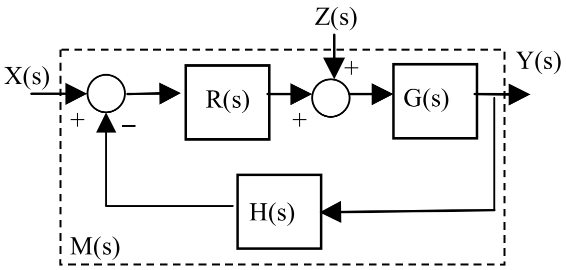
PROBLEMA:

Dado el sistema de la figura:

$$G(s) = \frac{10}{s+1} \quad H(s) = \frac{5}{s+5}$$



a) Diseñar un regulador R(s) que haga que el sistema de la figura cumpla las siguientes especificaciones ante entradas de tipo escalón en la variable x(t):

Sobreoscilación: $M_p \leq 4.33$ %

Tiempo de establecimiento: $t_s \leq \pi/5$ s.

Las variaciones de z(t) no tendrán efecto sobre el régimen permanente de y(t).

b) Calcular los errores en régimen permanente del sistema de control obtenido, una vez instalado el regulador.

c) ¿Cuántos polos y ceros presenta la función de transferencia final de M(s) una vez diseñado el regulador?

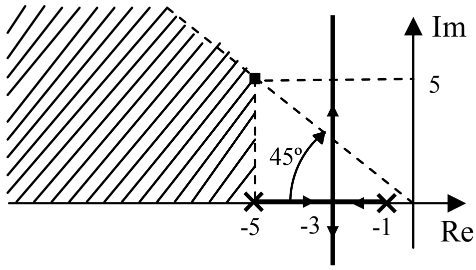
SOLUCIÓN:

a) Las especificaciones de régimen transitorio imponen:

$M_p \leq 4.33$ % $\Rightarrow \theta \leq 45°$

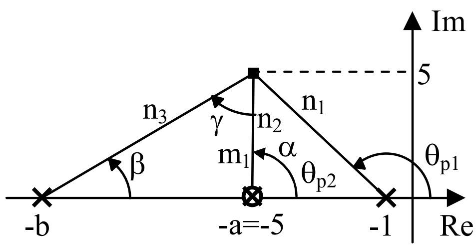
$t_s \leq \pi/5$ s=0.63 s $\Rightarrow \sigma \geq 5$

Trazando el Lugar de las Raíces para R(s)·G(s)·H(s) con R(s)=K_r:



Como el Lugar de las Raíces no pasa por la región de las especificaciones se necesita un regulador PD, R(s)=K_r·(s+a)/(s+b), que se puede diseñar, por ejemplo, para que el Lugar de las Raíces pase por el punto: -5±5j.

Situando el cero en -5, **a=5**, según el criterio de la vertical, que en este caso también cancela un polo del sistema, se obtiene:



$\gamma = \alpha-\beta = (\theta_{p1} +\theta_{p2}+\ldots+\theta_{pn})-(\theta_{z1}+\theta_{z2}+\ldots+\theta_{zm})+(2\cdot q+1)\cdot\pi$; q={0,1, ...}$\Rightarrow$

$\Rightarrow \gamma = \theta_{p1}+\theta_{p2}+180°$

$\theta_{p1} = 129°$; $\theta_{p2} = 90 \Rightarrow \gamma = 399° \equiv 39° \Rightarrow \beta = 51° \Rightarrow$ **b ≈ 9**

Aplicando el criterio del módulo:

$K_r\cdot 10\cdot 5 = (n_1\cdot n_2\cdot n_3)/m_1 = (6.4\cdot 5\cdot 6.4)/5 \Rightarrow$ **K_r = 0.82**

$$\boxed{R(s) = 0.82\frac{s+5}{s+9}}$$

Para cumplir la especificación de régimen permanente (anular el efecto de la perturbación) se necesita un polo en el origen en la función de transferencia del regulador. Se hace con un PI para no modificar la respuesta transitoria: PI=(s+c)/s

c = σ_{dom}/10 siendo σ_{dom} = 5 la que se buscaba para las especificaciones del transitorio $\Rightarrow$ c=0.5. Finalmente:

$$\boxed{R(s) = 0.82\frac{(s+5)\cdot(s+0.5)}{s\cdot(s+9)}}$$

b) R(s)·G(s) es de Tipo 1, por lo tanto: $e_p = 0$; $e_v = 1/K_v$; $e_a = \infty$; donde: $K_v = \lim_{s\to 0} s\cdot h_0 \cdot G_{eq}(s)$

$$h_0 = \lim_{s\to 0} H(s) = 1 \Rightarrow H(s) - h_0 = \frac{5}{s+5} - 1 = \frac{-s}{s+5}$$

$$G_{eq}(s) = \frac{R(s)\cdot G(s)}{1 + R(s)\cdot G(s)\cdot(H(s) - h_0)} = \frac{8.2\dfrac{(s+5)\cdot(s+0.5)}{s\cdot(s+9)\cdot(s+1)}}{1 + 8.2\dfrac{(s+5)\cdot(s+0.5)\cdot(-s)}{s\cdot(s+9)\cdot(s+1)\cdot(s+5)}} = \frac{8.2\cdot(s+5)\cdot(s+5)\cdot(s+0.5)}{s\cdot(s+9)\cdot(s+1)\cdot(s+5) - 8.2\cdot s\cdot(s+5)\cdot(s+0.5)}$$

$$K_v = \frac{8.2\cdot 5\cdot 5\cdot 0.5}{9\cdot 5 - 8.2\cdot 5\cdot 0.5} = 4.18$$

$$\boxed{e_v = 0.24\ \mathrm{s}}$$

c) La función de transferencia en bucle cerrado es:

$$M(s) = \frac{R(s)\cdot G(s)}{1 + R(s)\cdot G(s)\cdot H(s)} = \frac{8.2\dfrac{(s+5)\cdot(s+0.5)}{s\cdot(s+9)\cdot(s+1)}}{1 + 41\dfrac{(s+5)\cdot(s+0.5)}{s\cdot(s+9)\cdot(s+1)\cdot(s+5)}} = \frac{8.2\cdot(s+5)\cdot(s+5)\cdot(s+0.5)}{s\cdot(s+9)\cdot(s+1)\cdot(s+5) + 41\cdot(s+5)\cdot(s+0.5)}$$

El numerador es de 3er grado, es decir **3 ceros**, y el denominador es de 4º grado, **4 polos**.

También, sería válido matemáticamente decir que el polo y el cero en s=-5 se cancelan y por lo tanto:

$$M(s) = \frac{8.2\cdot(s+5)\cdot(s+0.5)}{s\cdot(s+9)\cdot(s+1) + 41\cdot(s+0.5)}$$

2 ceros, (z_1 = -5, z_2 = -0.5) y **3 polos** (p_1 = -0.45, $p_{2,3}$ = -4.8 ± 4.8j)