Tema 5

Análisis de los Sistemas Realimentados

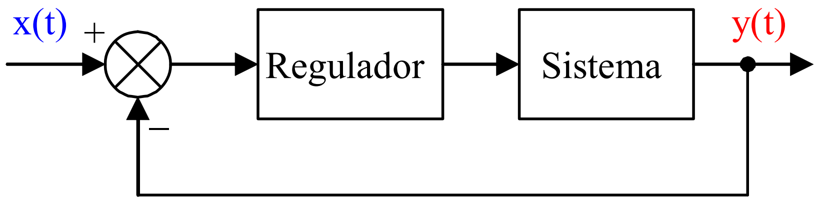
Indice

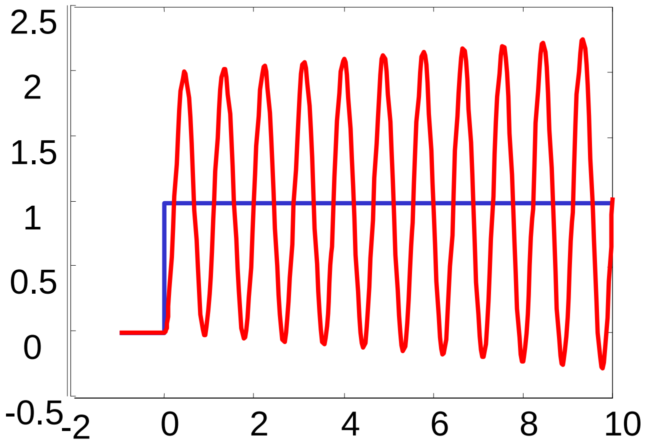
Análisis de los Sistemas Realimentados

¿Para qué realimentamos un sistema?

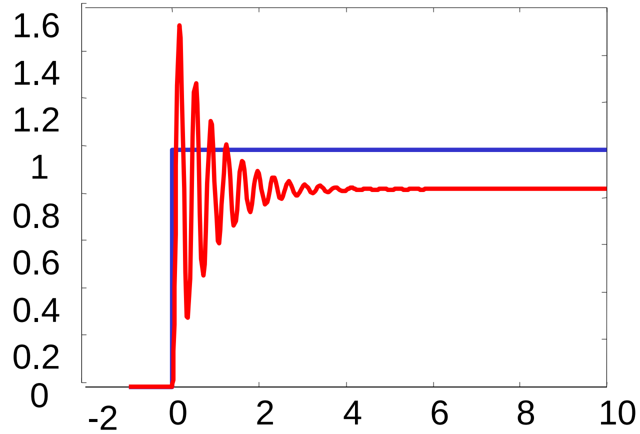
- Mejorar la Estabilidad:
  - Conseguir un sistema estable a partir de uno inestable.
  - Mejorar la estabilidad de un sistema estable.
- Precisión en Régimen Permanente:
  - Seguimiento, sin error en régimen permanente, de una señal de referencia.
  - Eliminar el efecto de perturbaciones sobre la salida del sistema.
- Respuesta Transitoria Adecuada:
  - Transitorio suficientemente rápido.
  - Amortiguamiento adecuado.

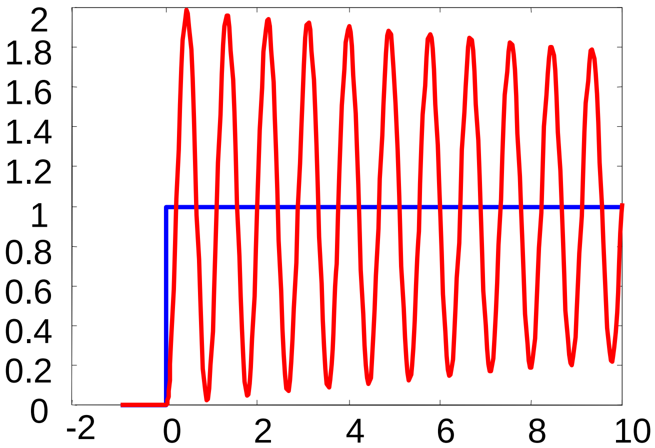
Mejorar la Estabilidad



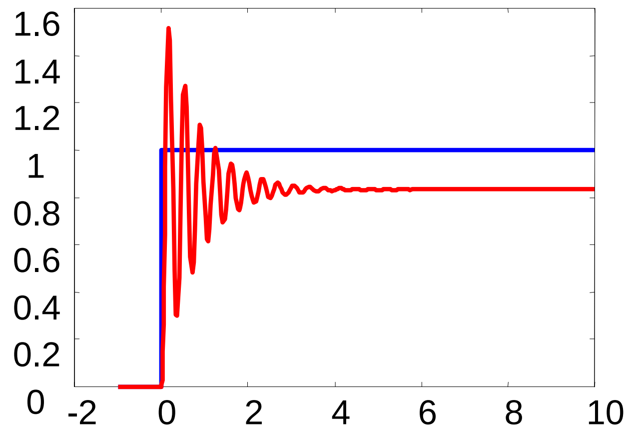


Sistema inestable ▶ Sistema estable



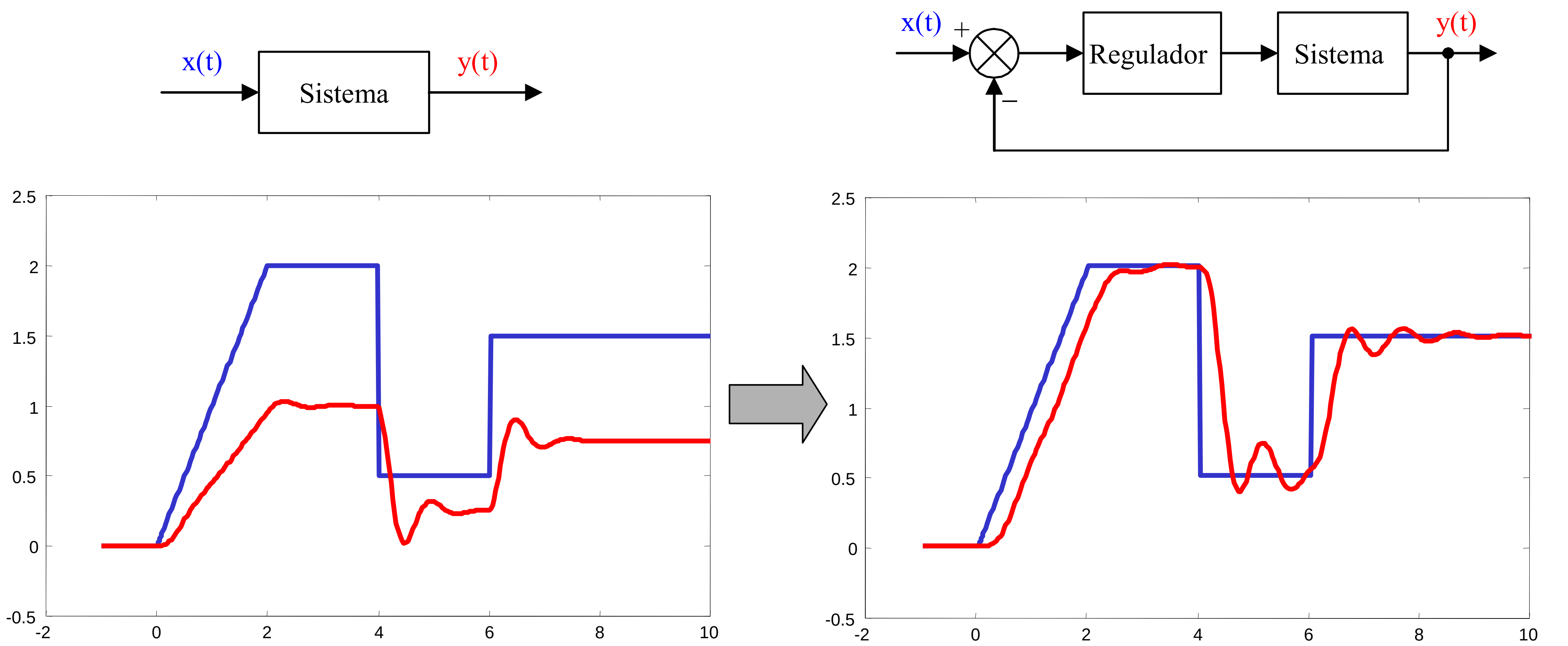


Poco estable ▶ Más estable



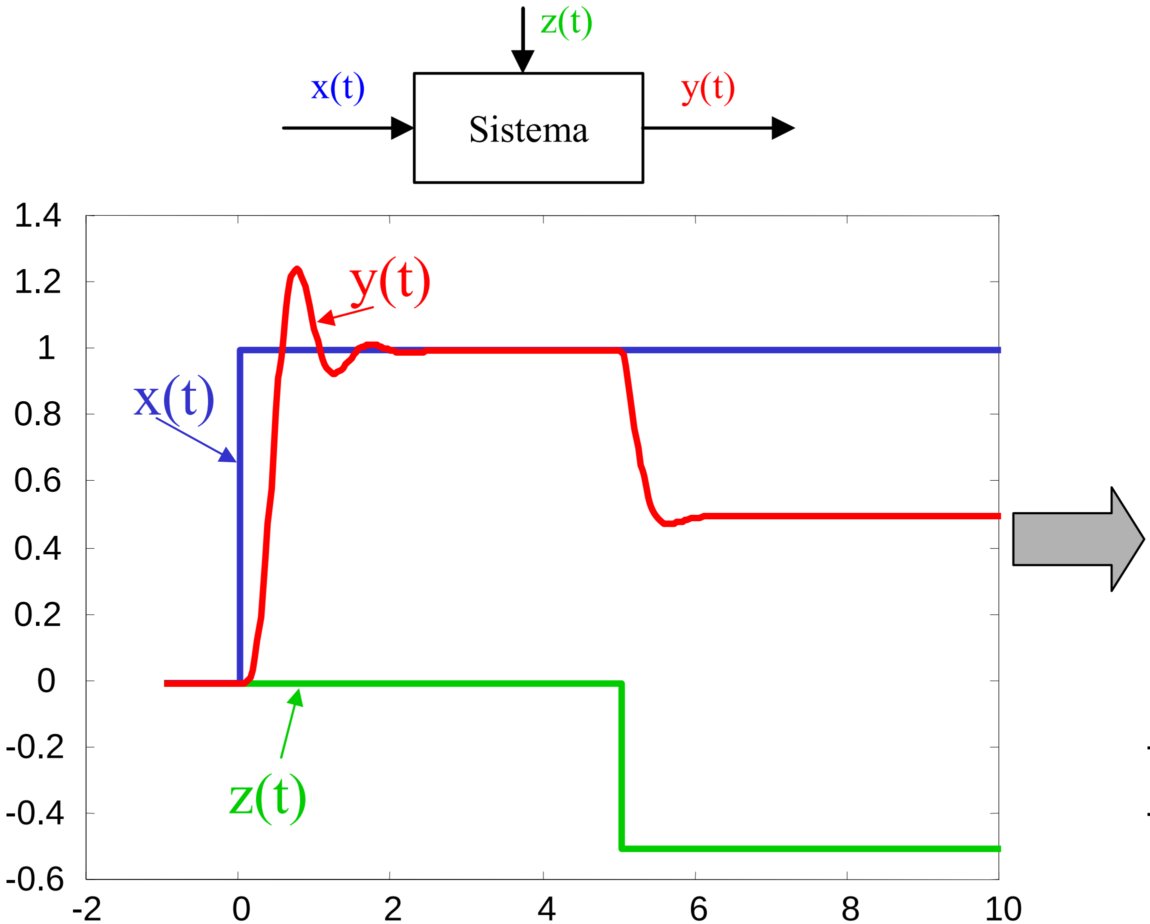
Precisión en Régimen Permanente (I)

