

TEMA X

ESTUDIO DE LA ESTABILIDAD EN EL DOMINIO FRECUENCIAL

- 1.-Introducción.
- 2.-Criterio de estabilidad de Nyquist.
- 3.-Estabilidad relativa.
 - 3.1.-Margen de ganancia.
 - 3.2.-Margen de fase.
- 4.-Estabilidad mediante las trazas de Bode y Black.
- 5.-Ábacos de Nichols.

1.-Introducción.

Como se recordará, ya hemos dedicado un tema a la respuesta en frecuencia de un sistema. En este capítulo vamos a utilizar las ideas introducidas en aquel, para aplicarlo al estudio de la estabilidad de sistemas, pero ahora desde el punto de vista frecuencial, basándonos en el importante teorema de estabilidad debido a Nyquist (frente a los métodos ya vistos: Routh y Lugar de las Raíces).

Primeramente definiremos algunos parámetros de interés, necesarios para la aplicación del criterio de Nyquist, como son la frecuencia de resonancia, ancho de banda, márgenes de ganancia y de fase, etc.

Seguidamente, se expondrá (sin demostrar) el criterio de estabilidad de Nyquist, aplicándolo, principalmente, al caso más habitual de funciones de transferencia: las de "fase mínima".

A continuación se hablará de la estabilidad relativa de los sistemas (este concepto es el mismo que se introdujo en el tema dedicado al método de Routh, con el término de "margen de estabilidad").

Veremos como se aplica el teorema de Nyquist según el tipo de representación frecuencial elegido: diagrama polar (Nyquist), diagrama de Bode o diagrama de Black (incluyendo los ya conocidos ábacos de Nichols).

En este tema, solamente veremos el análisis de la estabilidad de sistemas en el dominio de la frecuencia, aunque también apuntaremos indicios sobre como se debería proceder para el diseño de la compensación adecuada para éstos. El diseño completo y detallado de los compensadores y controladores, lo retrasaremos hasta el siguiente tema.

Antes de comenzar con lo indicado, vamos a indicar que en el dominio de la frecuencia, también podemos saber cual es el tipo de un sistema (atendiendo al error de estado estacionario, tal y como se indicó en el tema al respecto): A partir de lo que allí se indicó, es fácil demostrar que el tipo de un sistema será n , si la pendiente de la curva $G(s) \cdot H(s)$ del diagrama de Bode, cuando ω tiende a cero es $-20 \cdot n$ db/dec. (es decir, número de polos repetidos en $\omega = 0$ rd/s).

Dado un sistema típico como el indicado en la figura 1, podemos definir las siguientes magnitudes (algunas ya han sido introducidas con anterioridad, pero es útil recordarlas de nuevo aquí).

Pico de resonancia (M_r):

En general da una indicación de la estabilidad relativa del sistema en lazo cerrado (la resonancia es mayor cuanto más próximo esté el polo al EI; de hecho, cuando el polo es imaginario puro, este pico llega hasta el infinito).

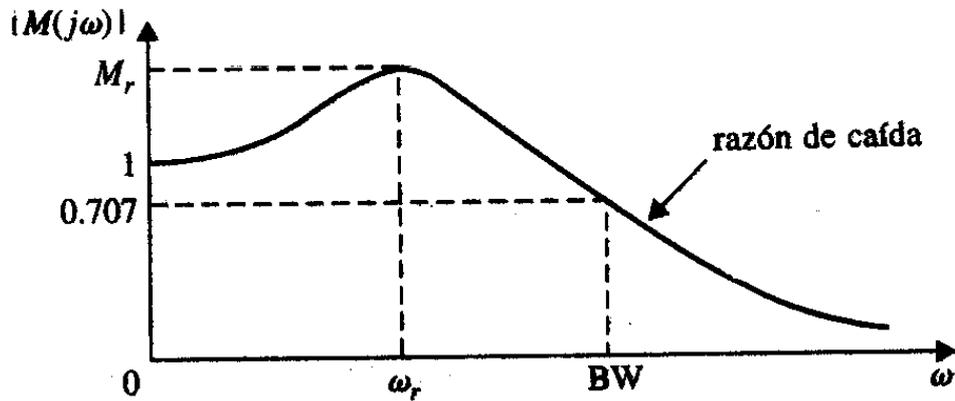


Figura 1

Frecuencia de resonancia (ω_r):

Es la frecuencia en la cual ocurre el pico de resonancia M_r . Suele estar un poco más a la izquierda que la frecuencia donde se encuentra el polo que lo produce.

Ancho de Banda (BW):

Es la frecuencia a la cual $|M(j\omega)|$ cae al 70.7% ($1/\sqrt{2}$ o $\approx 3\text{db}$) por debajo de su valor a la frecuencia cero.

En general, el ancho de banda de un sistema de control da una indicación de las propiedades de respuesta transitoria en el dominio del tiempo. Un ancho de banda grande corresponde a un tiempo de levantamiento corto (rápido), ya que las señales de más alta frecuencia pasan más fácilmente a través del sistema. Por el contrario, si el ancho de banda es pequeño, solamente señales de frecuencia relativamente bajas pueden pasar y la respuesta en el tiempo será lenta.

El ancho de banda también indica las características de filtrado de ruido y la robustez del sistema. Con el término robustez se indica una medida de la sensibilidad de un sistema a la variación de parámetros. Un sistema robusto es uno que es insensible a la variación de parámetros.

Es interesante analizar estos parámetros para un sistema prototipo de segundo orden (si el sistema es de mayor orden, pero tiene dos polos dominantes, también podría ser útil esta aproximación).

Sea la función de transferencia en lazo cerrado:

$$M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2}$$

pasando al dominio de la frecuencia:

-4- Estudio de la Estabilidad en el dominio frecuencial

$$M(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{w_n^2}{(j\omega)^2 + 2\xi w_n(j\omega) + w_n^2} = \frac{1}{1 + j \cdot 2(w/w_n)\xi - (w/w_n)^2}$$

Haciendo el cambio $u = w/w_n$ tendremos:

$$M(ju) = \frac{1}{1 - u^2 + j \cdot 2u\xi}$$

$$|M(ju)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - u^2)^2 + (2\xi u)^2}}$$

$$\angle M(ju) = \phi_M(ju) = -\arctg \frac{2\xi u}{1 - u^2}$$

Para encontrar el valor de la frecuencia de resonancia, buscaremos el máximo, igualando a cero la derivada del módulo, de lo que obtenemos:

O bien $u = 0$ (solamente tiene sentido si no hay resonancia), o bien:

$$u_r = \sqrt{1 - 2\xi^2}$$

Este máximo solamente será tal si $\xi < 1/\sqrt{2}$. Deshaciendo el cambio de variable se obtiene:

$$w_r = w_n \sqrt{1 - 2\xi^2} \quad (\xi < 1/\sqrt{2}) \Rightarrow$$

$$M_r = \frac{1}{2\xi \sqrt{1 - 2\xi^2}}$$

Para el otro caso ($\xi > 1/\sqrt{2}$), se tendrá $w_r = 0$ rad/s y $M_r = 1$.

Puede verse que en el caso de interés, w_r depende tanto de w_n (directamente proporcional) como de ξ , mientras que M_r , solamente depende del coeficiente de amortiguamiento ξ .

Es conveniente recordar que el polo que produce el pico (solamente para sistemas de 2º orden, subamortiguados), se encuentra en w_n , por lo que el máximo solamente estará encima del polo cuando $\xi = 0$, esto es, polos imaginarios puros (y resonancia infinita: $M_r = \infty$), cosa que ya sabíamos cuando estudiamos los diagramas de Bode.

En cuanto al ancho de banda, aplicando que $|M(ju)| = 1/\sqrt{2}$ se llega a:

$$BW = w_n \sqrt{(1 - 2\xi^2) + \sqrt{\xi^4 - 4\xi^2 + 2}}$$

que también es directamente proporcional a w_n .

En la Figura 2 puede verse que BW disminuye monótonamente conforme ξ aumenta.

También podemos apuntar que BW es inversamente proporcional al tiempo de levantamiento., así como que el ancho de banda y M_r son proporcionales entre si (para $\xi < 1/\sqrt{2}$).

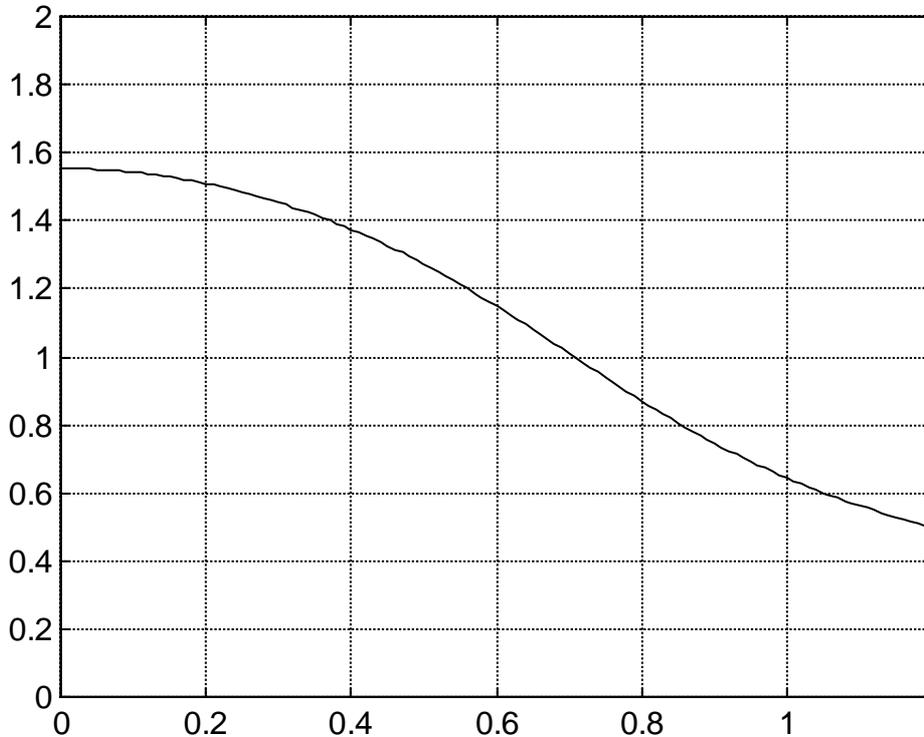


Figura 2

En resumen, t_r es proporcional a $1/BW$, por lo que si BW aumenta, entonces t_r disminuye (el sistema será más rápido).

