

## TEMA II

# FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS

- 1.-Introducción.
- 2.-Funciones de variable compleja: singularidades, polos y ceros de una función.
- 3.-Ecuaciones diferenciales.
  - 3.1.-Ordinarias lineales.
  - 3.2.-No lineales.
  - 3.3.-Ecuaciones de estado.
- 4.-Transformadas de Laplace.
- 5.-Funciones de Transferencia.

## **1.-Introducción.**

Los aspectos matemáticos del análisis y síntesis de sistemas de control se efectúan, ordinariamente, tanto en el dominio del tiempo como en el de la frecuencia.

El análisis en el dominio del tiempo implica la valoración de las respuestas transitorias y de estado estacionario o de régimen permanente, cuando se aplican al sistema señales típicas de prueba, tales como funciones impulso, escalón, rampa y parábola. La respuesta transitoria se refiere a la forma en que llega el sistema a la situación de estado estacionario. Es indeseable una respuesta que tenga un tiempo de subida muy lento, o que produzca un sobreimpulso excesivo, o que oscile con relación al valor de estado estacionario. La respuesta en estado estacionario o de régimen permanente indica la precisión del sistema de control. La respuesta ideal en régimen permanente debe corresponder a la entrada de referencia.

En el análisis en el dominio de la frecuencia, se valora la respuesta de régimen permanente, cuando la entrada es una señal sinusoidal. La característica esencial de un sistema lineal, es que cuando la entrada es una senoide, la respuesta o salida también será una senoide de la misma frecuencia que la entrada, pero diferente amplitud y fase. Los sistemas no lineales requieren un estudio especial con procedimientos específicos.

El método de la Transformada de Laplace es un instrumento poderoso para el análisis y diseño de sistemas lineales. En los análisis en el dominio del tiempo, las ecuaciones diferenciales del sistema se “transforman” en ecuaciones algebraicas de la variable compleja  $s$ , que es el operador de Laplace. Se resuelven entonces las ecuaciones algebraicas por los métodos ordinarios y la respuesta en el dominio del tiempo se obtiene entonces mediante el empleo de la transformada inversa de Laplace o por convolución. Sin embargo, este método, aunque resuelve el problema no indica como puede mejorarse el sistema. Para ello es preciso utilizar la *técnica del lugar de las raíces*, que es un procedimiento muy útil en el análisis y diseño de sistemas de control (dedicaremos un tema completo a este importante método). Se demostrará que el comportamiento transitorio de los sistemas lineales se determina únicamente por las raíces de la ecuación característica que corresponde a las raíces del denominador de la *función de transferencia* de lazo cerrado.

El problema de la estabilidad lo abordaremos a través del criterio de Routh-Hurwitz, al que dedicaremos también un capítulo íntegro.

El método de la respuesta en frecuencia tiene especial popularidad entre los ingenieros de control. Las contribuciones realizadas por Nyquist, Bode y otros, hicieron muy interesante el diseño de sistemas lineales en el dominio de

la frecuencia. De un modo simple, se puede decir, que el método de diseño en el dominio de la frecuencia implica la reforma del gráfico de Nyquist o Bode de la función de transferencia en lazo abierto.

## 2.- Funciones de variable compleja: singularidades, polos y ceros de una función

Una variable compleja  $s$  consta de dos partes, una real ( $\sigma$ ) y otra imaginaria ( $w$ ); de forma que  $s = \sigma + j \cdot w$  (siendo  $j$  la unidad imaginaria).

Diremos que una función  $G(s)$  es una función de la variable compleja  $s$ , para cada valor de  $s$ , existe, al menos, un valor de  $G(s)$ . Esta función también vendrá dada por sus partes real e imaginaria:

$$G(s) = \text{Re}[G(s)] + j \cdot \text{Im}[G(s)]$$

Esta función puede representarse en el plano complejo con  $\text{Re}[G(s)]$  como eje real e  $\text{Im}[G(s)]$  como eje imaginario. Si para cada valor de  $s$  existe un único valor de  $G(s)$ , diremos que  $G(s)$  es una función *univaluada*.

Diremos que una función  $G(s)$  de la variable compleja  $s$  es una *función analítica* en una región del plano complejo si la función, y todas sus derivadas, existen en dicha región.

Llamaremos *singularidades* de una función a los puntos del plano donde la función, o sus derivadas, no existen. Un *polo* es el tipo más común de singularidad, y juega un papel muy importante en la Teoría de Control Clásica.

Una posible definición de polo podría ser:

“Se dice que una función  $G(s)$  analítica y univaluada en la vecindad de  $s_i$ , tiene un polo de orden  $r$  en  $s = s_i$ , si el límite

$$\lim_{s \rightarrow s_i} \left[ (s - s_i)^r \cdot G(s) \right]$$

tiene un valor finito distinto de cero”.

En otras palabras, el denominador de  $G(s)$  debe incluir el factor  $(s-s_i)^r$  (y ningún otro factor más con esa base).

Si  $r=1$ , el polo se llama “simple”; en otro caso, hablaremos de polos de “orden de multiplicidad  $r$ ”.