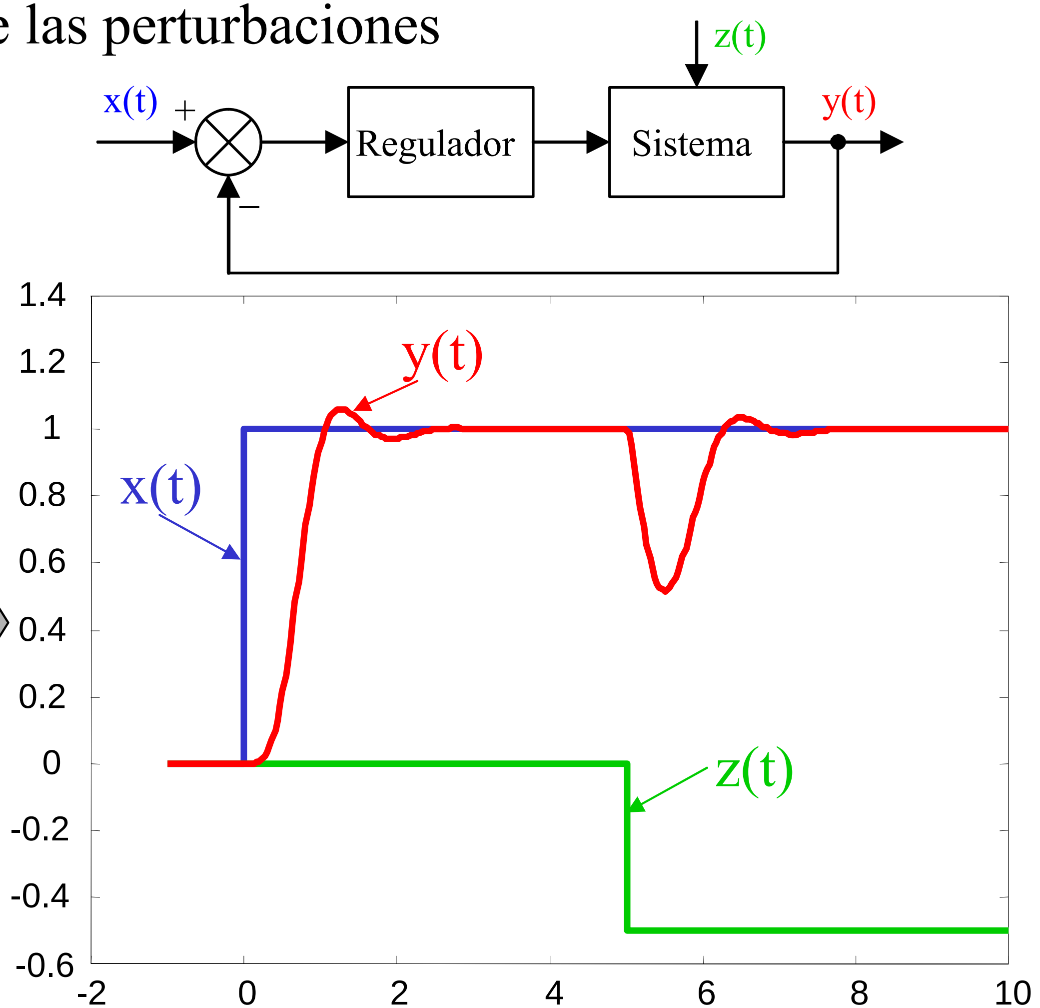
Seguimiento de una señal de referencia



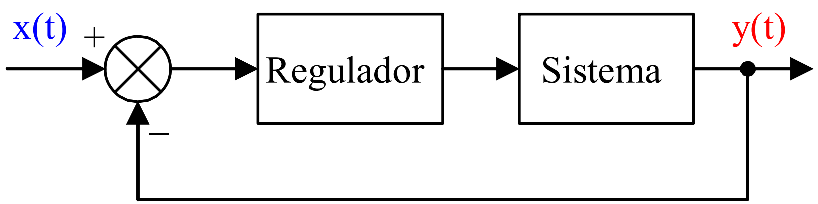
Precisión en Régimen Permanente (II)

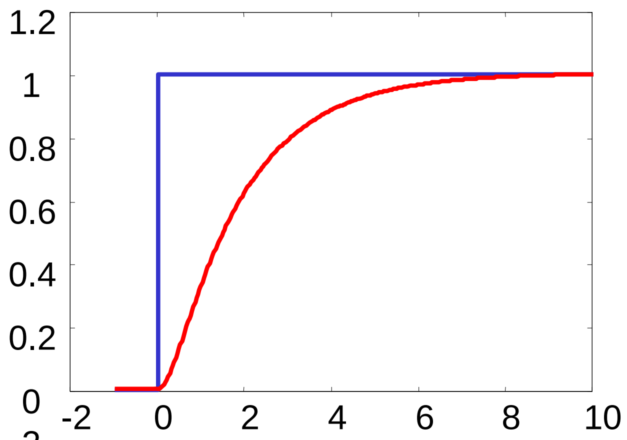
Eliminar el efecto de las perturbaciones