Igualmente, sabemos que w_n es directamente proporcional a BW (e inversamente proporcional, por tanto, a t_r).

Por último, el amortiguamiento ξ es directamente proporcional a t_r (y, por tanto, inversamente proporcional a BW).

Para terminar con esta extensa introducción, recordar que el efecto de añadir un cero a la función de transferencia de la trayectoria directa ($G(s)$) implicaba incrementar el BW del sistema en lazo cerrado (si el cero está próximo al origen). Mientras que añadir un polo lo convierte en menos estable en lazo cerrado y disminuye su BW.

Queremos resaltar finalmente que cualquier forma complicada de las curvas de los diagramas polares es causada por la dinámica del numerador, es decir, por las constantes de tiempo del numerador de la función de transferencia.

2.-Criterio de Estabilidad de Nyquist.

Es interesante comenzar este apartado clasificando las funciones de transferencia en **funciones de fase mínima** (no tienen ni polos ni ceros en el SPD) y **funciones de fase no mínima** (tienen un polo o un cero en el SPD, al menos).

Sea, por ejemplo, la función de transferencia

$$G(s) = 10 \frac{s - z}{s(s + 2)(s + 5)}$$

Como sabemos, el diagrama de Bode, para el módulo es el mismo, independientemente que el cero se encuentre en el SPD ($z = +10$), o en el SPI ($z = -10$), tal y como se muestra en la figura 3.

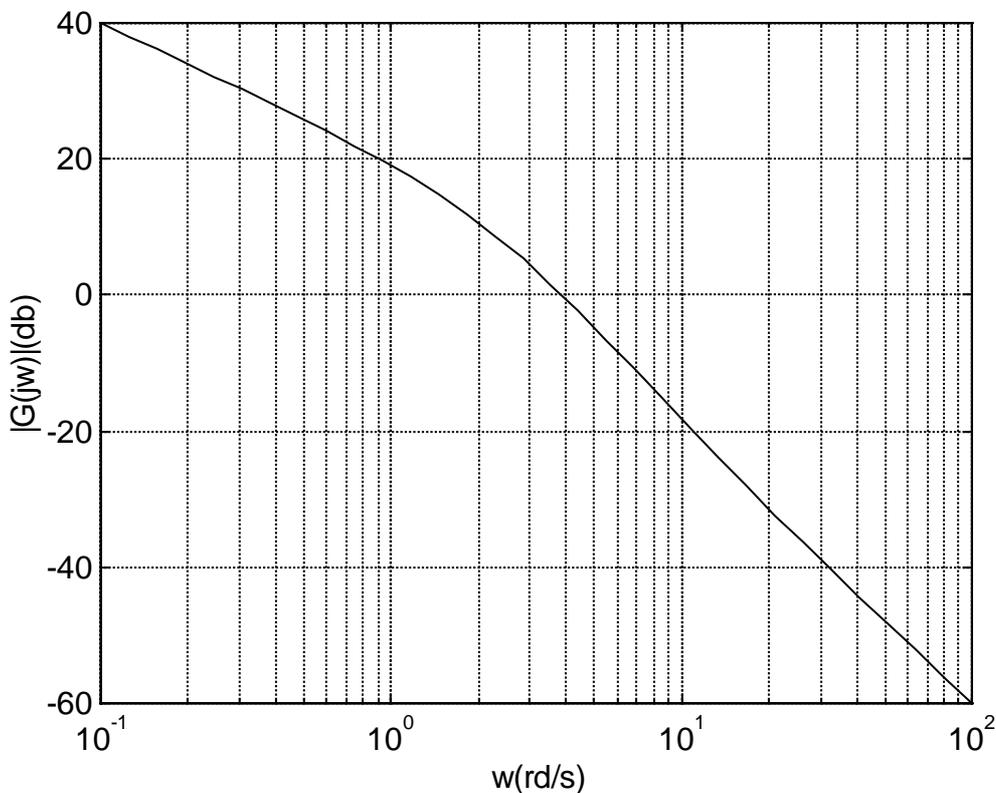


Figura 3

Ahora bien el diagrama del argumento sí que varía en función del semiplano donde se encuentre el cero. En la figura 4 se representa el argumento para la función de fase mínima ($z = -10$) en trazo continuo y la de fase no mínima ($z = +10$) en trazo discontinuo. En ella puede apreciarse que para la función de fase mínima, se tiene un primer corte por 180° en $w \approx 6$ rad/s, mientras que la de fase no mínima no presenta dicho corte.

Debe tenerse cuidado cuando se emplean las trazas de Bode (o de Black) para el análisis y diseño de sistemas con funciones de transferencia de fase no mínima. Para estudios de estabilidad, la traza polar, conjuntamente con el criterio de Nyquist, es más conveniente para sistemas de fase no mínima.

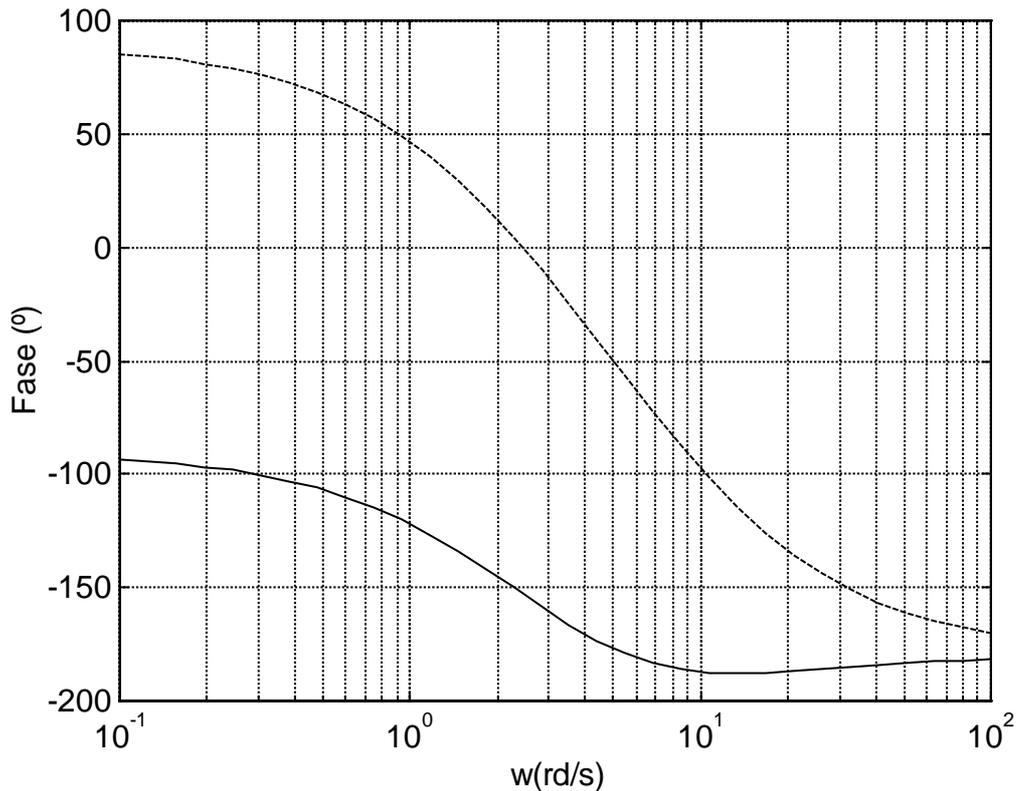


Figura 4

Las trazas de Bode (y Black) de funciones de transferencia de la trayectoria directa, de fase no mínima, no deben emplearse para análisis de estabilidad de sistemas de control en lazo cerrado.

Las funciones de transferencia de fase mínima tienen una propiedad importante en que sus características de magnitud y fase están relacionadas en forma única. En otras palabras, dada una función de fase mínima $G(s)$, al conocer sus características de magnitud $|G(j\omega)|$, automáticamente se conocen también las del argumento $\angle G(j\omega)$, y viceversa. Esto no ocurre para las funciones de transferencia de fase no mínima.

Hasta ahora, se han presentado dos métodos para determinar la estabilidad de sistemas lineales SISO: el criterio de Routh-Hurwitz y el método del Lugar de las Raíces, para determinar la estabilidad, al localizar las raíces de la ecuación característica del lazo cerrado. Por supuesto, si los coeficientes de la ecuación característica son todos conocidos, se pueden resolver de forma numérica, con la precisión deseada.

El criterio de Nyquist es un método semigráfico, que determina la estabilidad de un sistema en lazo cerrado al investigar las propiedades de la traza en el dominio de la frecuencia (la traza de Nyquist), de la función de transferencia $G(s)H(s)$, abreviadamente $L(s)$. Este es otro ejemplo de la utilización de las propiedades de la función de transferencia de lazo para encontrar el comportamiento del sistema en lazo cerrado. El criterio de Nyquist tiene las siguientes características, que lo hacen un método alternativo y atractivo, para el análisis y diseño de sistemas de control:

-8- Estudio de la Estabilidad en el dominio frecuencial

i) Además de aportar la estabilidad absoluta, como el criterio de Routh-Hurwitz, también da información sobre la estabilidad relativa de un sistema estable y el grado de estabilidad de un sistema inestable. También da información de cómo se puede mejorar la estabilidad del sistema, si es necesario.

ii) La traza de Nyquist de $L(s)$ es muy fácil de obtener, al menos con ayuda de un computador.

iii) La traza de Nyquist de $L(s)$ da información sobre las características en el dominio de la frecuencia, tales como M_r , w_r , BW y otras, con facilidad.

iv) La traza de Nyquist es útil para sistemas con retardos puros que no se pueden tratar con el criterio de Routh-Hurwitz, y que son difíciles de analizar con el método del lugar de las raíces.

