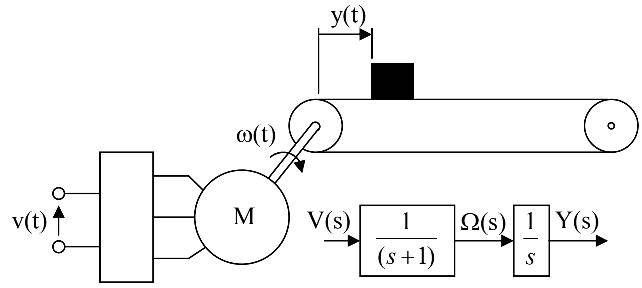
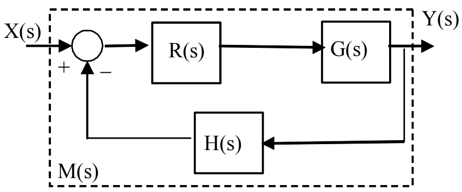
PROBLEMA:

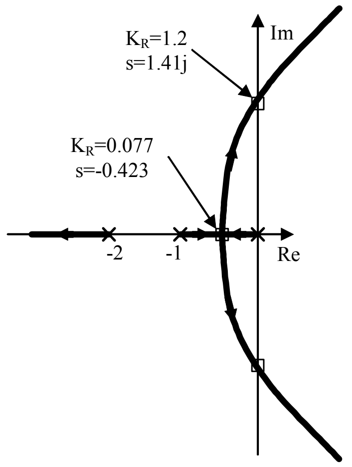
En el sistema de la figura, la relación entre las variables v(t), tensión de control, e y(t), desplazamiento del dispositivo, está definida por la función de transferencia G(s)=Y(s)/V(s).



El sistema se realimenta tal como se indica en la siguiente figura con un sensor que mide la posición del dispositivo móvil y que tiene como función de transferencia H(s) y un regulador de ganancia modificable $R(s)=K_R>0$. De esta manera, la señal x(t) funciona como referencia de posición del dispositivo. Se representa además el Lugar de las Raíces correspondiente al sistema cuando K_R varía entre 0 e infinito.

$$R(s) = K_R \quad G(s) = \frac{1}{s(s+1)} \quad H(s) = \frac{5}{s+2}$$



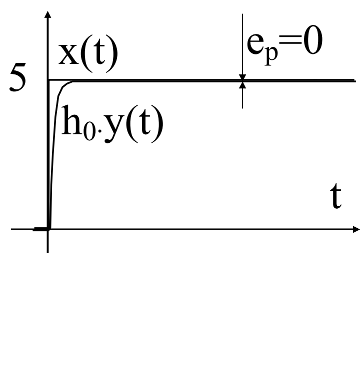


a) ¿Para qué valores de K_R es estable el sistema realimentado?
b) ¿Qué valores de K_R hacen que el dispositivo se posicione sin oscilaciones una vez establecido un valor de referencia en la entrada x(t)?
c) ¿Dónde se posiciona el dispositivo (valor de y(t) cuando $t\to\infty$) si $x(t)=5\cdot u_0(t)$?
d) ¿Cuáles son los errores en régimen permanente del sistema?
e) Razone, ¿cuál debería ser la función de transferencia del regulador R(s) si se desea que el comportamiento del sistema en bucle cerrado sea lo más parecido posible a un sistema de segundo orden críticamente amortiguado y que el error de velocidad del sistema sea nulo?

SOLUCIÓN:

a) El lugar de las raíces indica que el sistema será **estable si $0<K_R<1.2$**, ya que para valores superiores los dos polos que están sobre las ramas que cruzan el eje imaginario harán que el sistema M(s) sea inestable.

b) Considerando dominantes los dos polos de M(s) que se encuentran sobre las dos ramas más próximas al eje imaginario, deducimos que el comportamiento de M(s) puede ser similar al de un sistema de 2º orden. Para que un sistema de 2º orden responda por ejemplo a una entrada escalón en x(t) sin oscilaciones, es necesario que sea sobreamortiguado, es decir, que sus dos polos sean reales. Esto sucede si **$0<K_R<0.077$**. Para valores superiores a 0.077 el sistema tendrá dos polos complejos conjugados y presentaría la sobreoscilación y oscilaciones típicas de un sistema subamortiguado ante una entrada escalón.



c) Teniendo en cuenta que el sistema presenta error de posición nulo ($e_p=0$) debido a que $R(s)\cdot G(s)$ es de Tipo 1, y que la ganancia de los elementos de realimentación es $h_0=\lim_{s\to 0}H(s)=2.5$, ante la entrada $x(t)=5\cdot u_0(t)$ la salida en régimen permanente deberá alcanzar el valor $5/h_0$. Es decir, como $e_p=0 \Rightarrow x(\infty)=h_0\cdot y(\infty)=5 \Rightarrow$ **$y(\infty)=2$**.