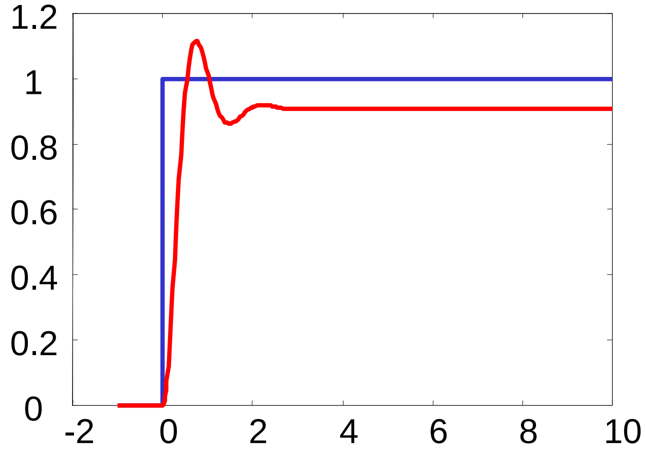


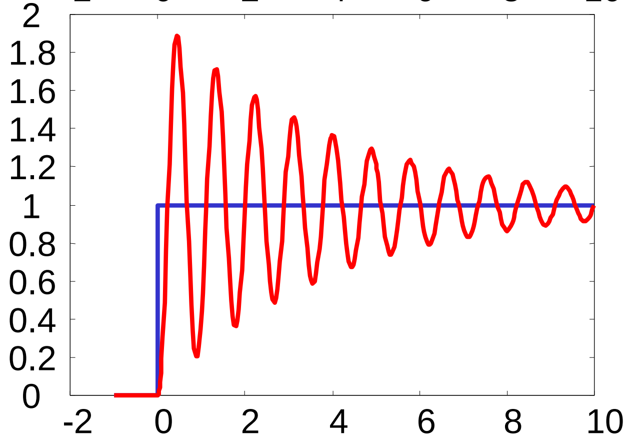
Respuesta Transitoria Adecuada



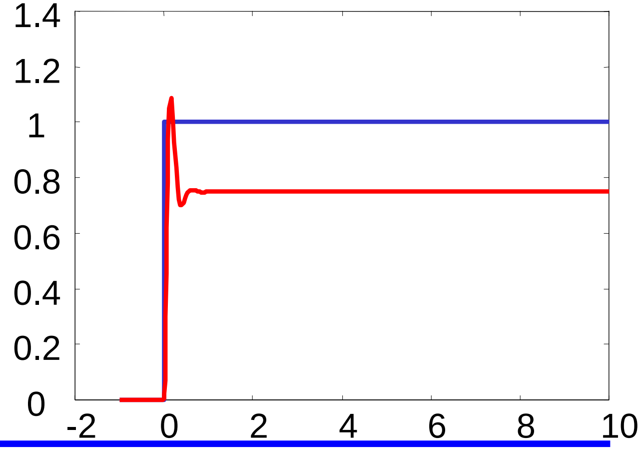


Transitorio suficientemente rápido

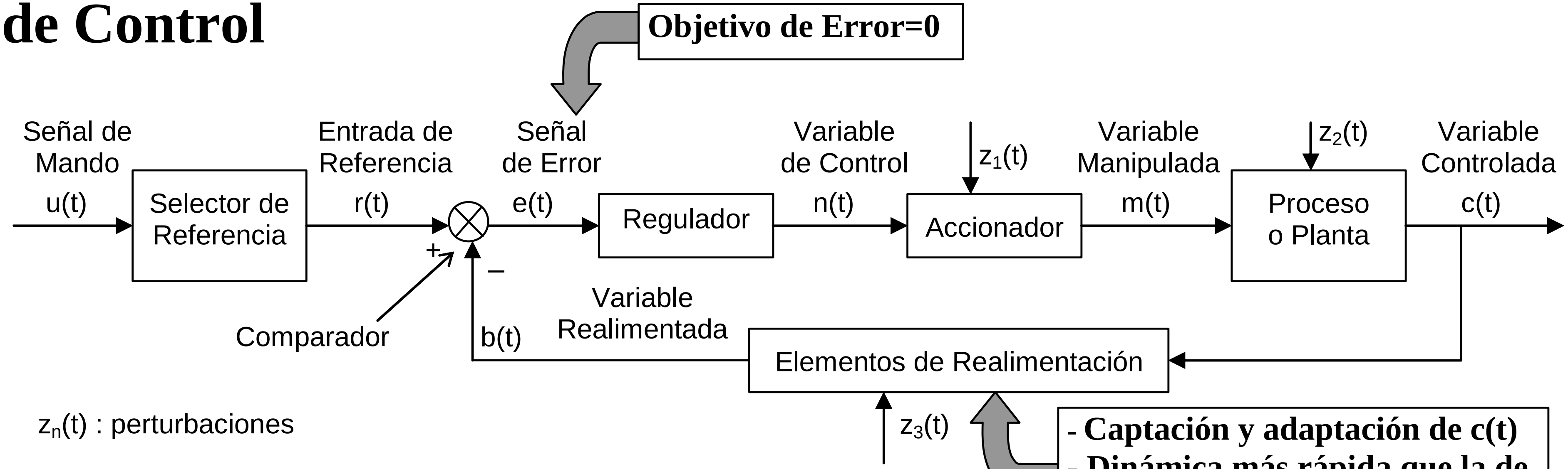




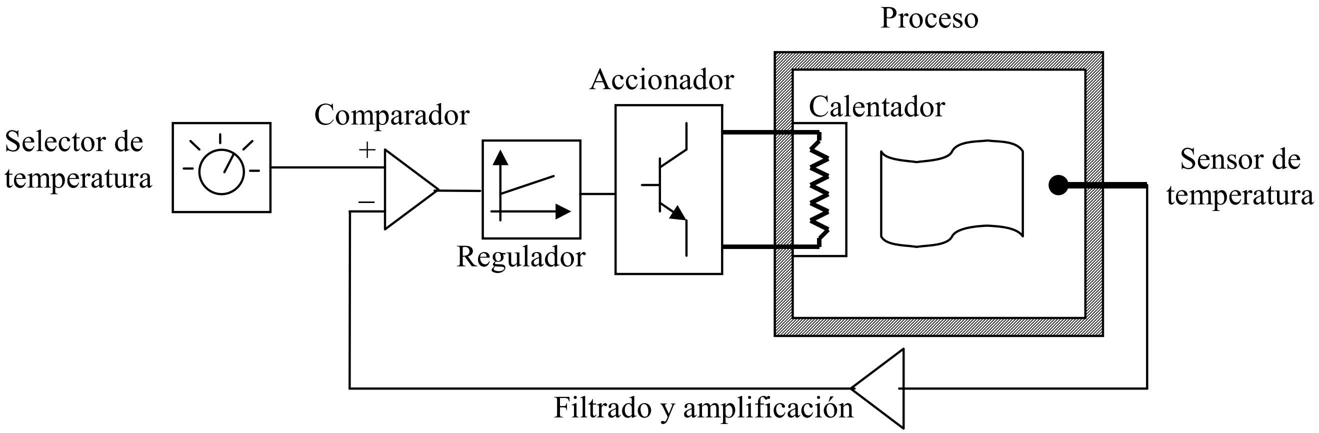
Amortiguamiento adecuado



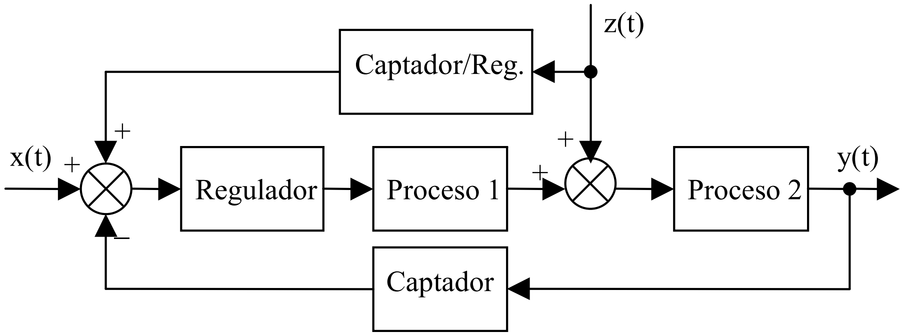
Bucle de Control

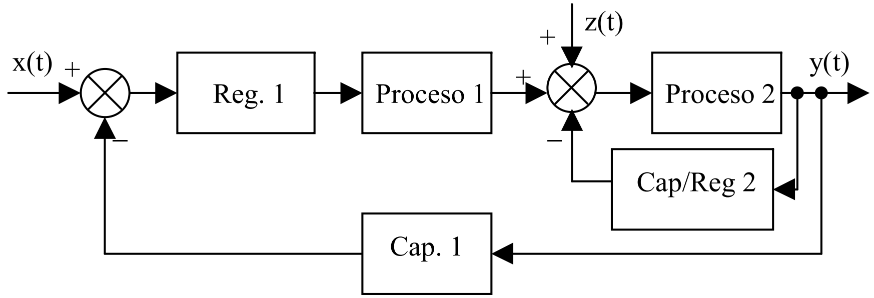


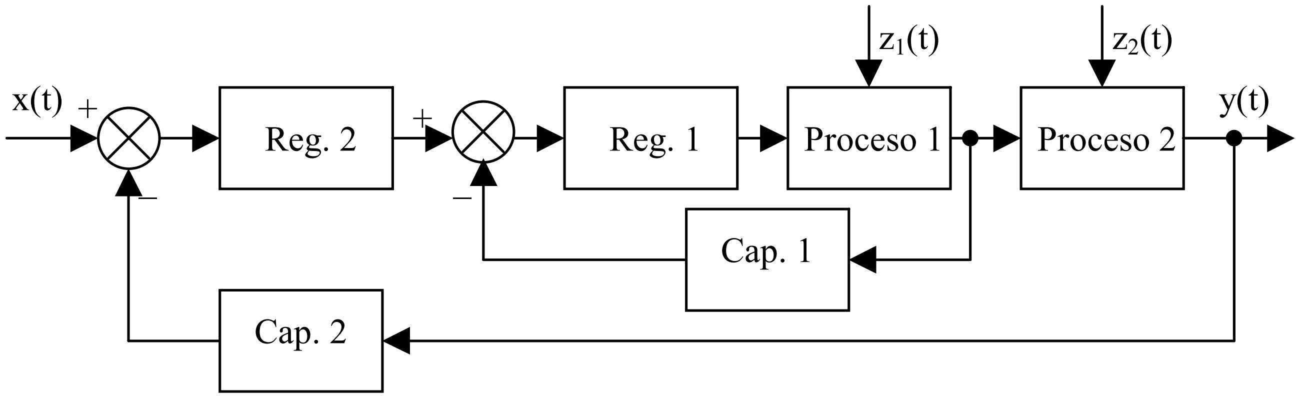
- **Captación y adaptación de c(t)**
- **Dinámica más rápida que la de la variable controlada**
- **Adecuar la relación de escala entre las magnitudes r(t) y c(t) y, si es necesario, convertir la magnitud de c(t) en otra b(t) de naturaleza comparable con r(t)**



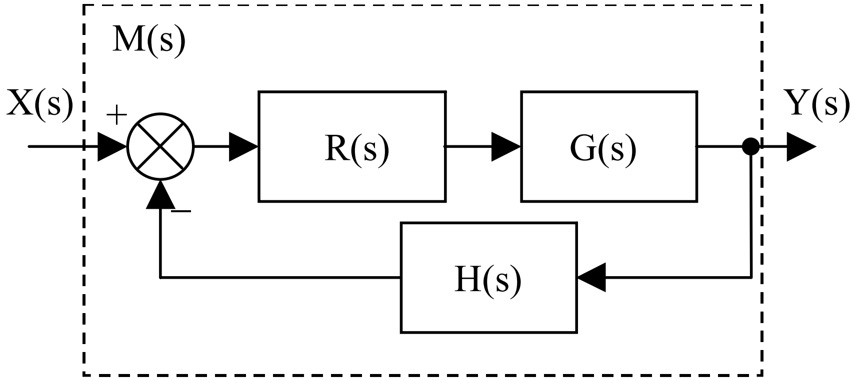
Otras Estructuras de Control







Función de Transferencia en Bucle Cerrado



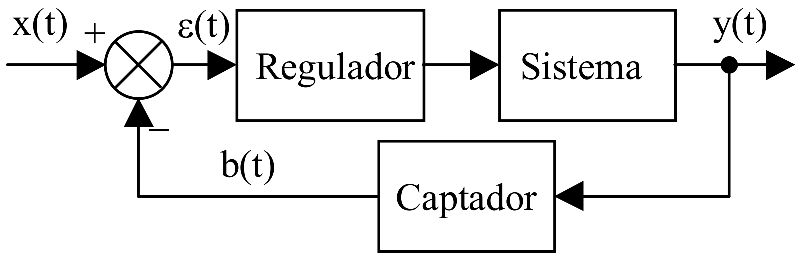
$$R(s) = K_R \frac{\Pi\{\text{ceros de R(s)}\}}{\Pi\{\text{polos de R(s)}\}} \quad G(s) = K_G \frac{\Pi\{\text{ceros de G(s)}\}}{\Pi\{\text{polos de G(s)}\}} \quad H(s) = K_H \frac{\Pi\{\text{ceros de H(s)}\}}{\Pi\{\text{polos de H(s)}\}} \quad M(s) = \frac{R(s)\cdot G(s)}{1 + R(s)\cdot G(s)\cdot H(s)}$$

$$M(s) = \frac{K_R \cdot K_G \cdot K_H \cdot \Pi\{\text{ceros de R(s)}\}\cdot \Pi\{\text{ceros de G(s)}\}\cdot \Pi\{\text{polos de H(s)}\}}{\Pi\{\text{polos de R(s)}\}\cdot \Pi\{\text{polos de G(s)}\}\cdot \Pi\{\text{polos de H(s)}\} + K_R \cdot K_G \cdot K_H \cdot \Pi\{\text{ceros de R(s)}\}\cdot \Pi\{\text{ceros de G(s)}\}\cdot \Pi\{\text{ceros de H(s)}\}}$$

- Los ceros de M(s) son los ceros de R(s) y G(s) más los polos de H(s).
- Los polos de M(s) se obtienen resolviendo la Ecuación Característica del sistema, que es el denominador de M(S) igualado a cero: 1+R(s)·G(s)·H(s)=0

Error en Régimen Permanente de un Sistema Realimentado

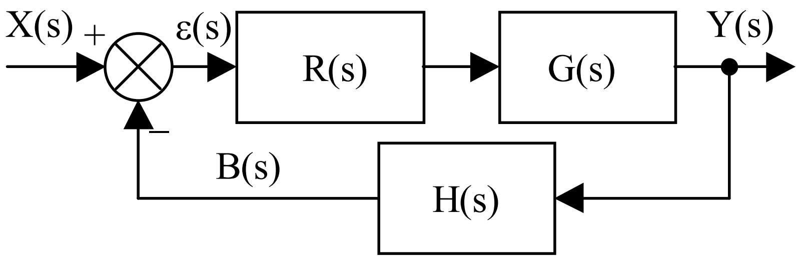
- Error en Régimen Permanente:



$$e_{RP} = lim_{t\to\infty} e(t) = e(\infty) = lim_{t\to\infty}(x(t) - h_0 \cdot y(t))$$

$$e_{RP} = lim_{s\to 0} s \cdot E(s) = lim_{s\to 0} s \cdot (X(s) - h_0 \cdot Y(s))$$

$$Y(s) = M(s) \cdot X(s) = \frac{R(s) \cdot G(s)}{1 + R(s) \cdot G(s) \cdot H(s)} X(s)$$



$$e_{RP} = lim_{s\to 0} s \cdot X(s) \cdot (1 - h_0 \cdot M(s))$$

$$e_{RP} = lim_{s\to 0} s \cdot X(s) \frac{1 + R(s) \cdot G(s) \cdot (H(s) - h_0)}{1 + R(s) \cdot G(s) \cdot H(s)}$$

$h_0 = lim_{s\to 0} H(s)$ Ganancia estática de H(s)

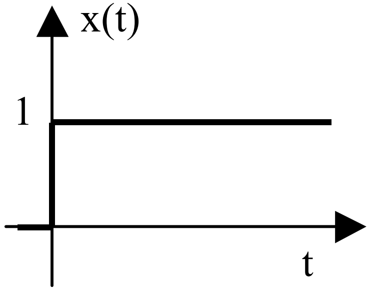
El error en régimen permanente dependerá de la señal de entrada utilizada y de las funciones de transferencia del bucle.