El criterio de Nyquist representa un método para determinar la localización de las raíces de la ecuación característica con respecto a los semiplanos izquierdo y derecho del plano s . A diferencia del lugar de las raíces, el criterio de Nyquist no da la localización exacta de las raíces de la ecuación característica.

Consideraremos la función de transferencia en lazo cerrado de un sistema SISO, de la forma:

$$M(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

en donde $G(s)H(s)$, que simplificaremos como la transferencia de lazo $L(s)$ (cuando el sistema es de lazo único) tiene la siguiente forma:

$$G(s)H(s) \equiv L(s) = \frac{K(1+T_1s)(1+T_2s)\dots(1+T_ms)}{s^p(1+T_as)(1+T_bs)\dots(1+T_ns)} e^{-Ts}$$

en donde las T_i son coeficientes reales o complejos conjugados, y T es un tiempo de retardo real.

Ya que la ecuación característica se obtiene al hacer que el polinomio denominador de $M(s)$ sea cero, las raíces de la ecuación característica son también los ceros de $1 + L(s)$. La ecuación característica será pues:

$$\Delta(s) = 1 + L(s) = 0$$

Nótese que:

- Los ceros de la función de transferencia de lazo son los ceros de $L(s)$.
- Los polos de la función de transferencia de lazo son los polos de $L(s)$.
- Los polos de la función de transferencia en lazo cerrado son los ceros de $1+L(s)$.
- Los polos de $1+L(s)$ son los polos de $L(s)$.

Se definen dos tipos de estabilidad con respecto a la configuración del sistema:

i) Estabilidad en lazo abierto: Un sistema se dice estable en lazo abierto si los polos de la función de transferencia de lazo $L(s)$ están todos en el semiplano

izquierdo. Para un sistema de lazo sencillo, esto es equivalente a que el sistema sea estable cuando el lazo se abre en cualquier punto.

ii) Estabilidad en lazo cerrado: Un sistema se dice estable en lazo cerrado, o simplemente estable, si los polos de la función de transferencia en lazo cerrado o los ceros de $1+L(s)$ están en el SPI del plano s . Las excepciones a las anteriores definiciones son los sistemas con polos o ceros intencionadamente localizados en $s = 0$.

Diremos que “un punto o una región en un plano de una función compleja está **encerrado** por una trayectoria cerrada si está dentro de la trayectoria”.

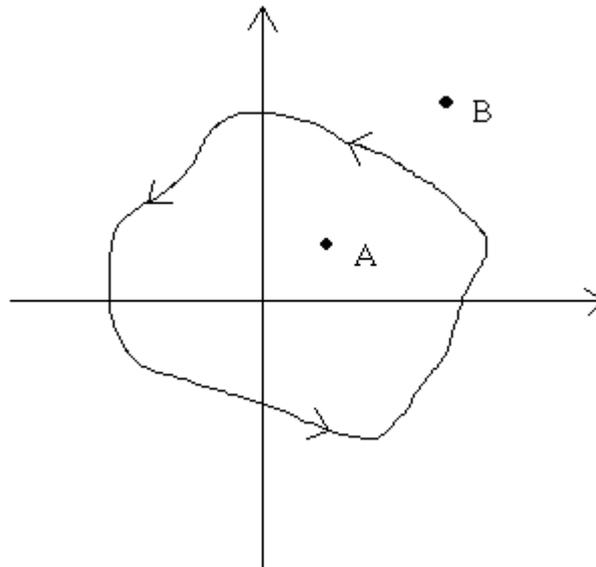


Figura 5

En la figura 5, el punto A está rodeado por la trayectoria cerrada, por lo que A está encerrado. Por el contrario, B no está encerrado.

Si, además, la trayectoria cerrada tiene una dirección asignada, el encierro podrá hacerse en el sentido de las manecillas del reloj (SMR) o en el sentido contrario (SCMR).

Diremos que “un punto o región se dice **incluido** por una trayectoria cerrada si está encerrado en la dirección SCMR, o el punto o región está a la izquierda de la trayectoria cuando ésta se recorre en la dirección prescrita”.

Este concepto es útil si solamente se muestra una porción de la trayectoria cerrada.

Cuando un punto está encerrado por una trayectoria cerrada, se puede asignar un número N al número de veces que está encerrado. Por definición, N es positivo para encierros en el SCMR y negativo para rodeos en el SMR.

En la figura 6, el punto A está encerrado una sola vez, mientras que el B lo está 2 veces.

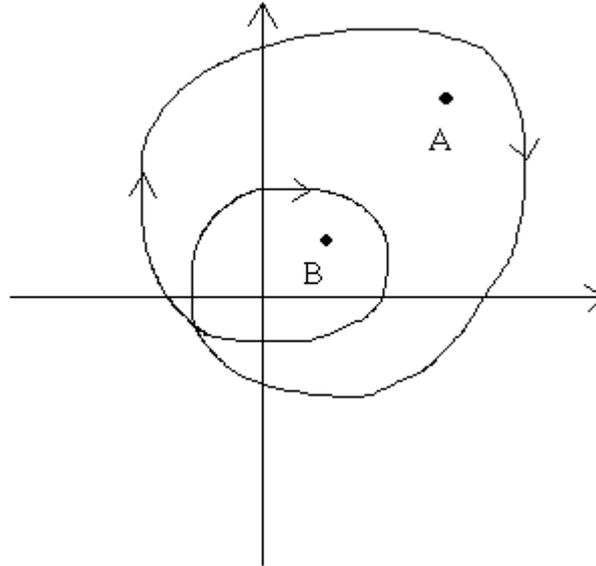


Figura 6

El criterio de Nyquist (que no vamos a demostrar) se basa en el conocido Principio del Argumento de Cauchy, muy utilizado en la Ingeniería. En esencia, dicho criterio indica que:

$$N = Z - P$$

Donde:

N es el número de veces que la traza $L(s)$ encierra al punto $(-1,0j)$

Z es el número de ceros de $1 + L(s)$ que están dentro de la trayectoria de Nyquist (es decir, en el SPD).

P es el número de polos de $1 + L(s)$ que están dentro de la trayectoria de Nyquist (es decir, en el SPD), que son los mismos que los de $L(s)$.

De acuerdo con los criterios definidos anteriormente:

-Para la estabilidad en lazo cerrado, Z debe ser igual a cero.

-Para la estabilidad en lazo abierto, P debe ser igual a cero.

Por tanto, la condición de estabilidad de acuerdo al principio de Nyquist se establece como:

$$N = -P$$

esto es:

“Para que un sistema en lazo cerrado sea estable, la traza de $L(s)$ debe encerrar al punto $(-1,j0)$ un número de veces igual al número de polos de $L(s)$ que están en el semiplano derecho del plano s , y los encierros, si los hay, deben ser hechos en la dirección SMR (si la trayectoria está definida en sentido SCMR)”.

Este criterio se puede simplificar considerablemente para sistemas con función de transferencia del tipo fase mínima (habituales en la gran mayoría de los sistemas reales), ya que en este caso, se reduce a

$$N = 0$$

o sea:

“Para un sistema en lazo cerrado con función de transferencia de lazo $L(s)$, que es de tipo de fase mínima, el sistema es estable en lazo cerrado si la gráfica de $L(s)$ que corresponde a la trayectoria de Nyquist no encierra al punto $(-1, 0j)$, si el punto $(-1, j0)$ está encerrado por la traza de Nyquist, el sistema es inestable”.

Dada la profundidad de contenidos que se pretende abarcar en este curso, solamente estudiaremos este criterio para funciones de fase mínima, por lo que, a partir de ahora, siempre supondremos el criterio de Nyquist como el enunciado que hemos dado en último lugar.

Ejemplo:

$$L(s) = G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+2)(s+10)}$$

Esta función es de fase mínima, por lo que la estabilidad del sistema en lazo cerrado se puede determinar al investigar si la traza de Nyquist de $L(j\omega)$ desde $\omega = \infty$ hasta $\omega = 0$ encierra al punto $(-1, j0)$.

La figura 7 muestra la traza de Nyquist de esa función de transferencia (con $K = 100$)

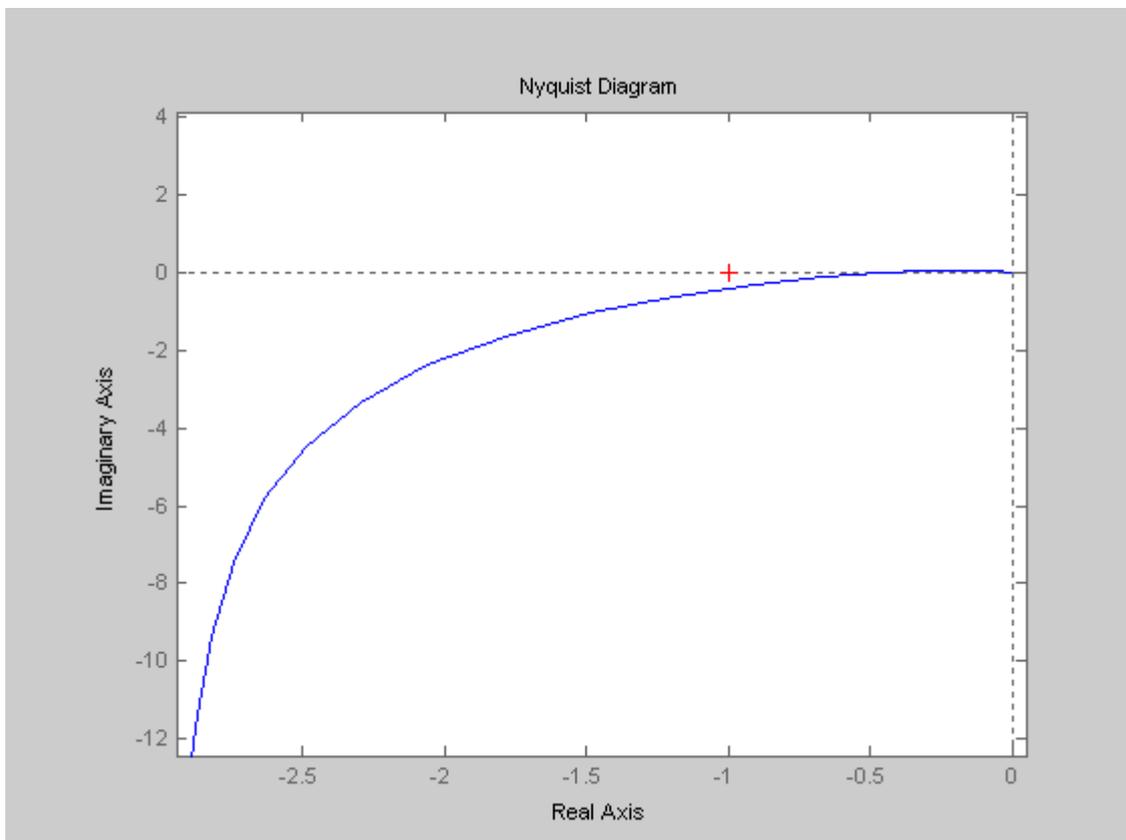


Figura 7

-12- Estudio de la Estabilidad en el dominio frecuencial

Como K es variable, deberíamos hacer un bosquejo en función de K. Para ello, seguiremos los siguientes pasos:

