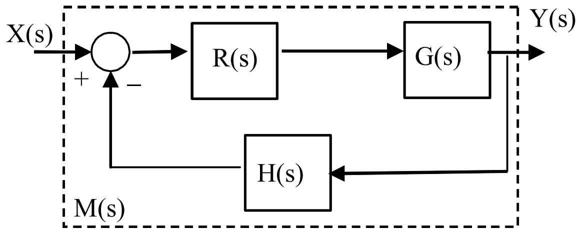
PROBLEMA:

Dado el sistema de la figura:

$$G(s) = \frac{6\cdot(s+9)}{(s+6)\cdot(s+3)} \qquad H(s) = 10$$



a) Diseñar el regulador R(s) más sencillo que haga que el sistema de la figura cumpla las siguientes especificaciones ante entradas de tipo escalón en la variable x(t):

Tiempo de pico: $t_p \leq \pi/2$ s.

Tiempo de establecimiento: $t_s \leq \pi/9$ s.

Error de posición: $e_p \leq 15\%$.

b) ¿Qué características tiene la respuesta del sistema M(s) con el regulador calculado ante una entrada escalón unitario (M_p, t_p, régimen permanente, etc …)?

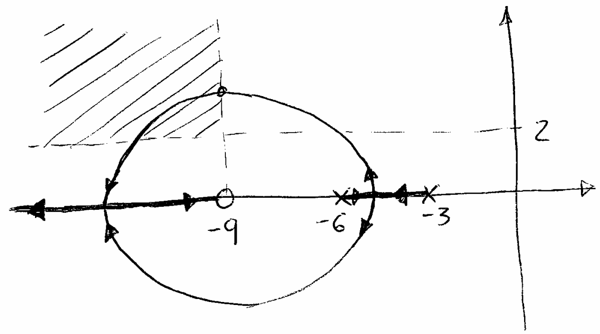
Suponiendo $R(s)=K_R$ se traza el Lugar de las raíces y la zona donde se cumplen las especificaciones del transitorio:

$$t_p \leq \frac{\pi}{2} \;;\; t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \Rightarrow \underline{\omega_d \geq 2}$$

$$t_s \leq \frac{\pi}{9} \;;\; t_s = \frac{\pi}{\sigma} \Rightarrow \underline{\sigma \geq 9}$$

$$M(s) = \frac{R(s)\cdot G(s)}{1+R(s)G(s)H(s)} = \frac{K_R\frac{6\cdot(s+9)}{(s+6)(s+3)}}{1+K_R\cdot\frac{60(s+9)}{(s+6)(s+3)}} = \frac{K_R 6(s+9)}{(s+6)(s+3)+K_R 60(s+9)}$$

$$EC: \; 1+K_R\frac{60(s+9)}{(s+6)(s+3)} = 0 \qquad s^2+(9+60K_R)s+(18+540K_R)=0$$



- N^o ramas $= Z = n$
- Asíntotas $= n-m = 1$
- Angulo asíntota $-180°$
- Hay un punto de confluencia y otro de dispersión.

No podemos estar seguros de que el lugar de las raíces pase por la zona de las especificaciones, pero como las raíces de la Ecuación Característica son fáciles de obtener:

$$s_{1,2} = \frac{-(9+60K_R) \pm \sqrt{(9+60K_R)^2 - 4\cdot 1\cdot(18+540K_R)}}{2\cdot 1}$$

• Buscamos el corte con la vertical por -9

$$Re(s_1) = -9 \Rightarrow \frac{-(9+60K_R)}{2} = -9 \Rightarrow \boxed{K_R = \frac{9}{60} = 0'15}$$