Señales de Entrada para la Medida del Error

- Escalón unitario:

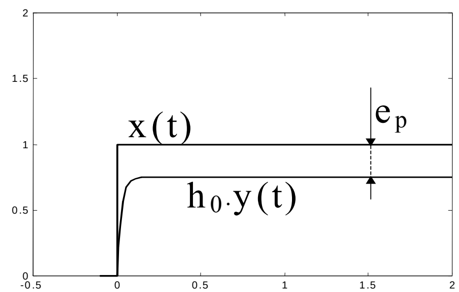
$$x(t) = u_0(t)$$

$$X(s) = \frac{1}{s}$$



Error de posición:

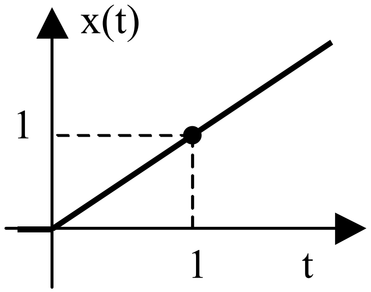
Medido en tanto por uno o tanto por ciento [%]



- Rampa unitaria:

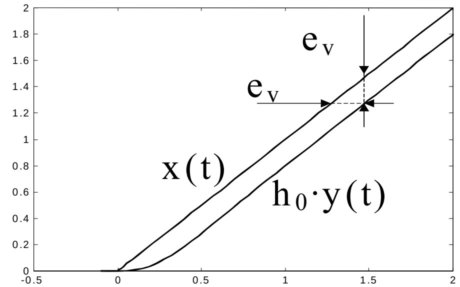
$$x(t) = t \cdot u_0(t)$$

$$X(s) = \frac{1}{s^2}$$



Error de velocidad:

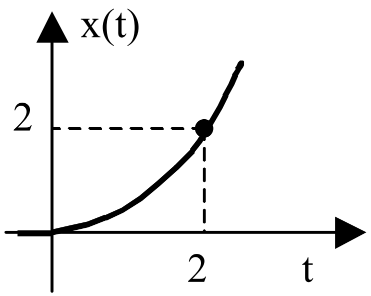
Medido en segundos [s]



- Parábola:

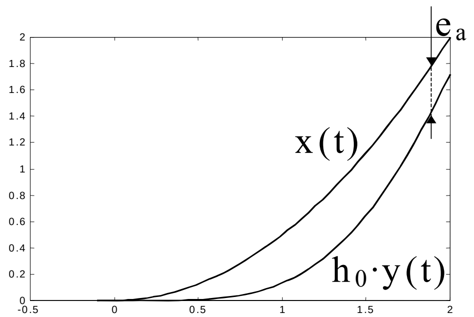
$$x(t) = \frac{t^2}{2} u_0(t)$$

$$X(s) = \frac{1}{s^3}$$

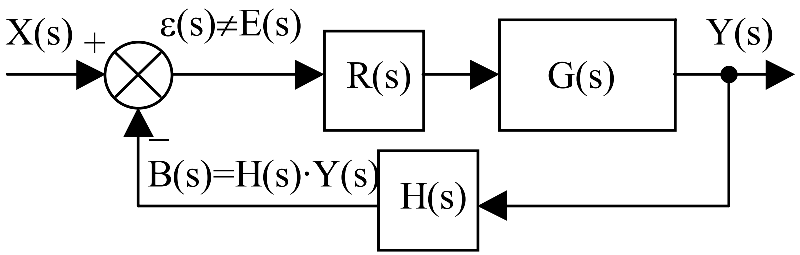


Error de aceleración:

Medido en valor absoluto frente a la parábola de prueba



Calculo del Error de Posición



$$e_{RP} = \lim_{s\to 0} s\cdot\left[X(s) - h_0 \cdot Y(s)\right] =$$

$$= \lim_{s\to 0} s\cdot X(s)\frac{1 + R(s)\cdot G(s)\cdot(H(s) - h_0)}{1 + R(s)\cdot G(s)\cdot H(s)}$$

- Error de posición: $X(s)=1/s$

$$h_0 = \lim_{s\to 0} H(s)$$

$$e_p = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1 + h_0\cdot R(s)\cdot G(s)} = \frac{1}{1 + K_p}$$

$$K_p = \lim_{s\to 0} h_0\cdot R(s)\cdot G(s)$$

Tipo de un Sistema: Es el número de polos en el origen que tiene el sistema. (número de integradores)

$$R(s)\cdot G(s) = \frac{N(s)}{s^n\cdot P(s)} \qquad n = \text{tipo del sistema}$$

- Si R(s)·G(s) es de tipo cero:

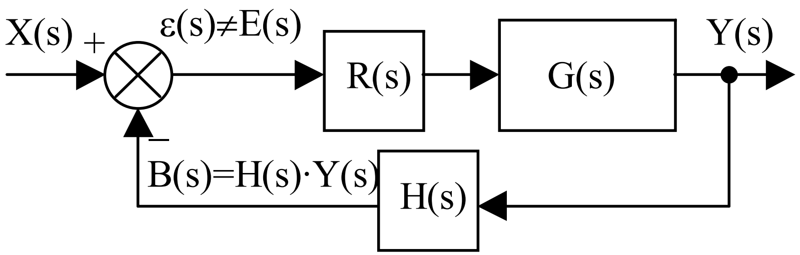
K_p=cte. ⇒ e_p=cte.

- Si R(s)·G(s) es de tipo uno o superior:

K_p=inf. ⇒ e_p=0

TIPO	0	1	2
e_p	$1/(1+K_p)$	0	0

Calculo del Error de Velocidad y Aceleración si H(s)=H(0)



$$e_{RP} = \lim_{s\to 0} s\cdot X(s)\frac{1+R(s)\cdot G(s)\cdot(H(s)-h_0)}{1+R(s)\cdot G(s)\cdot H(s)}$$

- Error de velocidad: $X(s)=\dfrac{1}{s^2}$

$$h_0 = \lim_{s\to 0} H(s)$$

$$e_v = \lim_{s\to 0}\frac{1}{s\cdot h_0\cdot R(s)\cdot G(s)} = \frac{1}{K_v}$$

$$K_v = \lim_{s\to 0} s\cdot h_0\cdot R(s)\cdot G(s)$$

- Error de aceleración: $X(s)=\dfrac{1}{s^3}$

$$e_a = \lim_{s\to 0}\frac{1}{s^2\cdot h_0\cdot R(s)\cdot G(s)} = \frac{1}{K_a}$$

$$K_a = \lim_{s\to 0} s^2\cdot h_0\cdot R(s)\cdot G(s)$$

TIPO	0	1	2
e_p	$1/(1+K_p)$	0	0
e_v	∞	$1/K_v$	0
e_a	∞	∞	$1/K_a$

El Lugar de las Raíces (I): W.R. Evans (1948)

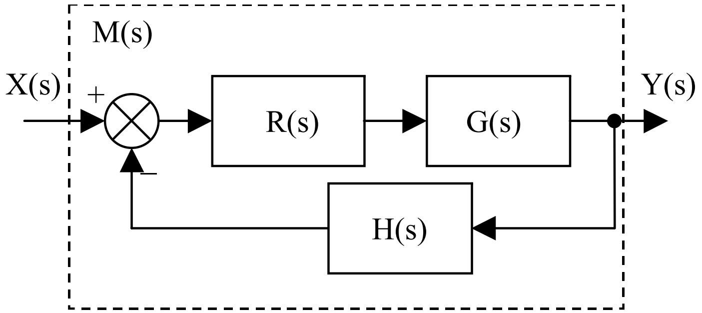
• W.R. Evans desarrolló un método matemático mediante el cual es posible ver gráficamente el valor de los polos de un sistema en bucle cerrado (polos de M(s)) cuando se varía un parámetro del sistema (K) desde cero hasta infinito.

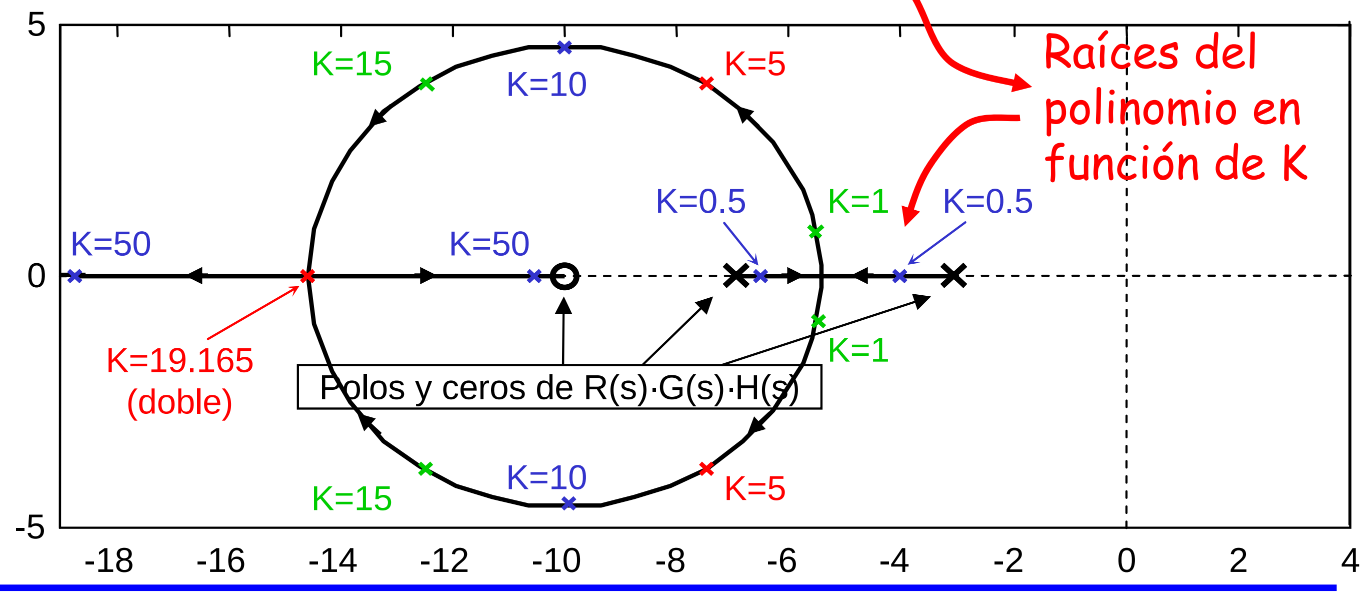
$$R(s) = K \quad G(s) = \frac{(s+10)}{(s+3)} \quad H(s) = \frac{1}{(s+7)}$$

$$M(s) = \frac{R(s)\cdot G(s)}{1 + R(s)\cdot G(s)\cdot H(s)} = \frac{K\cdot(s+10)\cdot(s+7)}{(s+3)\cdot(s+7) + K\cdot(s+10)}$$

$$1 + R(s)\cdot G(s)\cdot H(s) = 1 + K\cdot\frac{(s+10)}{(s+3)\cdot(s+7)} = 0$$

$$s^2 + (10+K)\cdot s + (10\cdot K + 21) = 0 \qquad K: 0 \to \infty$$

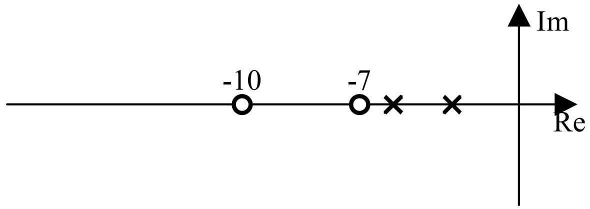


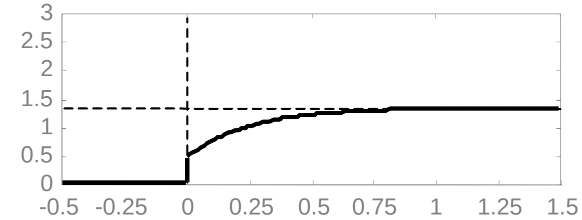


El Lugar de las Raíces (II):

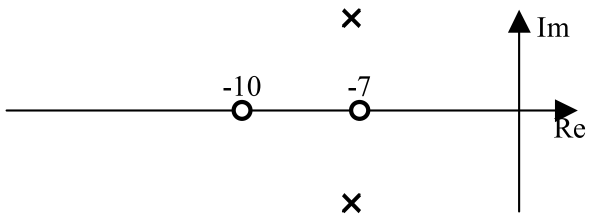
Respuesta ante un escalón unitario

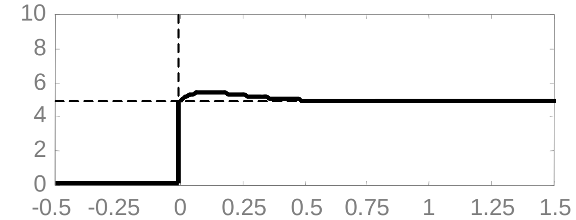
$$K = 0.5 \qquad M(s) = \frac{0.5\cdot(s+10)\cdot(s+7)}{s^2 + 10.5\cdot s + 26}$$



