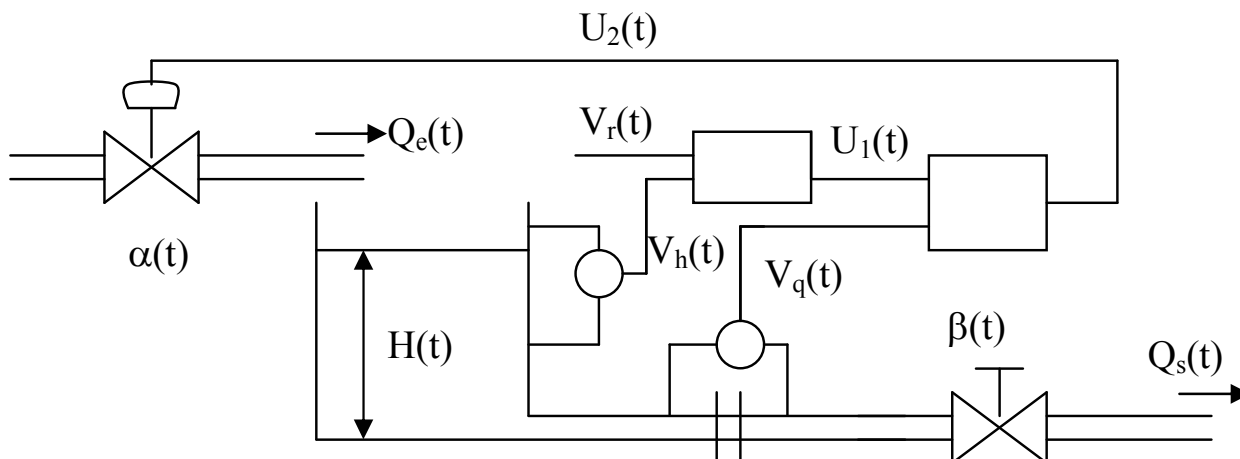


PROBLEMA:

Se desea controlar el nivel y caudal de salida de líquido en un depósito cilíndrico de sección $0,5 \text{ m}^2$ y altura 2 m. El caudal de entrada atraviesa una válvula motorizada, mientras que el caudal de salida puede regularse con una válvula de apertura manual. Se dispone de dos sensores, uno de caudal y otro de nivel de líquido. Igualmente se dispone de dos reguladores, uno para el bucle de nivel cuya salida es una de las entradas del otro regulador, el del bucle de caudal, cuya salida actúa sobre el motor de la válvula de entrada. El sistema se controla con una tensión de referencia que entra al regulador de nivel.



Datos:

- Cuando la válvula de entrada está totalmente abierta el caudal de entrada es de 4 l/s
- La constante de tiempo de la válvula motorizada es de 25 s, y para conseguir una apertura total es necesario alimentar el motor con 5 V.
- Con la válvula de salida totalmente abierta, y con una altura de líquido de 1 m, el caudal de salida es de 4 l/s.
- El captador de nivel genera una tensión de 5V por metro de líquido. Su constante de tiempo es inferior a 1 segundo.
- El captador de caudal da una tensión proporcional al cuadrado del caudal, siendo 1,56V cuando circula un caudal de 1 l/s. Su constante de tiempo también es inferior al segundo.
- El regulador de nivel ha sido ajustado de forma que genera una tensión igual a 1,25 veces la diferencia entre la tensión de referencia y la tensión medida por el captador de nivel.
- El regulador de caudal ha sido ajustado de forma que genera una tensión igual a la suma de la tensión generada por el regulador de nivel más 0,016 veces la tensión generada por el captador de caudal.

En resumen el modelo matemático del sistema está constituido por las siguientes ecuaciones:

$Q_e(t) = 4 \cdot \alpha(t)$	válvula de entrada
$Q_e(t) = Q_s(t) + 500 \cdot dH(t)/dt$	conservación de la materia y geometría
$Q_s(t) = 4 \cdot \beta(t) \cdot \sqrt{H(t)}$	válvula de salida.