1º) Sustituir $s = jw$, con lo que

$$L(jw) = \frac{K}{jw(jw + 2)(jw + 10)}$$

2º) Sustituimos $w = 0$ en la ecuación anterior: $L(j0) = \infty \angle -90^\circ$

3º) Sustituir $w = \infty$ en la ecuación de $L(jw)$: $L(j\infty) = 0 \angle -270^\circ$

4º) Para encontrar la intersección de la traza de Nyquist con el eje real, si existe, se racionaliza $L(jw)$ multiplicando y dividiendo $L(jw)$ por el complejo conjugado del denominador, obteniendo:

$$L(jw) = \frac{K(-12w - j(20 - w^2))}{w(144w^2 + (20 - w^2))}$$

5º) Para encontrar las intersecciones posibles sobre el eje real, debemos forzar que la parte imaginaria de $L(jw)$ sea nula:

$$\text{Im}[L(jw)] = \frac{-K(20 - w^2)}{w(144w^2 + (20 - w^2))} = 0$$

Las soluciones en esta última ecuación son $w = \infty$, que se sabe, es una solución de $L(jw) = 0$, y:

$$w = \pm\sqrt{20} \text{ rad/s}$$

Ya que w es positiva, la respuesta correcta nos lleva a que:

$$L(j\sqrt{20}) = -\frac{12K}{2880} = -0.004167K$$

Con los pasos anteriores, podemos obtener el bosquejo de la traza de Nyquist, representada en la figura 7, pero ahora en función de K: sabemos que el punto de corte con el eje real ocurre en $-0.004167K$, por lo que para valores de K inferiores a $1/0.004167 \approx 240$, la traza de Nyquist no encerraría al punto $(-1, j0)$, con lo cual el sistema, en lazo cerrado, sería estable. Justamente para el valor $K = 240$, el sistema pasaría por el punto $(-1, j0)$ y el sistema sería, por tanto marginalmente estable; mientras que, para valores de K superiores a 240, el punto $(-1, j0)$ quedaría encerrado por la traza y, por tanto, el sistema sería inestable en lazo cerrado).

Este mismo resultado puede obtenerse aplicando el criterio de Routh-Hurwitz a la ecuación característica

$$s^3 + 12s^2 + 20s + K$$

Los mismos resultados pueden obtenerse estudiando el Lugar de las Raíces para ese sistema, tal y como se muestra en la figura 8.

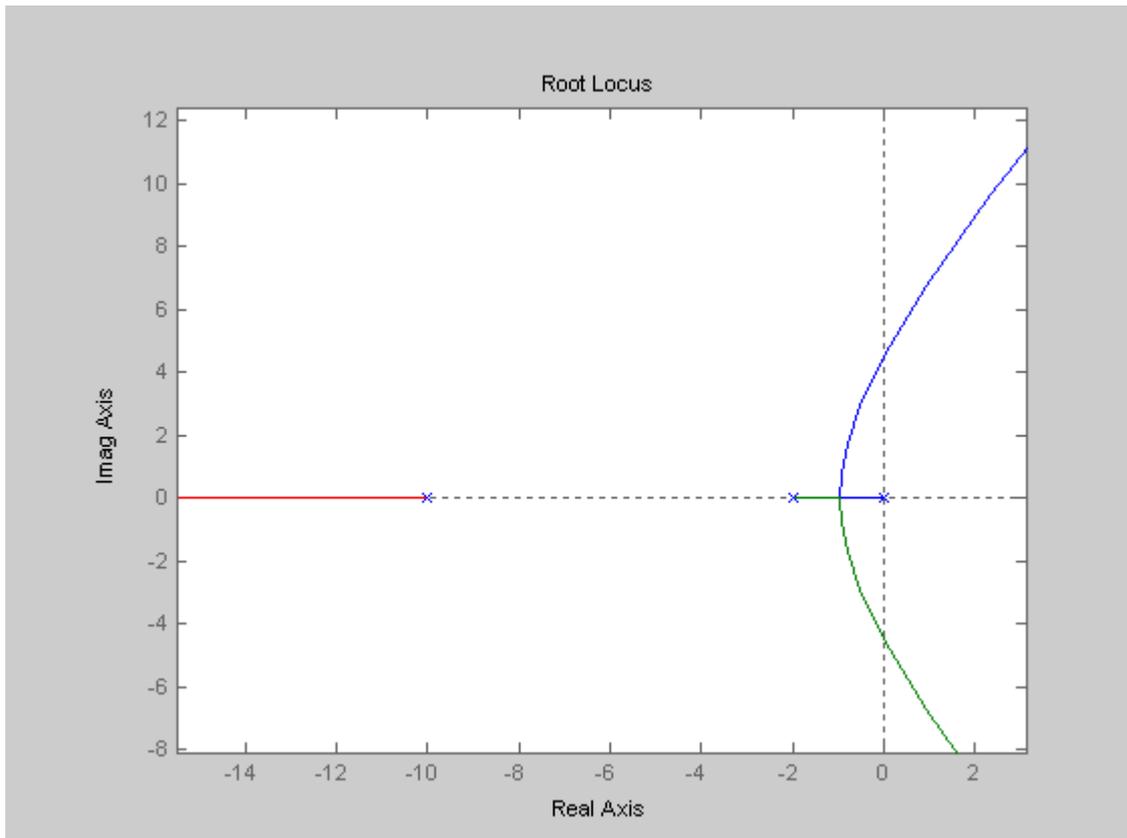


Figura 8

Respecto a la adición de polos y ceros a la función de lazo, y el efecto que ello produce sobre el lazo cerrado, solamente indicaremos (no es difícil llegar a estas conclusiones) que:

i) La adición de polos en $s = 0$ produce que para un solo polo, el sistema puede seguir siendo estable, pero para dos o más, el sistema pasa a ser inestable en lazo cerrado (el argumento tanto en $\omega=0$ como en $\omega=\infty$ se incrementa en -90° por cada polo).

ii) La adición de polos distintos de cero no modifica el comportamiento para $\omega=0$ pero sí que suma -90° por cada polo, lo cual, tiende a inestabilizar el sistema en lazo cerrado.

iii) Anteriormente se mostró que añadir ceros a la función de transferencia de lazo tiene el efecto de reducir el porcentaje de sobreimpulso y de estabilización. En términos del criterio de Nyquist, este efecto se demuestra fácilmente, ya que la multiplicación del término $(1 + T_d s)$ a la función de transferencia de lazo incrementa la fase de $L(s)$ en $+90^\circ$ en $\omega = \infty$.

3.-Estabilidad relativa.

Ya se ha visto la relación entre el pico de resonancia M_r de la respuesta en frecuencia y el sobreimpulso máximo (M_p) a través de las relaciones de ambas magnitudes con el factor de amortiguamiento y la frecuencia natural no amortiguada. La comparación y correlación entre el dominio de la frecuencia y los parámetros en el dominio del tiempo son útiles en la predicción del comportamiento de los sistemas de control. En general se está interesado no sólo en la estabilidad absoluta de un sistema, sino también en qué tan estable es. Esto último se llama **estabilidad relativa**. En el dominio del tiempo, la estabilidad relativa se mide por parámetros tales como el sobreimpulso máximo y el factor de amortiguamiento. En el dominio de la frecuencia, el pico de resonancia M se puede emplear para indicar la estabilidad relativa. Otra forma de medir la estabilidad relativa en el dominio de la frecuencia es observando qué tan cerca se encuentra la traza de Nyquist de $L(j\omega)$ del punto $(-1, j0)$.

Para mostrar el concepto de estabilidad relativa en el dominio de la frecuencia, se muestran las trazas de Nyquist, la respuesta al escalón correspondiente y las respuestas en frecuencia de un sistema típico de tercer orden en la figura 9, para cuatro valores diferentes de la ganancia de lazo K . Se supone que la función de lazo $L(j\omega)$ es de fase mínima, por lo que el encierro del punto $(-1, j0)$ es suficiente para demostrar la inestabilidad del sistema en lazo cerrado.

Los casos evaluados son los siguientes:

1)Caso (a): ganancia de lazo K baja. La traza de Nyquist de $L(j\omega)$ intersecta al eje real negativo en un punto muy lejano a la derecha del punto $(-1, j0)$. La respuesta al escalón está bien amortiguada, y el valor de M_r , de la respuesta en frecuencia es bajo.

2)Caso (b): K se incrementa. La intersección se mueve cerca del punto $(-1, j0)$; el sistema es aún estable, ya que el punto crítico no está encerrado, pero la respuesta al escalón tiene un sobreimpulso máximo grande, y M_r también es grande.

3)Caso (c): K se incrementa más. La traza de Nyquist ahora pasa a través del punto $(-1, j0)$, y el sistema es marginalmente estable. La respuesta al escalón se vuelve oscilatoria con amplitud constante, y M_r se vuelve infinita.