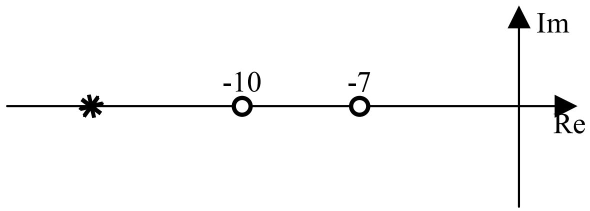


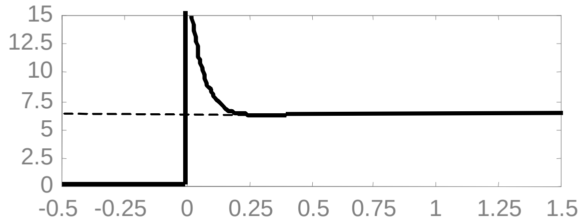
$$K = 5 \qquad M(s) = \frac{5\cdot(s+10)\cdot(s+7)}{s^2 + 15\cdot s + 71}$$



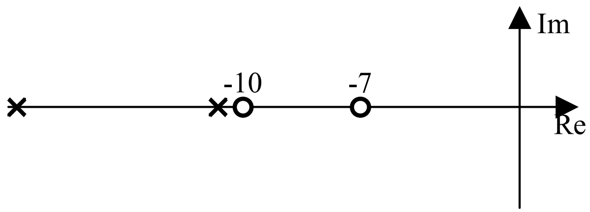


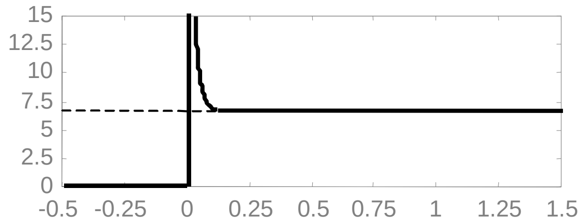
$$K = 19.165 \qquad M(s) = \frac{19.165\cdot(s+10)\cdot(s+7)}{s^2 + 29.165\cdot s + 212.65}$$



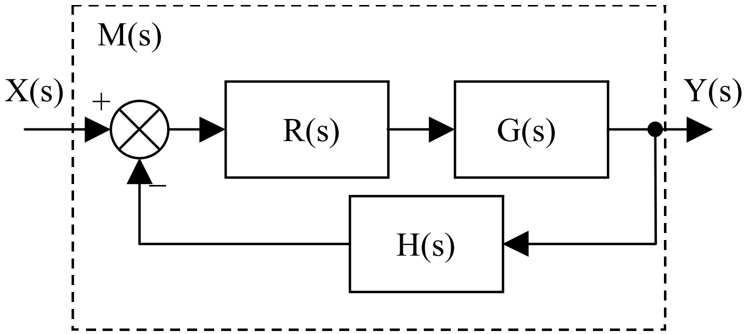


$$K = 50 \qquad M(s) = \frac{50\cdot(s+10)\cdot(s+7)}{s^2 + 60\cdot s + 521}$$





Reglas para la Construcción del Lugar de las Raíces



- **Ecuación característica:**

$$1 + R(s)\cdot G(s)\cdot H(s) = 0 \Rightarrow 1 + K\frac{\prod_{j=1}^{m}(s - z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s - p_i)} = 0$$

•**Condición General:**

$$K\cdot\frac{\prod_{j=1}^{m}(s - z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s - p_i)} = -1$$

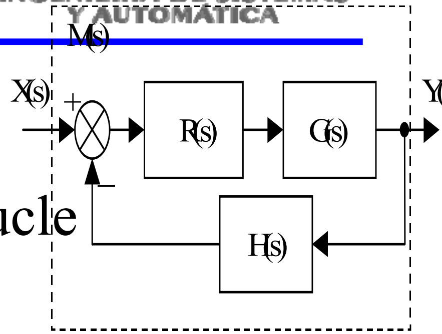
•**Criterio del Argumento** (determina si un punto s pertenece o no al LR)

$$\sum_{j=1}^{m}\arg\{s - z_j\} - \sum_{i=1}^{n}\arg\{s - p_i\} = (2q+1)\pi \Rightarrow \sum_{j=1}^{m}\theta_{z_j} - \sum_{i=1}^{n}\theta_{p_i} = (2q+1)\pi$$

•**Criterio del Módulo** (determina el valor de K correspondiente a un punto del LR)

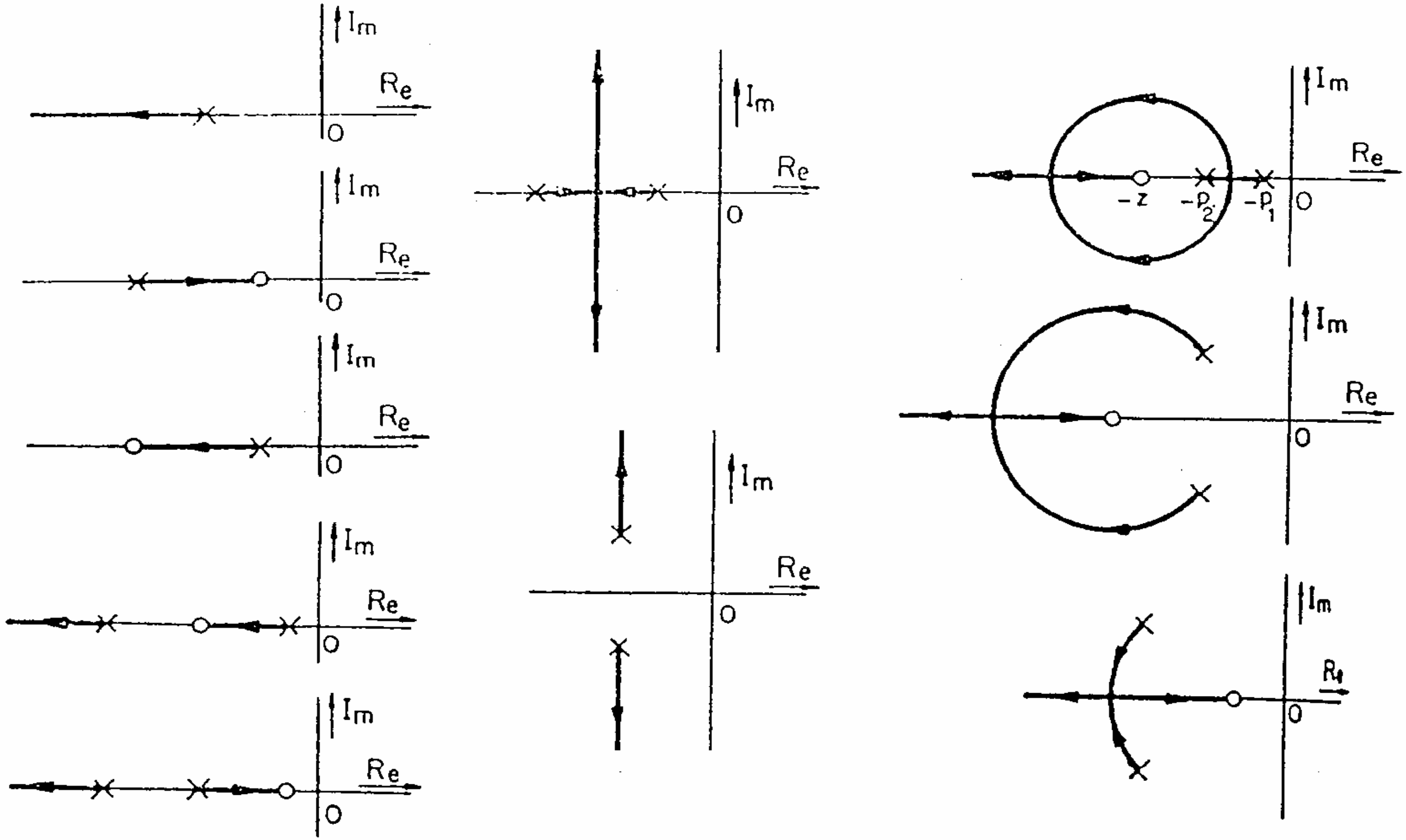
$$K = \frac{\prod_{i=1}^{n}|s - p_i|}{\prod_{j=1}^{m}|s - z_j|} \Rightarrow K = \frac{\prod_{i=1}^{n} dp_i}{\prod_{j=1}^{m} dz_j}$$

Reglas para la Construcción del Lugar de las Raíces

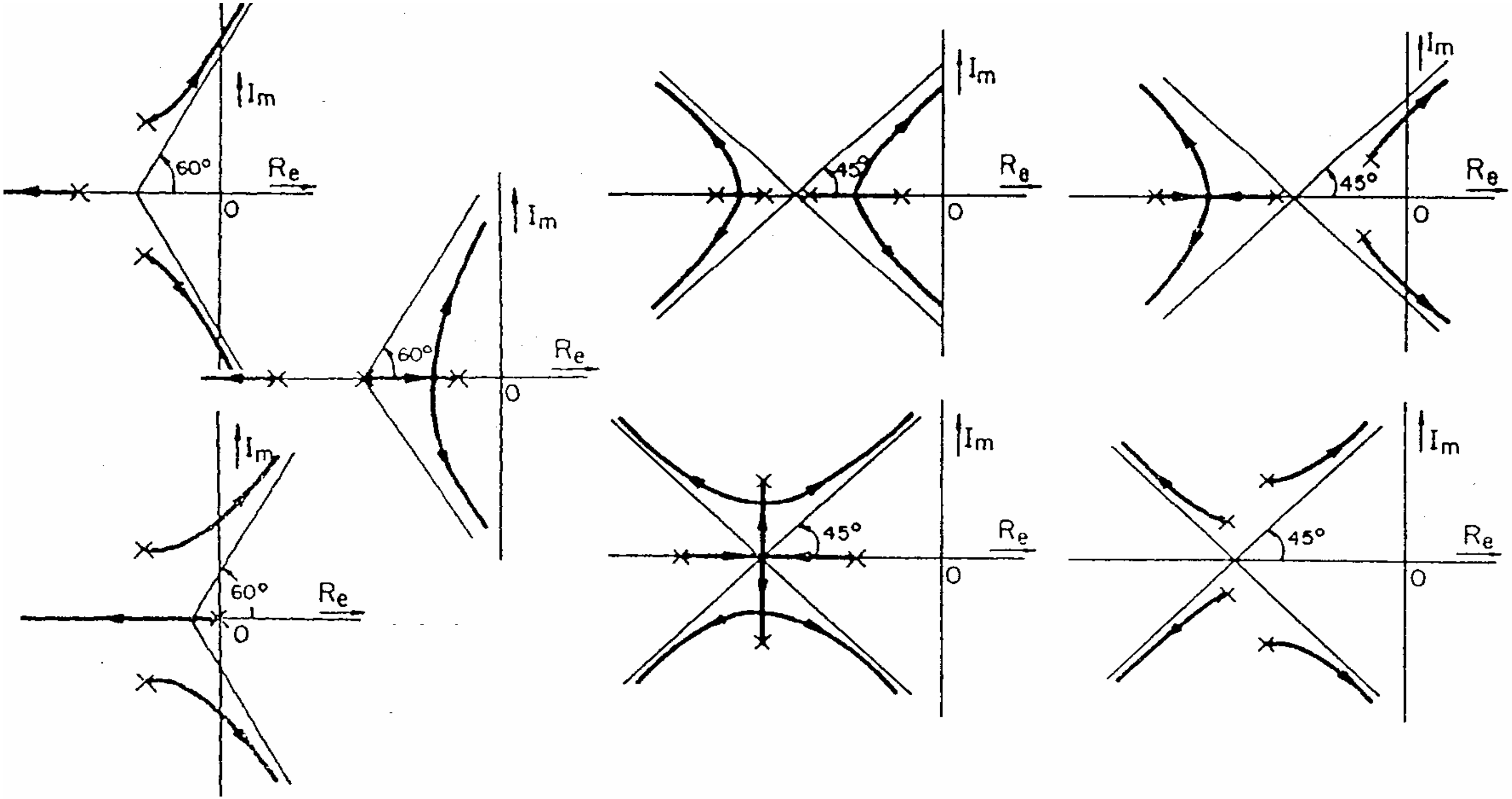


- **Nº de ramas:** Es el número de polos de la función de transferencia en bucle abierto R(s)·G(s)·H(s).
- **Puntos de comienzo** (K=0) son los polos R(s)·G(s)·H(s). **Los puntos finales** (K=∞) son los ceros de R(s)·G(s)·H(s) y/o las asíntotas.
- **Lugar en el eje real**. Los puntos del eje real que pertenecen al LR son los que dejan a la derecha un número impar de ceros y polos de R(s)·G(s)·H(s).
- El LR es **simétrico** respecto al eje real ya que las raíces son siempre reales o pares de complejos conjugados.
- Asíntotas forman un ángulo θ_a con el eje real: $$\theta_a = \frac{(2 \cdot q + 1) \cdot \pi}{n - m} \qquad q = 0,1,2 \ldots n - m - 1$$
- Centroide de las asíntotas: $$\sigma_C = \frac{\sum polosRGH - \sum cerosRGH}{n - m}$$
- Puntos de dispersión (deben pertenecer al LR): $$K = f(s) \Rightarrow \frac{dK}{ds} = 0$$