Se puede comprobar también a través del teorema del valor final:

$$y(\infty)=\lim_{t\to\infty} y(t)=\lim_{s\to 0} s\cdot Y(s)=\lim_{s\to 0} s\cdot X(s)\cdot M(s)=\lim_{s\to 0} s\cdot\frac{5}{s}\cdot\frac{R(s)\cdot G(s)}{1+R(s)\cdot G(s)\cdot H(s)}=\lim_{s\to 0}\frac{5\cdot K_R\cdot(s+2)}{s\cdot(s+1)(s+2)+5\cdot K_R}=2$$

d) R(s)·G(s) es de Tipo 1, por lo tanto: $e_p = 0$; $e_v = 1/K_v$; $e_a = \infty$; donde: $K_v=\lim_{s\to 0} s\cdot h_0\cdot G_{eq}(s)$

$$h_0=\lim_{s\to 0} H(s)=2.5 \Rightarrow H(s)-h_0=\frac{5}{s+2}-2.5=\frac{-2.5\cdot s}{s+2}$$

$$G_{eq}(s)=\frac{R(s)\cdot G(s)}{1+R(s)\cdot G(s)\cdot(H(s)-h_0)}=\frac{\dfrac{K_R}{s\cdot(s+1)}}{1+\dfrac{-2.5\cdot K_R\cdot s}{s\cdot(s+1)\cdot(s+2)}}=\frac{K_R\cdot(s+2)}{s\cdot(s+1)\cdot(s+2)-2.5\cdot K_R\cdot s}$$

$$K_v=2.5\frac{2\cdot K_R}{2-2.5\cdot K_R}=\frac{5\cdot K_R}{2-2.5\cdot K_R}$$

$$\boxed{e_v=\frac{2-2.5\cdot K_R}{5\cdot K_R}\quad \textit{segundos}}$$

e) Para que el sistema tenga un comportamiento críticamente amortiguado el sistema M(s) debería ser de 2º orden y tener un polo real doble. La situación más próxima a la planteada sería que los polos dominantes de M(s) fueran un polo doble, y esa situación se da, según indica el lugar de las raíces, cuando $\mathbf{K_R=0.077}$.

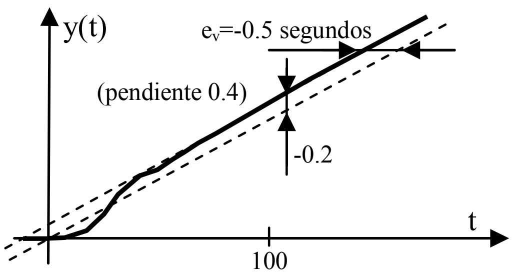
Para eliminar el error de velocidad $e_v=0$ habrá que aumentar el tipo del sistema R(s)·G(s) sin variar K_R, añadiendo un polo en el origen en la función de trasferencia R(s). Se construye de esta manera un regulador PI:

$$\mathrm{R(s)}=0.077\cdot\frac{\mathrm{(s+c)}}{s}$$

El valor de "c" se determina tomando 1/10 de la distancia de los polos que serán dominantes del sistema M(s) para $K_R=0.077$, es decir: c=0.423/10=0.0423

$$\boxed{\mathrm{R(s)}=0.077\cdot\frac{\mathrm{(s+0.0423)}}{s}}$$

NOTA: En realidad este regulador no proporciona exactamente un error de velocidad nulo, debido a que la realimentación no es simplemente un valor de ganancia sin dinámica. La presencia de dinámica en la realimentación H(s) hace que el error de velocidad se vuelva negativo y que la rampa que sigue la respuesta del sistema se "adelante" a la rampa de la señal de entrada. Sin embargo, este fenómeno es prácticamente despreciable en este caso y sólo es significativo cuando la dinámica de los elementos de realimentación es mucho más lenta que la de la cadena directa del lazo.



Respuesta a una rampa de pendiente 1