4)Caso (d): K es relativamente grande. La traza de Nyquist encierra al punto $(-1, j0)$, y el sistema es inestable. La respuesta al escalón se vuelve no acotada. La curva de magnitud del módulo de $|M(j\omega)|$ en función de ω deja de tener significado. De hecho, el sistema es inestable: ¡El valor de M_r es todavía finito!.

En todo el análisis anterior, la curva de fase de la respuesta en frecuencia en lazo cerrado también provee información cualitativa acerca de la estabilidad. Observe que la pendiente negativa de la curva de fase se incrementa conforme la estabilidad relativa disminuye. Cuando el sistema es inestable, la pendiente más allá de la frecuencia de resonancia se vuelve positiva.

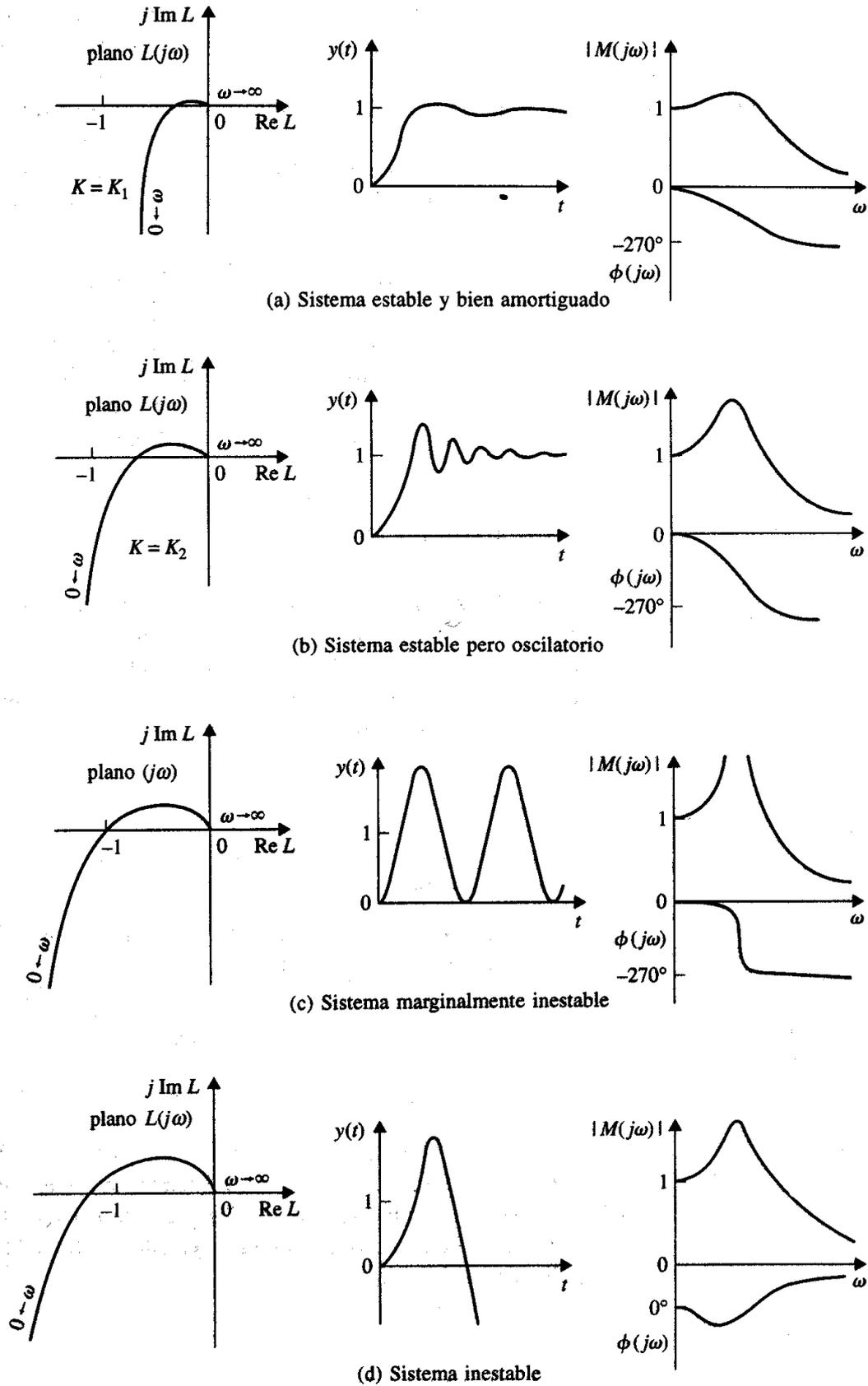


Figura 9

3.1.-Margen de ganancia.

El **margen de ganancia** (GM) es uno de los criterios más empleados para medir la estabilidad relativa de sistemas de control. En el dominio de la frecuencia, el margen de ganancia se emplea para indicar la cercanía de la intersección del eje real negativo hecho por la traza de Nyquist de $L(j\omega)$ al punto $(-1, j0)$. Antes de dar el significado del margen de ganancia, definiremos el **cruce de fase** de la traza de Nyquist y la **frecuencia de cruce de fase**:

Cruce de fase: Un cruce de fase sobre la traza de $L(j\omega)$ es un punto en el cual la traza se intersecta con el eje real negativo (esto es, la fase en ese punto es de 180°).

Frecuencia de cruce de fase (ω_p): Es la frecuencia en el cruce de fase, o donde $\angle L(j\omega) = 180^\circ$.

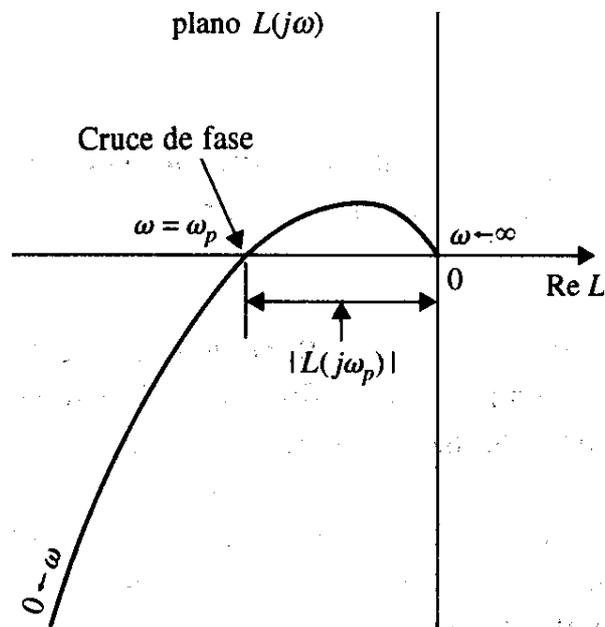


Figura 10

La figura 10 muestra la traza de Nyquist para una función de transferencia de lazo $L(j\omega)$ de fase mínima. Se define el margen de ganancia como:

$$GM = 20 \log_{10} \frac{1}{|L(j\omega_p)|} = -20 \log_{10} |L(j\omega_p)|$$

Con base a esta definición, podemos obtener las siguientes conclusiones acerca del margen de ganancia del sistema de la figura 10:

i) La traza no intersecta al eje real negativo (no hay cruce de fase no cero, finito):

$$|L(j\omega_p)| = 0 \quad GM = \infty \text{ db}$$

ii) La traza $L(j\omega)$ intersecta al eje real negativo entre 0 y el punto -1 :

$$0 < |L(j\omega_p)| < 1 \quad GM > 0 \text{ db}$$

iii) La traza $L(j\omega)$ pasa a través del punto $(-1, j0)$:

$$|L(j\omega_p)| = 1 \quad GM = 0 \text{ db}$$

iv) La traza de $L(j\omega)$ encierra al punto $(-1, j0)$:

$$|L(j\omega)| > 1 \quad GM < 0 \text{ db}$$

Con base en la anterior discusión, el significado físico del margen de ganancia se puede resumir como:

*“**Margen de ganancia** es la cantidad de ganancia en decibelios (db) que se pueden añadir al lazo antes de que el sistema en lazo cerrado se vuelva inestable”.*

3.2.-Margen de fase.

El margen de ganancia es sólo una representación unidimensional de la estabilidad relativa de un sistema en lazo cerrado. En principio, uno podría pensar que un sistema con margen de ganancia grande debería ser más estable que uno con margen de ganancia pequeño. Desafortunadamente, el margen de ganancia por sí solo es inadecuado para indicar la estabilidad relativa cuando otros parámetros del sistema como la ganancia de lazo están sujetos a variación. Por ejemplo, los dos sistemas representados por las trazas de $L(j\omega)$ en la figura 11, en apariencia tienen el mismo margen de ganancia. Sin embargo, el lugar geométrico de A en realidad corresponde a un sistema más estable que el lugar geométrico de B, ya que cualquier cambio en los parámetros del sistema que afecte a la fase de $L(j\omega)$, el lugar geométrico de B puede encerrar al punto $(-1, j0)$. Aún más, se puede mostrar que el sistema B en realidad tiene un M_r más grande que el sistema A.

Para incluir el efecto de corrimiento de fase sobre la estabilidad, se introduce el **margen de fase (PM)**, que requiere que se den primeramente las siguientes definiciones:

Cruce de ganancia: Es el punto sobre la traza de $L(j\omega)$ en el cual la magnitud de $L(j\omega)$ es igual a 1.

Frecuencia de cruce de ganancia (ω_g): Es la frecuencia de $L(j\omega)$ en el cruce de ganancia, o donde $|L(j\omega_g)| = 1$

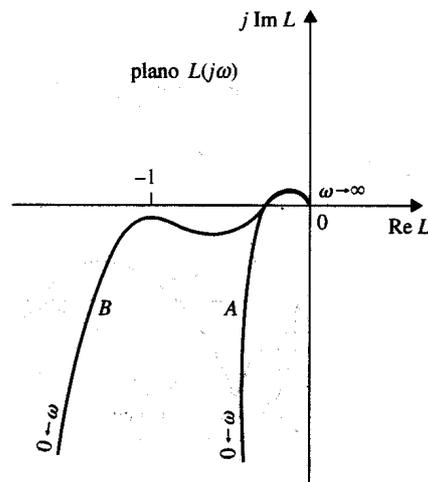


Figura 11

La definición del margen de fase se establece como:

“El **margen de fase (PM)** se define como el ángulo en grados que la traza $L(j\omega)$ se debe rotar alrededor del origen, para que el cruce de ganancia pase por el punto $(-1, j0)$ ”.