Ejemplos de Trazado del Lugar de las Raíces (I)



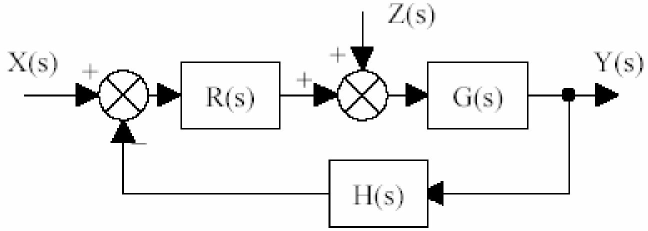
Ejemplos de Trazado del Lugar de las Raíces (II)



Control de las Perturbaciones (I):

- Interesa que la ganancia del sistema en régimen permanente ante las perturbaciones sea nula y que el transitorio tenga una oscilación y duración mínimas.

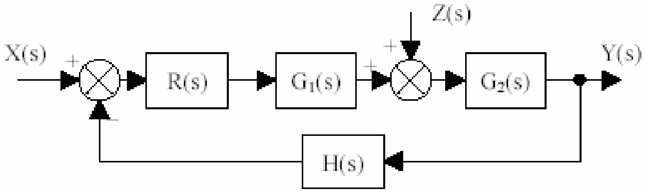
A)



$$M(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{R(s)\cdot G(s)}{1+R(s)\cdot G(s)\cdot H(s)}$$ FdT ante la entrada

$$N(s)=\frac{Y(s)}{Z(s)}=\frac{G(s)}{1+R(s)\cdot G(s)\cdot H(s)}$$ FdT ante la perturbación

B)

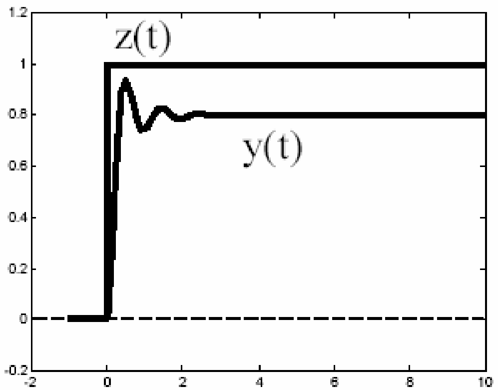


$$M(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{R(s)\cdot G_1(s)\cdot G_2(s)}{1+R(s)\cdot G_1(s)\cdot G_2(s)\cdot H(s)}$$ FdT ante la entrada

$$N(s)=\frac{Y(s)}{Z(s)}=\frac{G_2(s)}{1+R(s)\cdot G_1(s)\cdot G_2(s)\cdot H(s)}$$ FdT ante la perturbación

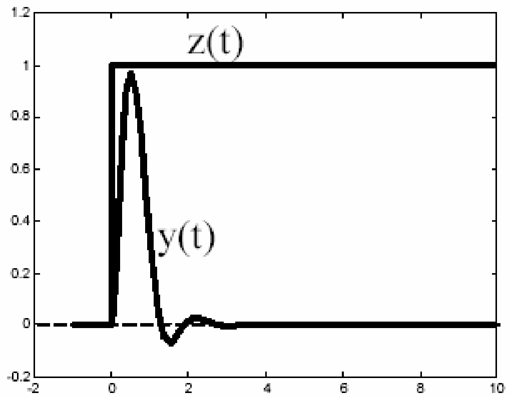
Si: A) R(s) es de Tipo 0

B) $R(s)\cdot G_1(s)$ es de Tipo 0



Si: A) R(s) es de Tipo 1

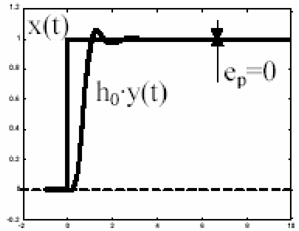
B) $R(s)\cdot G_1(s)$ es de Tipo 1



Control de las Perturbaciones (II):

- **Estabilidad:** Es la misma ante la entrada y la perturbación. Los polos son las raíces de la ecuación característica 1+R(s)·G(s)·H(s).

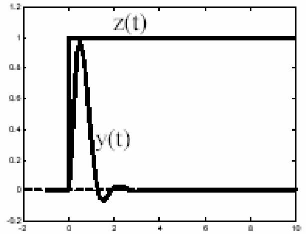
- **Régimen permanente:** Si existe un integrador (polo en el origen) entre la entrada y la perturbación (normalmente en R(s)), su acción integral anula al menos el e_p en régimen permanente y además hace que la ganancia del sistema en régimen permanente ante la perturbación sea nula.



Por ejemplo, si: $R(s)$ Tipo 1; $G(s)$ Tipo 0; $h_0 = lim_{s\to 0} H(s)$

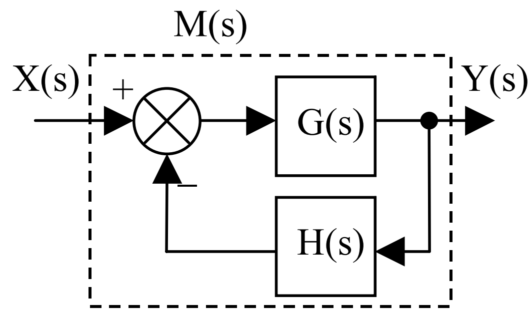
$$X(s) = \frac{1}{s} \quad Y(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{R(s)\cdot G(s)}{1+R(s)\cdot G(s)\cdot H(s)} \quad y(\infty) = lim_{s\to 0} s \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{R(s)\cdot G(s)}{1+R(s)\cdot G(s)\cdot H(s)} = \frac{1}{h_0}$$

$$Z(s) = \frac{1}{s} \quad Y(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{G(s)}{1+R(s)\cdot G(s)\cdot H(s)} \quad y(\infty) = lim_{s\to 0} s \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{G(s)}{1+R(s)\cdot G(s)\cdot H(s)} = 0$$



- **Régimen transitorio:** Las respuestas transitorias de M(s) y N(s) están relacionadas, comparten el mismo denominador aunque tienen distinto numerador. Hay que buscar una combinación de ceros y polos para ambas funciones de transferencia que den un comportamiento aceptable en ambos casos.

Análisis de la Estabilidad de un Sistema Realimentado



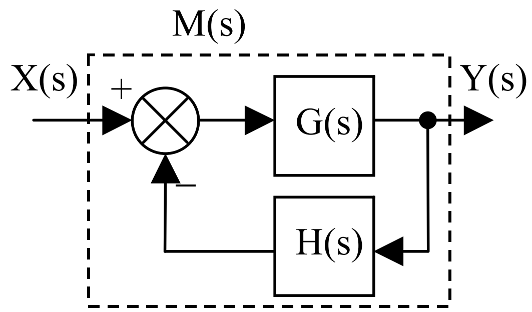
Se trata de analizar la estabilidad del sistema realimentado negativamente, M(s), a partir de la respuesta en frecuencia del sistema en bucle abierto, G(s)·H(s).

- **Margen de fase y de ganancia**: Permite determinar el grado de estabilidad de un sistema realimentado M(s), sobre los diagramas de Bode, Magnitud-Fase o Polar de G(s)·H(s). La FdT G(s)·H(s) tiene que ser de **Fase Mínima** (sistemas con todos sus polos y ceros con parte real negativa y, como máximo, un único polo en el origen).

- **Criterio de Nyquist**: Es un estudio de la estabilidad de un sistema realimentado M(s), realizado a partir de las raíces de la ecuación característica 1+G(s)·H(s)=0 y de la respuesta en frecuencia de G(s)·H(s).

Margen de Fase y de Ganancia

Para sistemas de **fase mínima** en bucle abierto, si la respuesta en frecuencia de la función de transferencia G(s)·H(s) presenta frecuencias en las que la ganancia es positiva a la vez que la fase tiene un valor inferior a -180º (entre -180º y -360º) el sistema realimentado negativamente, M(s), será inestable.



• **Margen de fase**: Es el ángulo (en grados) que habría que restarle a la fase de G(s)·H(s) para volver inestable a M(s). Sobre las representaciones gráficas de la respuesta en frecuencia de G(s)·H(s), es el ángulo que le falta a la fase para llegar a -180º cuando la ganancia es 1 (0 dB). *(Si la ganancia es siempre inferior a 0 dB el margen de fase será infinito).*

• **Margen de ganancia**: Es el valor por el que habría que multiplicar (o los dB que habría que sumar a la ganancia de G(s)·H(s), para que M(s) se vuelva inestable. Es decir, para que cuando la fase sea -180º la ganancia fuese 1 (0 dB). *(Si $\Psi(\omega)$ no corta nunca -180º el margen de ganancia será infinito).*

Cálculo Matemático del Margen de Fase y de Ganancia

$$\text{Sistema 1: } G(s)\cdot H(s)=\frac{5}{s\cdot(s^2+2\cdot s+4)};\quad G(j\omega)\cdot H(j\omega)=\frac{1.25}{j\omega\cdot(0.25\cdot(j\omega)^2+0.5\cdot j\omega+1)}$$

$$\text{Sistema 2: } G(s)\cdot H(s)=\frac{15}{s\cdot(s^2+2\cdot s+4)};\quad G(j\omega)\cdot H(j\omega)=\frac{3.75}{j\omega\cdot(0.25\cdot(j\omega)^2+0.5\cdot j\omega+1)}$$

- **Margen de fase**: Es el ángulo que le falta a |<u>G(jω)·H(jω)</u> para llegar a -180º cuando |G(jω)·H(jω)| es 1 (0 dB).