$0,2 \cdot U_2(t) = \alpha(t) + 25 \cdot d\alpha(t)/dt$	motor y válvula
$V_h(t) = 5 \cdot H(t)$	captador de nivel
$V_q(t) = 1,56 \cdot Q_s^2(t)$	captador de caudal
$U_1(t) = 1,25 \cdot [V_r(t) - V_h(t)]$	regulador de nivel
$U_2(t) = U_1(t) + 0,016 \cdot V_q(t)$	regulador de caudal

Al ser un modelo no lineal (ecuaciones 3 y 5) es necesario linealizar dicho modelo alrededor de un punto de equilibrio o funcionamiento.

Para ello es necesario calcular previamente el valor de todas las variables en dicho punto de equilibrio que viene definido por $V_{r0} = 7v$ y $\beta_0 = 0,5$. Además, el equilibrio en este sistema supone que no existe variación en el nivel del líquido en el depósito, ni en la sección de paso de la válvula de entrada por lo que las dos derivadas del modelo se anularán en dicho punto, quedando el modelo en el punto de equilibrio reducido a las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} Q_{e0} &= 4 \cdot \alpha_0 \\ Q_{e0} &= Q_{s0} \\ Q_{s0} &= 2 \cdot \sqrt{H_0} \\ 0,2 \cdot U_{20} &= \alpha_0 \\ V_{h0} &= 5 \cdot H_0 \\ V_{q0} &= 1,56 \cdot Q_{s0}^2 \\ U_{10} &= 1,25 \cdot [7 - V_{h0}] \\ U_{20} &= U_{10} + 0,016 \cdot V_{q0} \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, se obtiene:

$$2 \cdot \sqrt{H_0} = 0,8 \cdot [1,25 \cdot (7 - 5 \cdot H_0) + 0,016 \cdot 1,56 \cdot 4 \cdot H_0]$$

es decir: $H_0^2 - 3 \cdot H_0 + 2 = 0$ cuyas raíces son: $H_0 = 2m$ y $H_0 = 1m$.

La primera de estas soluciones daría lugar a valores negativos del caudal en el punto de equilibrio, por lo que no tiene sentido físico.

A partir de $H_0 = 1m$, los valores de las demás variables en el punto de equilibrio son:

$$\begin{aligned} H_0 &= 1 \text{ m}; V_{r0} = 7 \text{ v}; \beta_0 = 0,5; Q_{s0} = 2 \text{ l/s}; Q_{e0} = 2 \text{ l/s}; V_{h0} = 5 \text{ V}; U_{10} = 2,5 \text{ V}; \\ V_{q0} &= 6,24 \text{ V}; U_{20} = 2,6 \text{ V}; \alpha_0 = 0,5 \end{aligned}$$

Una vez conocido el valor de todas las variables en el punto de equilibrio, podremos calcular el modelo linealizado alrededor de dicho punto, obteniéndose:

$$\begin{aligned} \Delta Q_e(t) &= 4 \Delta \alpha(t) \\ \Delta Q_e(t) &= \Delta Q_s(t) + 500 \cdot d\Delta H(t)/dt \\ \Delta Q_s(t) &= 4 \sqrt{H_0} \cdot \Delta \beta(t) + 4 \beta_0 / (2 \cdot \sqrt{H_0}) \cdot \Delta H(t) = 4 \cdot \Delta \beta(t) + \Delta H(t) \\ 0,2 \cdot \Delta U_2(t) &= \Delta \alpha(t) + 25 \cdot d\Delta \alpha(t)/dt \\ \Delta V_h(t) &= 5 \Delta H(t) \\ \Delta V_q(t) &= 1,56 \cdot 2 \cdot Q_{s0} \cdot \Delta Q_s(t) = 6,24 \cdot \Delta Q_s(t) \\ \Delta U_1(t) &= 1,25 \cdot [\Delta V_r(t) - \Delta V_h(t)] \\ \Delta U_2(t) &= \Delta U_1(t) + 0,016 \cdot \Delta V_q(t) \end{aligned}$$