La figura 12 muestra la traza de Nyquist de una $L(j\omega)$ de fase mínima típica, y el margen de fase se muestra como el ángulo entre la línea que pasa a través del cruce de ganancia y el origen y el eje real negativo del plano $L(j\omega)$.

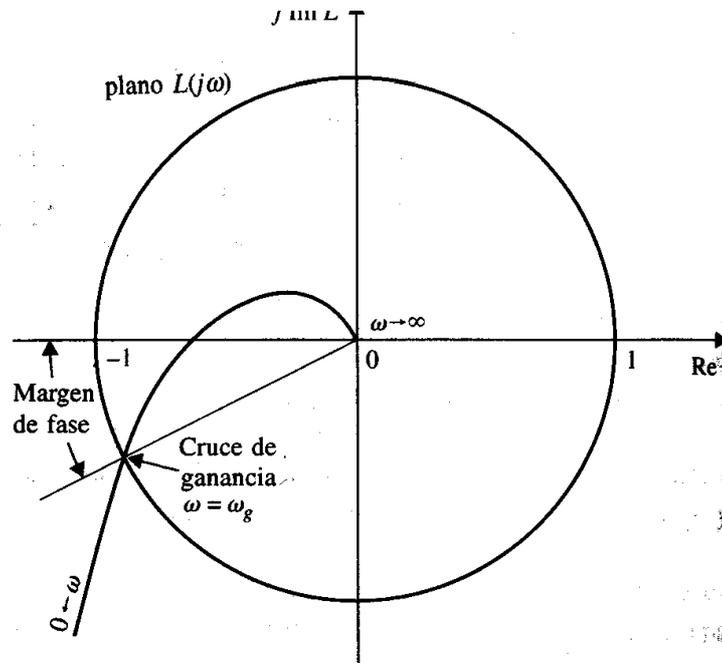


Figura 12

En contraste al margen de ganancia, que se determina por la ganancia de lazo, el margen de fase indica el efecto sobre la estabilidad del sistema debido a cambios en los parámetros del sistema que teóricamente alteran la fase de $L(j\omega)$ por una cantidad igual en todas las frecuencias. El margen de fase es la cantidad de retardo puro que se puede añadir al sistema antes de que el sistema en lazo cerrado se vuelva inestable.

Cuando el sistema es de tipo de fase mínima, la expresión analítica del margen de ganancia se puede expresar como:

$$\text{Margen de fase (PM)} = \angle L(j\omega_g) - 180^\circ$$

en donde ω_g es la frecuencia de cruce de ganancia.

Generalmente un MG de unos 6db y un MP entre 30 y 35° está bien. Para sistemas de 2° orden con $\xi < 0.6$ se cumple bien la aproximación: $MP = 10\xi$.

4.-Estabilidad mediante las trazas de Bode y Black.

Las trazas de Bode de una función de transferencia son una herramienta gráfica de suma utilidad para el análisis y diseño de sistemas de control lineales. Antes de la aparición de los computadores, las trazas de Bode eran a menudo conocidas como “trazas asintóticas”, debido a que las curvas de magnitud y fase se podían bosquejar de sus propiedades asintóticas sin detallar las gráficas. Las aplicaciones modernas de las trazas de Bode para sistemas de control se deben identificar con las siguientes ventajas y desventajas:

-VENTAJAS:

i) En ausencia de una computadora, las trazas de Bode se pueden bosquejar por la aproximación de magnitud y fase con segmentos de línea recta.

ii) El cruce de ganancia, el cruce de fase, el margen de ganancia y el margen de fase se determinan más fácilmente en las trazas de Bode que en la traza de Nyquist.

iii) Para propósitos de diseño, los efectos de añadir controladores y sus parámetros se visualizan con mayor facilidad sobre las trazas de Bode que sobre la traza de Nyquist.

iv) Como ya comentamos las trazas de Bode no cambian de forma (solamente suben o bajan) cuando se modifica la ganancia del sistema (no ocurre así con las trazas de Nyquist, cuya forma cambia en ese caso).

-DESVENTAJAS:

i) La estabilidad absoluta y relativa de sistemas de fase no mínima no se puede determinar desde las trazas de Bode.

En referencia a las definiciones de margen de ganancia y de fase dadas, la figura 13 muestra la interpretación de los mismos, para una función de transferencia de lazo de fase mínima.

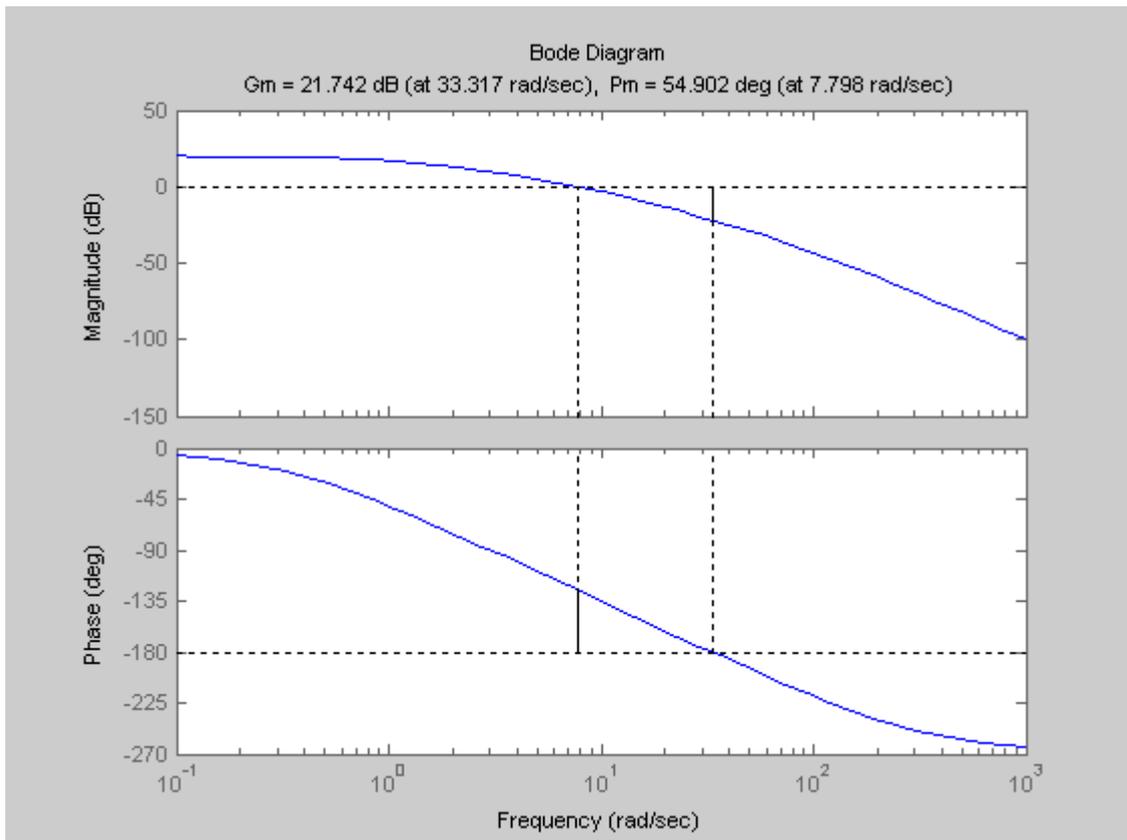


Figura 13

Podemos realizar las siguientes observaciones sobre la estabilidad del sistema con respecto a las trazas de Bode:

i) El margen de ganancia es positivo y el sistema es estable si la magnitud de $L(j\omega)$ al cruce de fase es negativo (en db). Esto es, el margen de ganancia se mide abajo del eje 0 db. Si el margen se mide arriba del eje 0 db, será negativo y el sistema inestable.

ii) El margen de fase es positivo y el sistema es estable si la fase de $L(j\omega)$ es mayor que -180° en el cruce de ganancia. Esto es, el margen de fase se mide arriba del eje -180° . Si el margen de fase se mide abajo del eje -180° , el margen de fase es negativo, y el sistema es inestable.

A continuación veremos cómo la estabilidad relativa está relacionada con la pendiente de la curva del módulo de las trazas de Bode:

Sea la función de transferencia indicada en la figura 14, correspondiente a una función de transferencia de lazo de fase mínima dada por:

$$L(s) = \frac{2500}{s(s+5)(s+50)}$$

Si la ganancia de lazo disminuye desde un valor nominal, la curva de magnitud se desplaza hacia abajo, mientras que la curva de fase permanece sin cambio.