$$\text{Sistema 1: } \left|G(j\omega_f)\cdot H(j\omega_f)\right|=\left|\frac{1.25}{j\omega_f\cdot(0.25\cdot(j\omega_f)^2+0.5\cdot j\omega_f+1)}\right|=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_f=1.4\Rightarrow \underline{G(j\cdot1.4)\cdot H(j\cdot1.4)}=\underline{\frac{1.25}{j\cdot1.4\cdot(0.25\cdot(j\cdot1.4)^2+0.5\cdot j\cdot1.4+1)}}=-146.4^{\circ}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma=180^{\circ}-146.4^{\circ}=33.6^{\circ}\text{ Estable}$$

$$\text{Sistema 2: } \left|G(j\omega_f)\cdot H(j\omega_f)\right|=\left|\frac{3.75}{j\omega_f\cdot(0.25\cdot(j\omega_f)^2+0.5\cdot j\omega_f+1)}\right|=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_f=2.6\Rightarrow \underline{G(j\cdot2.6)\cdot H(j\cdot2.6)}=\underline{\frac{3.75}{j\cdot2.6\cdot(0.25\cdot(j\cdot2.6)^2+0.5\cdot j\cdot2.6+1)}}=-207.3^{\circ}$$

$$\Rightarrow \gamma=180^{\circ}-207.3^{\circ}=-27.3^{\circ}\text{ Inestable}$$

- **Margen de ganancia**: Es el inverso de |G(jω)·H(jω)| cuando |<u>G(jω)·H(jω)</u> es -180º.

$$\text{Sistema 1: } \underline{G(j\omega_g)\cdot H(j\omega_g)}=\underline{\frac{1.25}{j\omega_g\cdot(0.25\cdot(j\omega_g)^2+0.5\cdot j\omega_g+1)}}=-180^{\circ}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_g=2\Rightarrow \left|G(j\cdot2)\cdot H(j\cdot2)\right|=\left|\frac{1.25}{j\cdot2\cdot(0.25\cdot(j\cdot2)^2+0.5\cdot j\cdot2+1)}\right|=0.625\Rightarrow$$

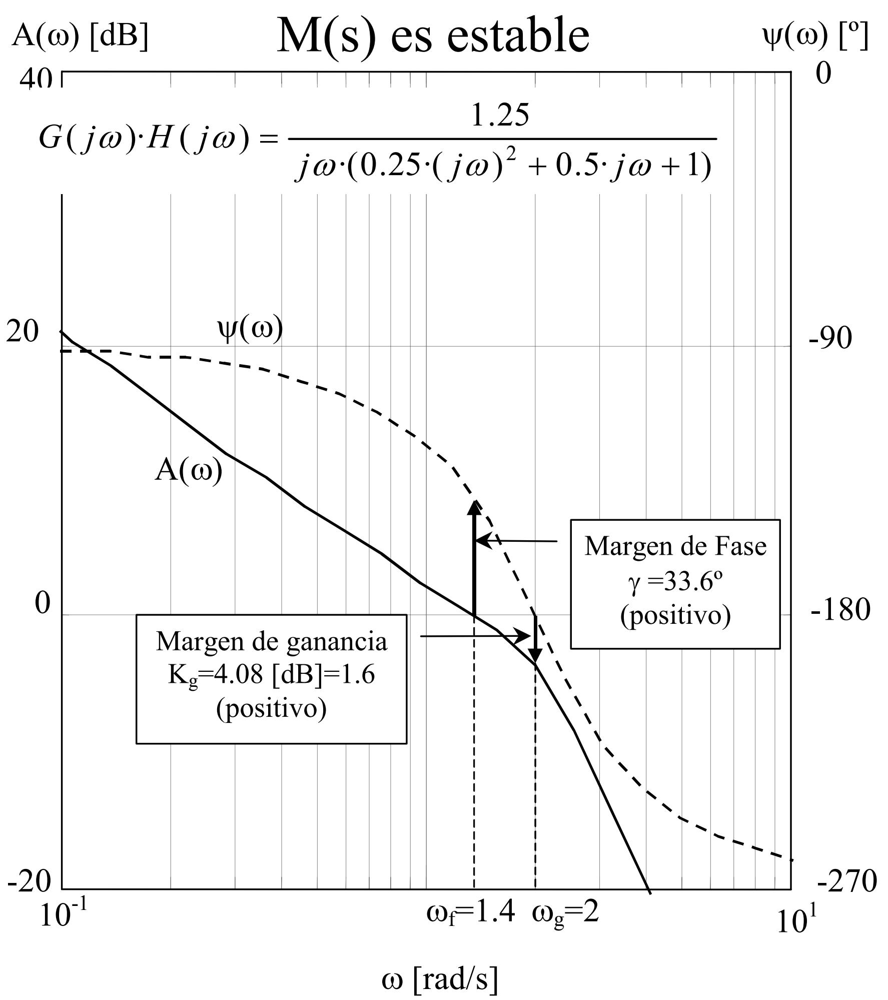
$$\Rightarrow K_g=1/0.625=1.6>1\text{ Estable}$$

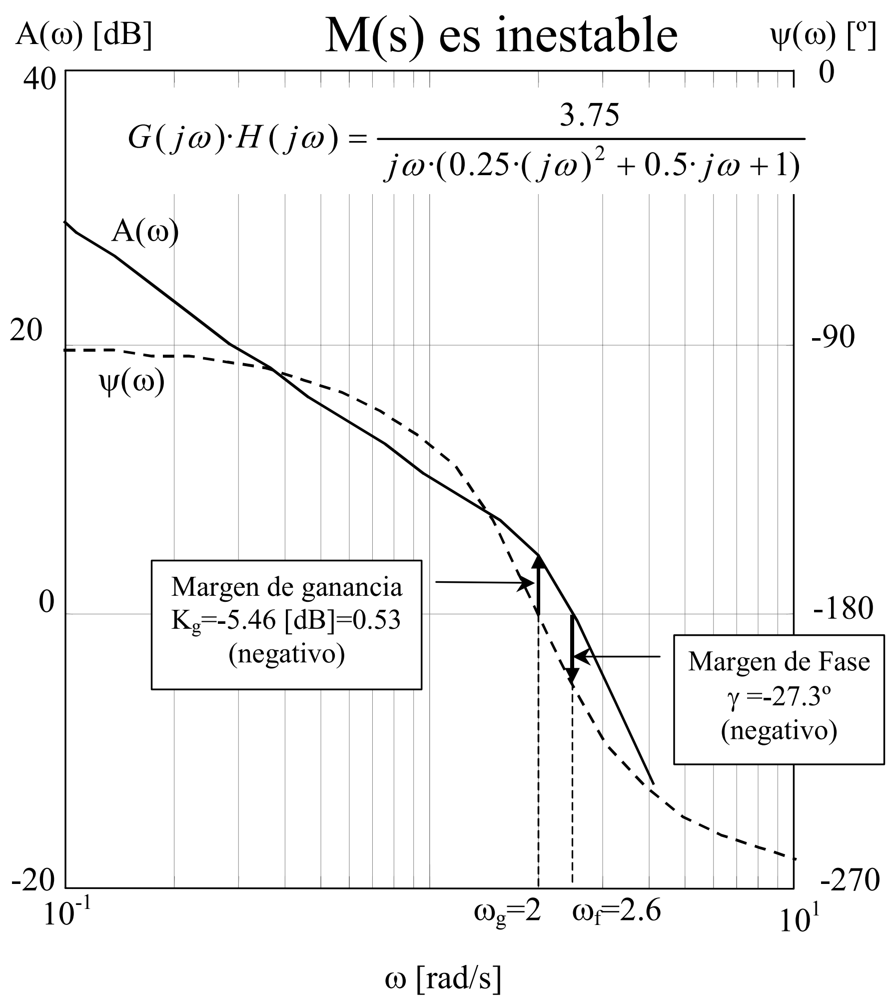
$$\text{Sistema 2: } \underline{G(j\omega_g)\cdot H(j\omega_g)}=\underline{\frac{3.75}{j\omega_g\cdot(0.25\cdot(j\omega_g)^2+0.5\cdot j\omega_g+1)}}=-180^{\circ}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_g=2\Rightarrow \left|G(j\cdot2)\cdot H(j\cdot2)\right|=\left|\frac{3.75}{j\cdot2\cdot(0.25\cdot(j\cdot2)^2+0.5\cdot j\cdot2+1)}\right|=1.88\Rightarrow$$

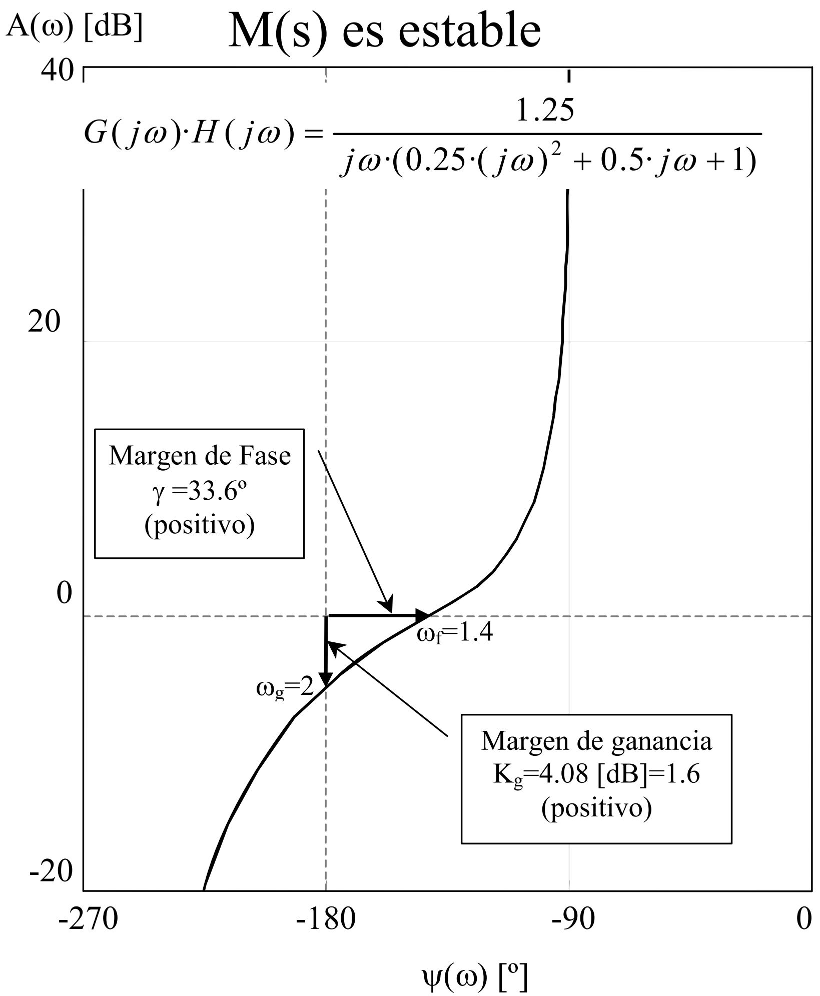
$$\Rightarrow K_g=1/1.88=0.53<1\text{ Inestable}$$