Sustituyendo $K_R = 0'15 \Rightarrow \boxed{s_{1,2} = -9 \pm 4'24j}$

• Buscamos el corte con la horizontal por $2j$

$$Im(s_1) = 2j \Rightarrow \frac{\sqrt{(9+60K_R)^2 - 4(18+540K_R)}}{2} = 2j$$

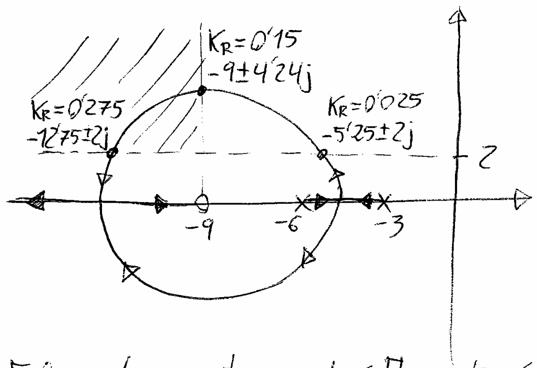
Elevando al cuadrado

$$\frac{(9+60K_R)^2 - 4(18+540K_R)}{4} = -4$$

$$3600K_R^2 + 2\cdot 960K_R + 81 - 4\cdot 18 - 4\cdot 540K_R = -16$$

$$3600K_R^2 + (1080 - 2160)K_R + (81 + 16 - 72) = 0$$

$$\boxed{K_R = \begin{cases} K_{R_1} = 0'275 \Rightarrow s_{1,2} = -12'75 \pm 2j \\ K_{R_2} = 0'025 \Rightarrow s_{1,2} = -5'25 \pm 2j \end{cases}}$$



El sistema tiene $t_p \leq \frac{\pi}{2}$ y $t_s \leq \frac{\pi}{9}$ para:

$$\boxed{0'15 \leq K_R \leq 0'275}$$

Otras alternativas

1.- Las curvas que rodean al cero en un Lugar de las Raices de dos polos y un cero son arcos de circunferencia con centro en el cero. Calculando los puntos de dispersión y confluencia se obtiene el radio de la curva y a partir de ahí los cortes con -9 y $2j$. Luego se calculan los valores de K_R por el criterio del módulo.

2.- El punto de corte con la vertical por -9 se puede obtener por el criterio de Routh mediante el cambio de variable $s' = s + 9$

3.- Por simple tanteo con diferentes valores de K_R hasta obtener raices con parte Real igual a -9 y parte Imaginaria igual a $\pm 2j$.

Buscamos ahora qué valores de K_R cumplen la especificación de régimen permanente

$e_p \leq 15\% \equiv 0'15 \qquad e_p = \frac{1}{1+K_p}$

$K_p = h_0 \lim_{s\to 0} G_{eq}(s)$ como $H(s)=10$; $G_{eq}(s)=R(s)G(s)$

$R(s)\cdot G(s)$ es de tipo 0 luego existe e_p.

$$K_p = 10 \lim_{s\to 0} K_R \frac{6(s+9)}{(s+6)(s+3)} = 30K_R$$

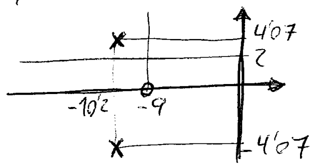
$$e_p = \frac{1}{1+30K_R} \leq 0'15 \Rightarrow \underline{\underline{K_R \geq 0'19}}$$

Luego un regulador Proporcional con $\underline{\underline{0'19 \leq K_R \leq 0'275}}$ cumplirá las especificaciones.

b) Si elegimos por ejemplo $\underline{K_R = 0'19}$:

$s_{1,2} = -10'2 \pm 4'07j$

$M(s)$ tiene dos polos complejos conjugados y un cero en $z_1=-9$



El sistema es de segundo orden subamortiguado con un cero adicional. El cero hará el sistema con M_p mayor y t_p menor que el calculado a partir de los polos

$\omega_n = \sqrt{10'2^2+4'07^2} = 11 \qquad \omega_d = 4'07$

$\theta = \arctan\left(\frac{4'07}{10'2}\right) = 21'75° \qquad \sigma = 10'2$

$\xi = \cos\theta = 0'93$

$$\begin{cases} M_p = e^{-\pi/\mathrm{tg}\,\theta} = 0'0038 = 0'38\% \\ t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = 0'77 \text{ s} \\ t_s \simeq \frac{\pi}{\sigma} = 0'31 \text{ s} \end{cases}$$

$$y(\infty) = \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} s\,Y(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{s}M(s) = \frac{54K_R}{18+540K_R} = 0'085$$