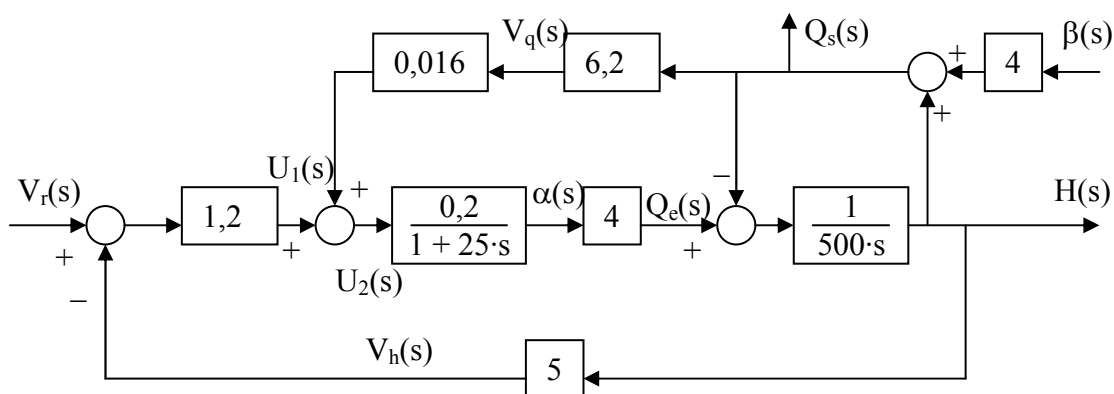
Para calcular las funciones de transferencia de los distintos elementos que componen el sistema de control, se aplica la Transformada de Laplace a cada una de las ecuaciones del modelo linealizado. Teniendo en cuenta que las condiciones iniciales del incremento de todas las variables son nulas en el equilibrio, las transformadas de Laplace de las ecuaciones del modelo linealizado serán:

$$\begin{aligned} Q_e(s) &= 4 \cdot \alpha(s) \\ Q_e(s) &= Q_s(s) + 500 \cdot s \cdot H(s) \\ Q_s(s) &= 4 \cdot \beta(s) + H(s) \\ 0,2 \cdot U_2(s) &= \alpha(s) + 25 \cdot s \cdot \alpha(s) \\ V_h(s) &= 5 \cdot H(s) \\ V_q(s) &= 6,24 \cdot Q_s(s) \\ U_1(s) &= 1,25 \cdot [V_r(s) - V_h(s)] \\ U_2(s) &= U_1(s) + 0,016 \cdot V_q(s) \end{aligned}$$

Donde las variables función de “s” representan las transformadas de Laplace de las correspondientes funciones incremento en el tiempo. Así H(s) es la transformada de Laplace de la función $\Delta H(t)$.

Diagrama de Bloques

Para trazar el diagrama de bloques del sistema es necesario identificar las señales de entrada al mismo, es decir aquellas que no dependen de ningún elemento del sistema, y que por lo tanto son accionadas desde el exterior del sistema. En este caso, las señales de entrada son la tensión de referencia $V_r(t)$ y el grado de apertura manual de la válvula de salida $\beta(t)$. Por lo tanto las señales de entrada al diagrama de bloques serán $V_r(s)$ y $\beta(s)$. Cualquier señal medible puede ser considerada como señal de salida. En este caso, puesto que se pretende controlar el nivel del líquido en el depósito y el caudal de salida del mismo, consideraremos a $H(s)$ y $Q_s(s)$ como señales de salida.