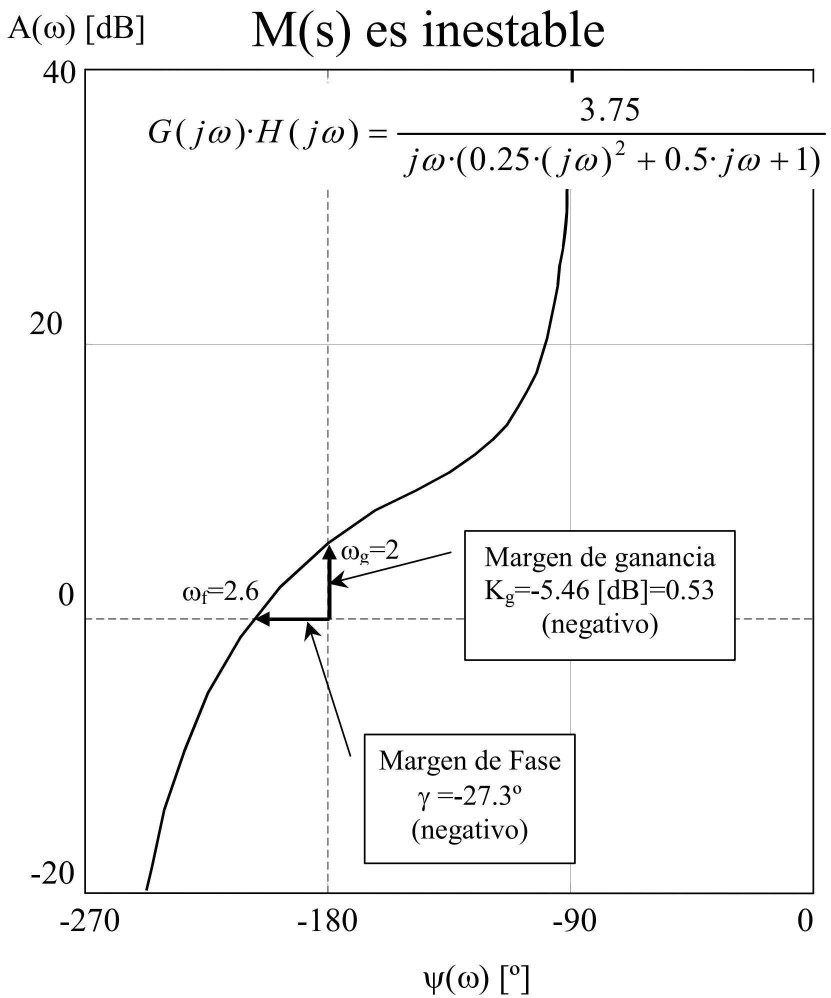
Margen de Fase y de Ganancia sobre el Diagrama de Bode





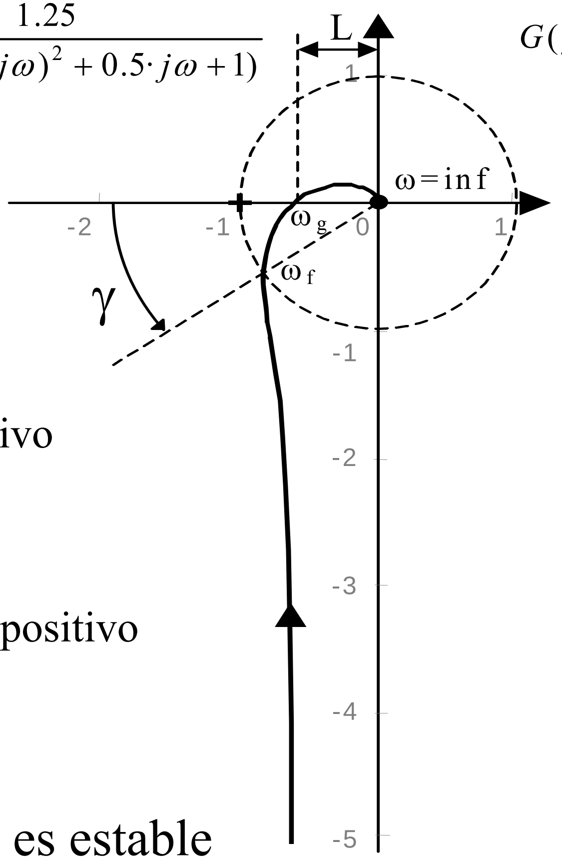
Margen de Fase y de Ganancia sobre el Diagrama Magnitud-Fase





Margen de Fase y de Ganancia sobre el Diagrama Polar

$$G(j\omega)\cdot H(j\omega) = \frac{1.25}{j\omega\cdot(0.25\cdot(j\omega)^2 + 0.5\cdot j\omega + 1)}$$



Margen de fase positivo

$\gamma = 33.6^{o}$

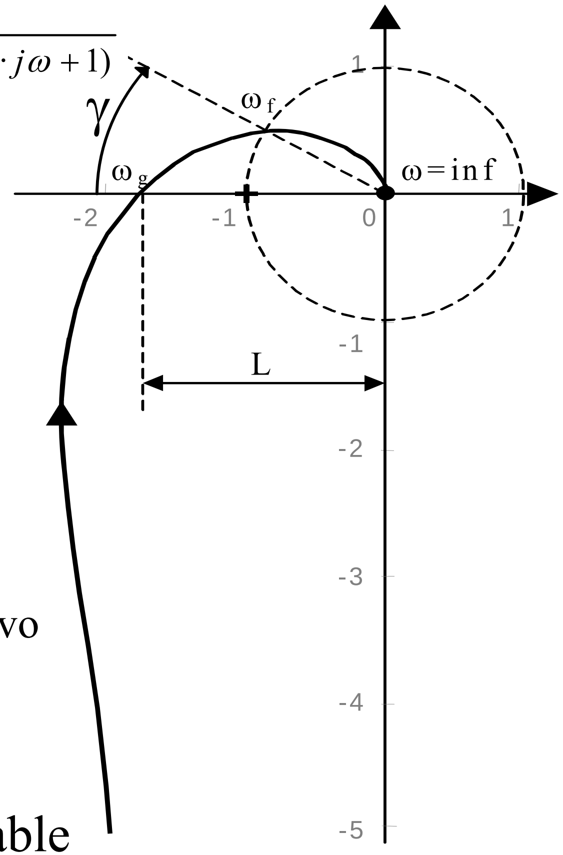
Margen de ganancia positivo

$L = 0.625$

$K_g = 1/L = 1.6 > 1$

M(s) es estable

$$G(j\omega)\cdot H(j\omega) = \frac{3.75}{j\omega\cdot(0.25\cdot(j\omega)^2 + 0.5\cdot j\omega + 1)}$$



Margen de fase negativo

$\gamma = -27.3^{o}$

Margen de ganancia negativo

$L = 1.88 > 1$

$K_g = 1/L = 0.53 < 1$

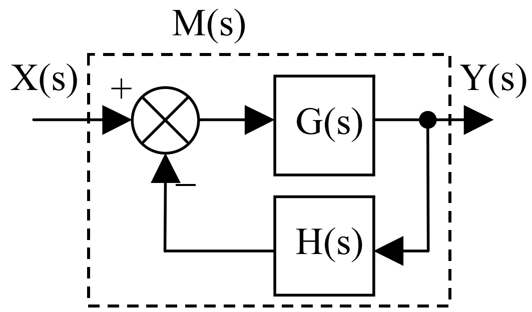
M(s) es inestable

La curva NO envuelve al punto -1+0·j

La curva envuelve al punto -1+0·j

Criterio de Nyquist (I)

Basándose en el Criterio del Argumento de Cauchy, Nyquist desarrollo un método para estudiar la estabilidad de un sistema realimentado M(s), a partir de las raíces de la ecuación característica 1+G(s)·H(s)=0 y de la respuesta en frecuencia de G(s)·H(s).



• **Camino de Nyquist**: Es una curva cerrada que envuelve toda la parte real positiva del plano complejo "s" evitando pasar por aquellos puntos donde la función G(s)·H(s) no es analítica (evitando pasar por donde hay polos de G(s)·H(s)).

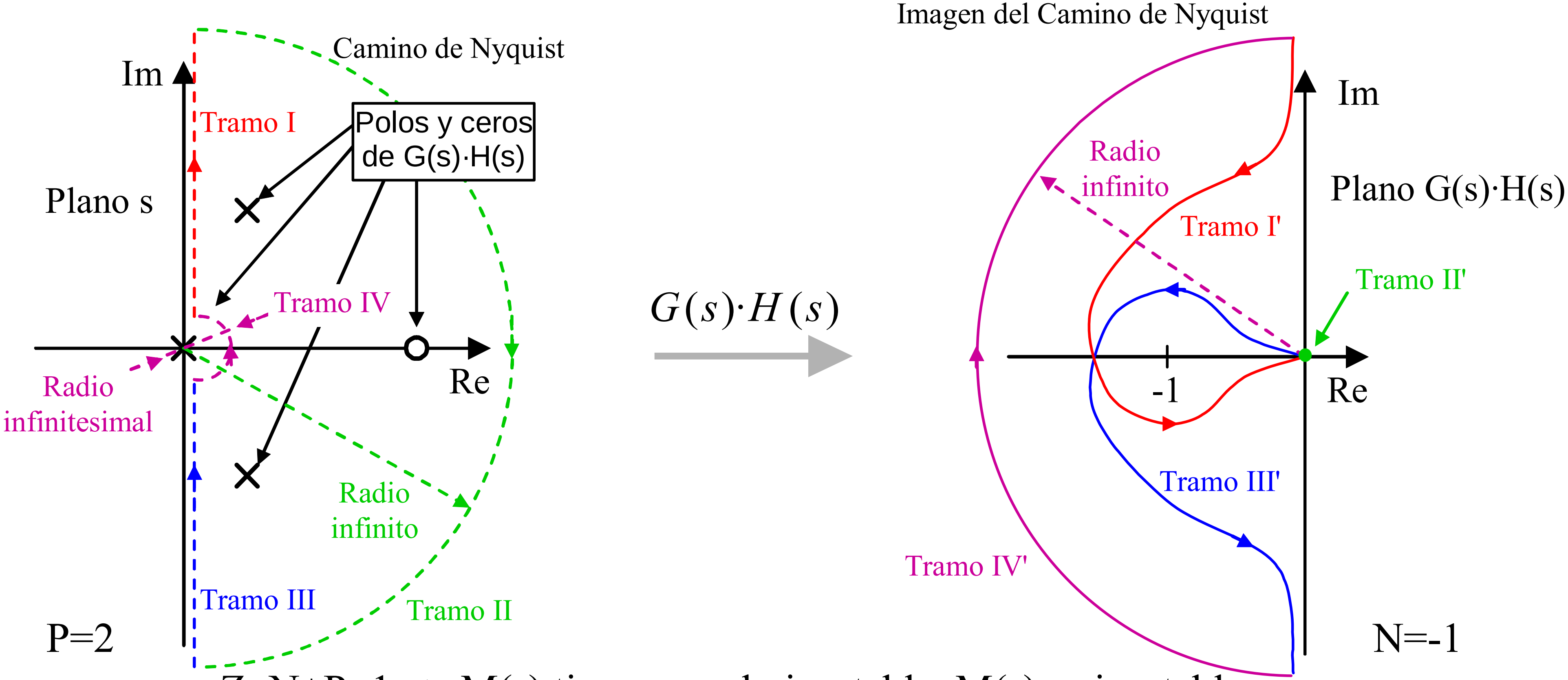
• **Imagen del Camino de Nyquist**: Es la curva cerrada del plano "G(s)·H(s)" que se obtiene resolviendo G(s)·H(s) cuando *s* recorre el Camino de Nyquist.

• **P**: El número de polos de G(s)·H(s) que hay dentro del Camino de Nyquist.

• **N**: El número de vueltas, contabilizadas en el sentido de las agujas del reloj, de la Imagen del Camino de Nyquist alrededor del punto -1+0·j del plano G(s)·H(s).

• **Z**: El número de polos inestables de M(s). Z=N+P. Si Z>0 => M(s) inestable.

Criterio de Nyquist (II)



Z=N+P=1 => M(s) tiene un polo inestable, M(s) es inestable

El tramo I’ es el diagrama polar de G(s)·H(s) y el tramo III’ su simétrico respecto al eje real. El tramo II’ es un punto donde finaliza el tramo I’ y comienza el III’. El tramo IV’ (si existe) es un arco de 180º·[nº de polos en el origen de G(s)·H(s)] y radio infinito, que cierra en sentido horario entre el final del tramo III’ y el inicio del I’