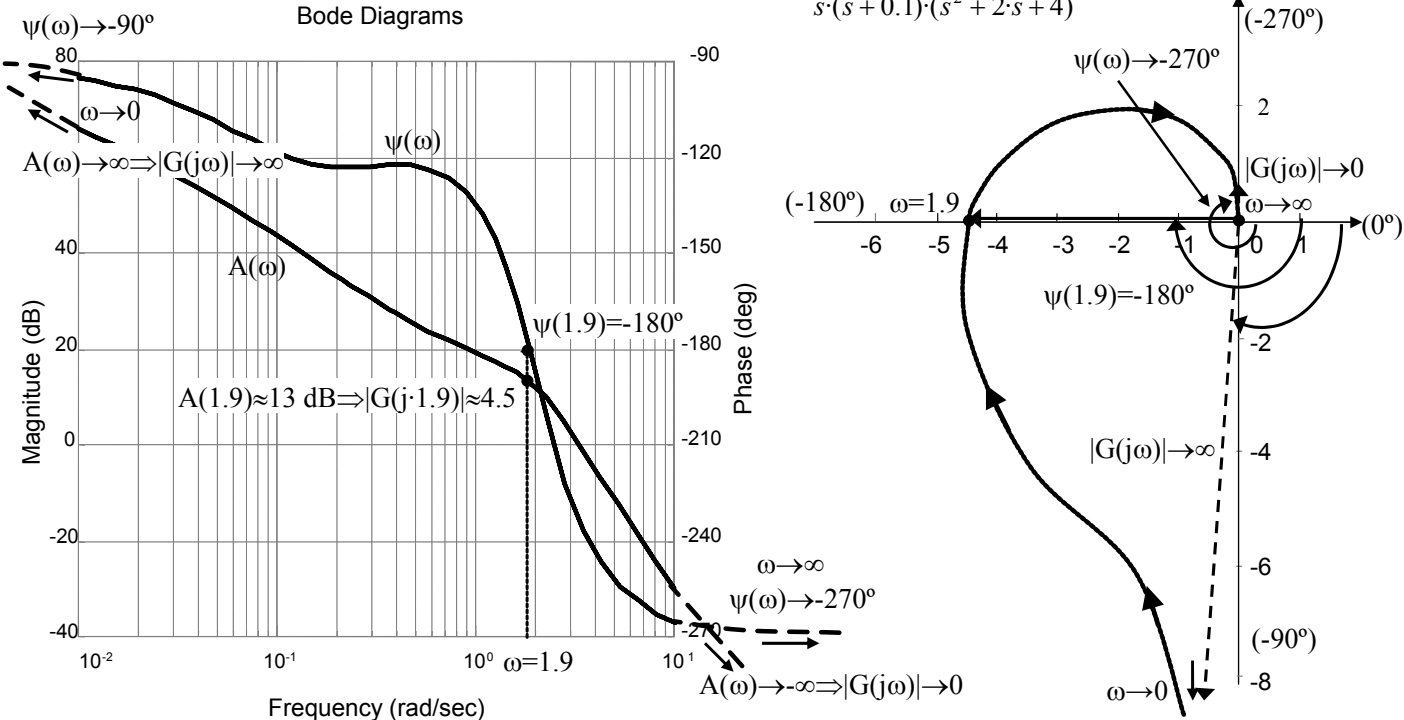


## Diagrama Polar

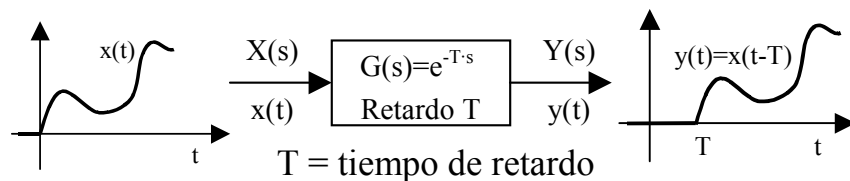


## Diagrama Polar (II)

Bode Diagrams



## Respuesta en Frecuencia de un Retardo Puro



$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = e^{-T \cdot s}$$

$$G(j\omega) = e^{-T \cdot \omega \cdot j} = |1| \angle -T \cdot \omega$$

$$A(\omega) = 0 \text{ [dB]}$$

$$\psi(\omega) = -T \cdot \omega \text{ [rad]}$$