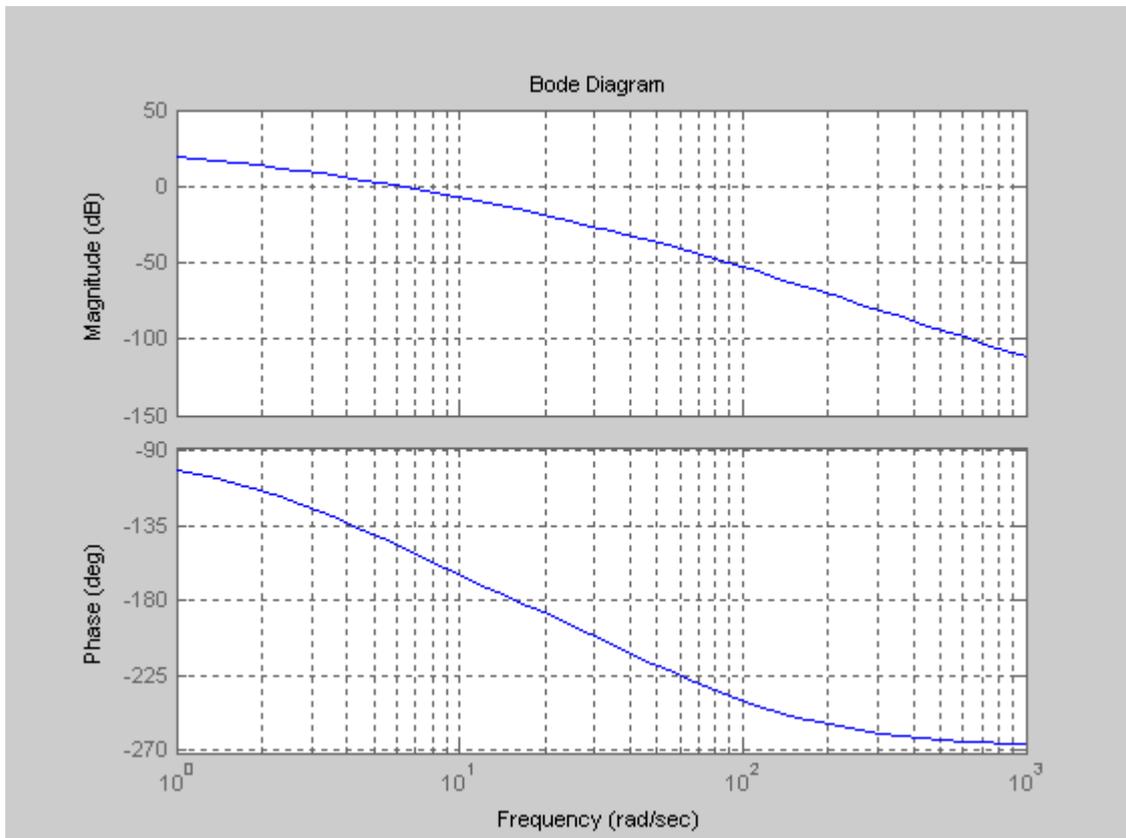


Figura 14

Esto causa que la frecuencia de cruce de ganancia sea menor, y la pendiente de la curva de magnitud en esta frecuencia es menos negativa; el margen de fase correspondiente se incrementa. Por otra parte, si la ganancia de lazo se incrementa, la frecuencia de cruce de ganancia se incrementa y la pendiente de la curva de magnitud es más negativa. Esto corresponde a un margen de fase más pequeño y el sistema es menos estable. La razón de esta evaluación de estabilidad es muy simple. Para una función de transferencia de fase mínima, la relación entre la magnitud y fase es única. Ya que la pendiente negativa de la curva de magnitud es un resultado de tener más polos que ceros en la función de transferencia, la fase correspondiente también es negativa. En general, mientras más plana es la pendiente de la curva de magnitud, más negativa es la fase. Por tanto, si el cruce de ganancia está en un punto donde la pendiente de la curva de magnitud es plana, esto corresponde a un margen de fase que será pequeño o negativo.

Los sistemas que tienen varios cruces de fase, reciben el nombre de **Sistemas condicionalmente estables**. En ellos, se tiene que el sistema es estable en un intervalo de valores de K , y tanto por debajo, como por encima, el sistema se torna inestable. Esto puede verse también en la traza de Nyquist, cuando se tengan varios puntos de corte en el eje negativo.

Para terminar este apartado, veremos cómo se traspasa todo lo indicado hasta el momento a la traza de Black. En ésta, podemos indicar los siguientes puntos:

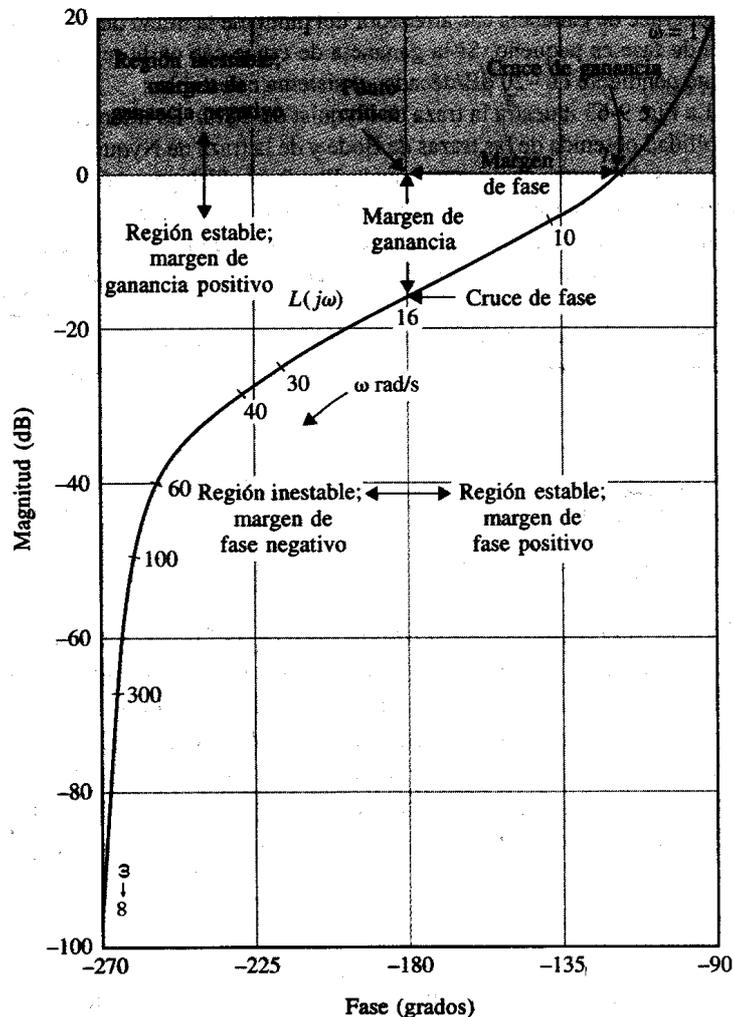


Figura 15

- i) El punto crítico es la intersección del eje 0 db y el eje -180° .
- ii) El cruce de fase es donde el lugar geométrico intercepta al eje -180° .
- iii) El cruce de ganancia es donde el lugar geométrico intercepta al eje 0 db.
- iv) El margen de ganancia es la distancia vertical en db medida del cruce de fase al punto crítico.
- v) El margen de fase es la distancia horizontal en grados, medida del cruce de ganancia al punto crítico.

Ya que el eje vertical del módulo de $|L(j\omega)|$ está en db, cuando la ganancia de lazo de $L(j\omega)$ cambia, el lugar geométrico sólo se corre hacia arriba o hacia abajo a lo largo del eje vertical. En forma similar, cuando una fase constante se añade a $L(j\omega)$, el lugar geométrico es corrido de manera horizontal sin distorsión de la curva. Si $L(j\omega)$ tiene un retardo puro T_d , el efecto de éste es añadir una fase igual a $-\omega T_d \cdot 180^\circ/\pi$ a lo largo de la curva.

Otra ventaja de emplear la traza de magnitud-fase (Black) es que para sistemas con realimentación unitaria, los parámetros del sistema en lazo cerrado, tales como M_r , w_r , y BW se pueden determinar de la traza con la ayuda del lugar geométrico de M constante (ábacos de Nichols), lo que no puede hacerse con las trazas de Bode (aunque sí con las de Nyquist).

5.-Ábacos de Nichols.

Ya indicamos que el ábaco o carta de Nichols indica los lugares geométricos de magnitud constante y de fase constante, para un sistema en lazo cerrado (unitario). Y que, en el plano complejo eran círculos, mientras que en el plano de Black (habitual) son otras curvas más complejas. Debido al inconveniente ya mencionado de que la traza de Nyquist cambia de forma, con solo variar la ganancia del lazo, cosa que no ocurre con la traza de Black, suele ser más interesante trabajar con esta última, incluyendo esas zonas de módulo y fase constante, conocido como **carta de Nichols**.

Una vez que la curva $G(jw)$ del sistema se construye en la carta de Nichols, las intersecciones entre el lugar geométrico de M constante y la trayectoria $G(jw)$ dan el valor de M a las frecuencias correspondientes de $G(jw)$. El pico de resonancia M_r se encuentra al localizar el lugar geométrico más pequeño de M constante ($M \geq 1$) que es tangente a la curva $G(jw)$. La frecuencia de resonancia es la frecuencia de $G(jw)$ en el punto de tangencia. El ancho de banda del sistema en lazo cerrado es la frecuencia en la cual la curva $G(jw)$ intercepta al lugar geométrico $M = 0.707$ (-3db).

Veamos el ejemplo siguiente:

Sea un sistema realimentado unitariamente, con ganancia de trayectoria directa

$$G(s) = \frac{1.5 \cdot 10^7 K}{s(s + 400.26)(s + 3008)}$$

Obtener las trazas de Bode y Nichols (Black) para los valores $K = 7,248$; $K=14,5$; $K=181,2$; y $K=273,57$.