Para conocer la evolución del nivel y caudal de salida del líquido en función de variaciones en las entradas es necesario conocer las funciones de transferencia que ligan las salidas $H(s)$ y $Q_s(s)$ con cada una de las entradas $V_r(s)$ y $\beta(s)$. Si llamamos $G_{11}(s)$ a $H(s)/V_r(s)$, $G_{12}(s)$ a $H(s)/\beta(s)$, $G_{21}(s)$ a $Q_s(s)/V_r(s)$ y $G_{22}(s)$ a $Q_s(s)/\beta(s)$, aplicando superposición obtendremos:

$$\begin{aligned} H(s) &= G_{11}(s) \cdot V_r(s) + G_{12}(s) \cdot \beta(s) \\ Q_s(s) &= G_{21}(s) \cdot V_r(s) + G_{22}(s) \cdot \beta(s) \end{aligned}$$

Para calcular las funciones de transferencia se simplificará el diagrama de bloques, suponiendo en unos casos que $\beta(s)=0$ y en otros que $V_r(s)=0$, y considerando la variable de salida correspondiente en cada caso.

Representación mediante modelos de estado

Del análisis del diagrama funcional obtenido se deduce que sólo existen dos elementos con dinámica, el propio depósito y la válvula motorizada. Por lo tanto el estado del sistema quedará determinado conociendo el valor de las dos señales que definen dichos elementos: el grado de apertura $\Delta\alpha(t)$ de la válvula y el volumen de líquido almacenado en el depósito (o, lo que es lo mismo, la altura del nivel de líquido $\Delta H(t)$). Estas señales serán pues consideradas como las dos variables de estado del sistema, $\mathbf{x}(t)$. Las variables de entrada son $\Delta V_r(t)$ y $\Delta\beta(t)$, $\mathbf{u}(t)$, y como variables de salida se tomarán $\Delta H(t)$ y $\Delta Q_s(t)$, $\mathbf{y}(t)$.

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\cdot\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\cdot\mathbf{u}(t) && \text{Ecuación de estado} \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\cdot\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\cdot\mathbf{u}(t) && \text{Ecuación de salida}\end{aligned}$$

La ecuación de estado del sistema será la que liga las variables de estado con sus derivadas y con las entradas, es decir:

$$\begin{cases} \Delta H'(t) = -0,002\Delta H(t) + 0,008\Delta\alpha(t) - 0,008\Delta\beta(t) \\ \Delta\alpha'(t) = -0,0492\Delta H(t) - 0,04\Delta\alpha(t) + 0,01\Delta V_r(t) + 0,0032\Delta\beta(t) \end{cases}$$

Con lo que las matrices A y B tomarán los valores: $\begin{bmatrix} \Delta H'(t) \\ \Delta\alpha'(t) \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} \Delta H(t) \\ \Delta\alpha(t) \end{bmatrix} + B \cdot \begin{bmatrix} \Delta V_r(t) \\ \Delta\beta(t) \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} -0,002 & 0,008 \\ -0,0492 & -0,04 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -0,008 \\ 0,01 & 0,0032 \end{bmatrix}$$

La ecuación de salida es la que liga las variables de salida con las de estado y las entradas, es decir:

$$\begin{cases} \Delta H(t) = \Delta H(t) \\ \Delta Q_s(t) = \Delta H(t) + 4\cdot\Delta\beta(t) \end{cases} \quad \begin{bmatrix} \Delta H(t) \\ \Delta Q_s(t) \end{bmatrix} = C \cdot \begin{bmatrix} \Delta H(t) \\ \Delta\alpha(t) \end{bmatrix} + D \cdot \begin{bmatrix} \Delta V_r(t) \\ \Delta\beta(t) \end{bmatrix}$$

Con lo que las matrices C y D tomarán los valores:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Obtención de las funciones de transferencia a partir del modelo de estado

Matriz de transferencia $\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}$

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{8\cdot 10^{-5}}{s^2 + 0.042\cdot s + 0.0004736} & \frac{-0.008\cdot s - 0.0002944}{s^2 + 0.042\cdot s + 0.0004736} \\ \frac{8\cdot 10^{-5}}{s^2 + 0.042\cdot s + 0.0004736} & \frac{4\cdot s^2 + 0.16\cdot s + 0.0016}{s^2 + 0.042\cdot s + 0.0004736} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} H(s) \\ Q_s(s) \end{bmatrix} = G(s) \cdot \begin{bmatrix} V_r(s) \\ \beta(s) \end{bmatrix}$$