La tabla siguiente muestra los resultados del análisis para esos valores:

K	M_p (%)	M_r	W_r(rd/s)	MG(db)	MP(°)	BW(rd/s)
7,25	0,0	1,0	1,00	31,57	75,90	119,0
14,50	4,3	1,0	43,33	25,55	64,25	270,5
181,20	15,2	7,6	900,00	3,61	7,78	1402,0
273,57	100,0	∞	1000,00	0,00	0,00	1661,5

Las siguientes figuras muestran las trazas pedidas (Fig. 16 y 17) así como la traza de Bode del módulo, para el lazo cerrado (comprobación).

i) Diagramas de Bode, en lazo abierto:

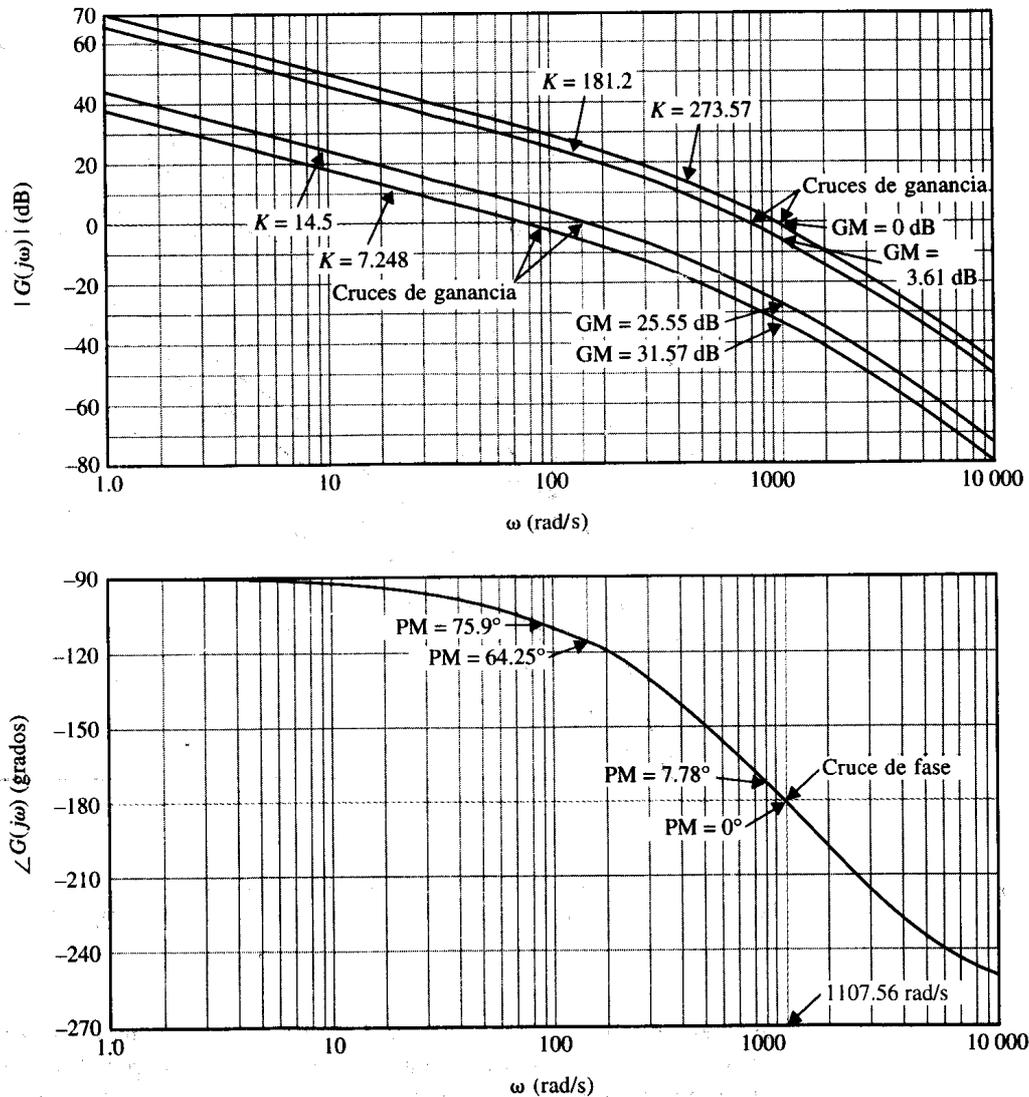


Figura 16

Podemos apreciar el margen de ganancia es negativo (curva del módulo por debajo de 0db) hasta que K alcanza el valor 273.57. A partir de ahí, el módulo pasa por encima para la frecuencia de cruce, con lo cual el sistema será inestable en lazo cerrado (nótese que es un sistema de fase mínima).

Nótese también como el margen de fase (PM) va disminuyendo hasta llegar a 0° para $K = 273.57$.

ii) Diagrama de Black (en el ábaco de Nichols):

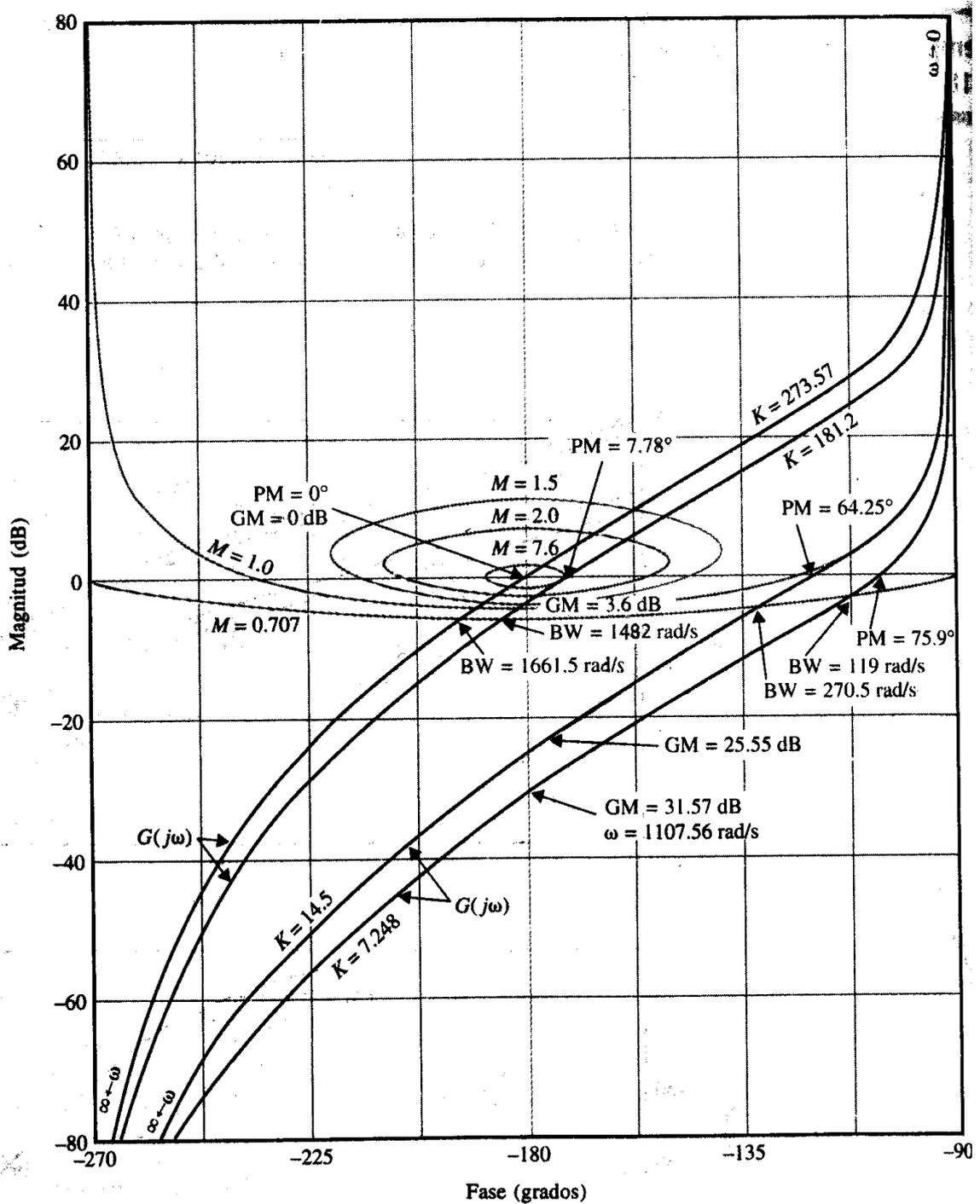


Figura 17

Podemos observar como los valores del ancho de banda (BW) se obtienen de los cortes con el lugar de $M=0.707$ (3db). El margen de fase (PM) de los cortes con el eje real (0db) y los márgenes de ganancia (GM) de los cortes verticales por 180° . Igualmente, la tangencia con los lugares M constante nos da el pico M_r para la resonancia en lazo cerrado (si $M > 1$).

iii) Diagrama de Bode (módulo) para el sistema en lazo cerrado:

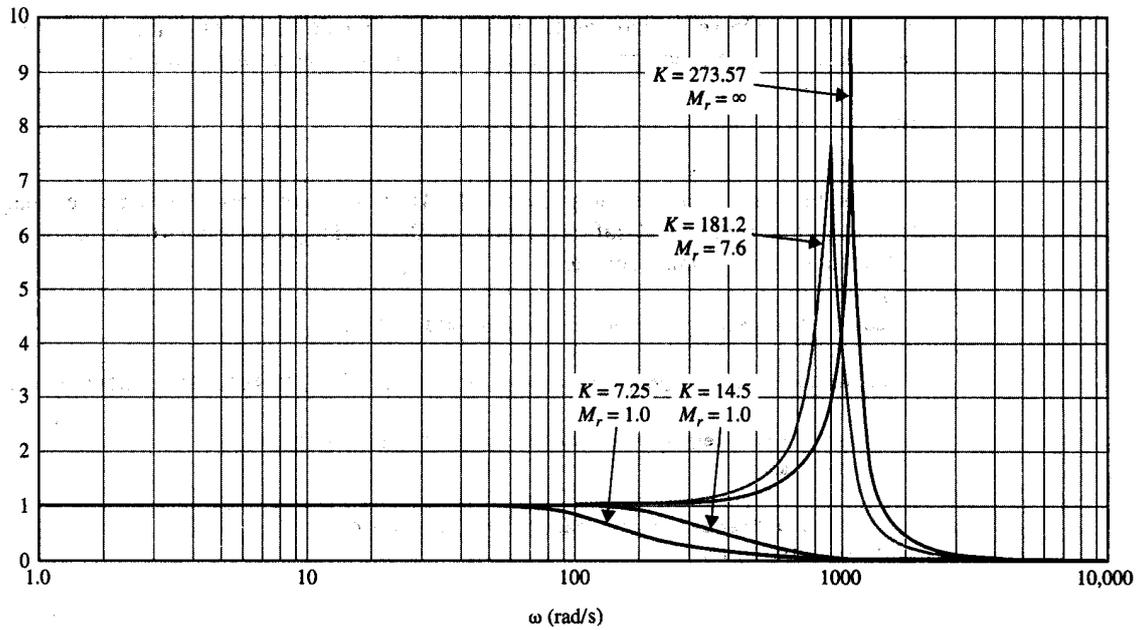


Figura 18

Se comprueban las previsiones de la tabla anterior, haciendo notar que la resonancia en $K = 273,57$ es infinita por pasar el Diagrama de Black de ese valor, por el punto crítico $(-1, j0)$, esto es, 0db para -180° .