Los ceros de una función también juegan un papel importante (aunque no llegan a la importancia de los polos), y son definidos como:

“La función analítica en  $s = s_i$   $G(s)$ , tiene un cero de orden  $r$  en  $s = s_i$ , si el límite

$$\lim_{s \rightarrow s_i} \left[ (s - s_i)^{-r} \cdot G(s) \right]$$

#### -4- Fundamentos Matemáticos

tiene un valor finito no nulo”.

También se puede definir mediante:

“G(s) tiene un cero de orden r en  $s = s_i$ , si  $1/G(s)$  tiene un polo de orden r en  $s = s_i$ ”.

Por ejemplo, la función

$$G(s) = \frac{5(s+3)^2}{s(s-1)(s+4)}$$

tiene 3 polos (en  $s = -4, 0, +1$ ) y un cero finito (en  $s = -3$ ) de orden de multiplicidad 2.

### 3.-Ecuaciones diferenciales

Se llama **ecuación diferencial** a una ecuación que liga la variable independiente x, la función incógnita  $y = y(x)$  y sus derivadas  $y', y'', \dots, y^{(n)}$ , es decir, una ecuación de la forma

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

En otras palabras, se llama ecuación diferencial una ecuación en la que figura la derivada o diferencial de la función incógnita.

Si la función incógnita  $y = y(x)$  depende de una sola variable independiente x, la ecuación diferencial se llama **ordinaria** (si depende de más, se denomina **ecuación en derivadas parciales**). Ej.:

$$\frac{dy}{dx} + xy = 0$$

$$y'' + y' + x = \cos x$$

$$(x^2 + y^2)dx + (x + y)dy = 0$$

El **Orden** de una ecuación diferencial es el de la derivada de mayor orden que figura en la ecuación ( $1^0, 2^0$  y  $1^0$  en los ejemplos).

Se llama **Solución** de la ecuación diferencial una función  $y = \Phi(x)$ , determinada en el intervalo **(a, b)** junto con sus derivadas sucesivas, hasta el orden **n** inclusive, tal que al hacer la sustitución  $y = \Phi(x)$  en la ecuación diferencial, ésta, se convierte en una identidad con respecto a **x** en el intervalo (a, b).

Por ejemplo, la función  $y = \sin x + \cos x$  es solución de la ecuación  $y'' + y = 0$ .

La gráfica de una solución de la ecuación diferencial se denomina **Curva integral** de la ecuación.

Si se consideran solamente sistemas de parámetros concentrados, todas las ecuaciones diferenciales son de tipo ordinario. Sin embargo, si se

consideran sistemas con parámetros distribuidos (ej.: transferencia de calor), se emplearán ecuaciones en derivadas parciales.

### 3.1.-Ecuaciones diferenciales lineales.

Los sistemas en los cuales la variable dependiente aparece en forma de relaciones lineales (así como sus derivadas), esto es, cuando se les puede aplicar el Principio de Superposición, se conocen como sistemas lineales. Para una sola variable dependiente, su forma genérica tendría la forma

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = f(t)$$

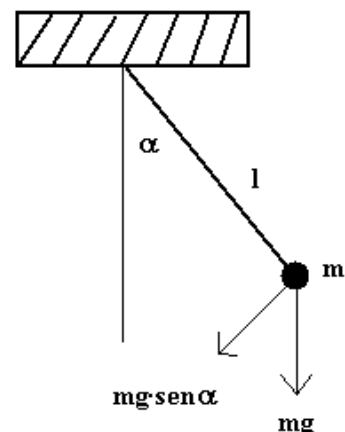
Si el sistema es invariante con el tiempo, tendremos que los coeficientes  $a_k$  son constantes (y reales, para sistemas físicos). Por el contrario, si el sistema varía con el tiempo, esto conlleva que dichos parámetros (uno al menos), sea función del tiempo, lo que complica tremendamente la resolución analítica de dicha ecuación, en cualquier caso, es muy usual que, en la mayoría de los casos, la variación de estos parámetros sea mucho más lenta que la de la variable en estudio (aproximación cuasi-estacionaria), lo que permite una simplificación que hace accesible la resolución analítica aproximada para estos casos.

Una de las ventajas (si no la más importante) de las ecuaciones diferenciales lineales es que se conoce para ellas un método genérico de resolución analítica. Dicho método puede consultarse en la abundante bibliografía existente, aun con todo, adjuntamos un anexo donde puede consultarse. Aquí, tan sólo recordaremos que el proceso consiste en obtener la llamada "solución homogénea", que se obtiene anulando la excitación  $f(t)$ . Esta parte representa la *respuesta natural o propia* del sistema. Posteriormente se obtendrá una solución particular de la ecuación completa la cual, obviamente, dependerá de la excitación aplicada. Esta parte representa la llamada *respuesta forzada* del sistema a una determinada excitación y que, para sistemas estables, coincide con la *solución estacionaria* o de *régimen permanente*.

### 3.2.-Ecuaciones diferenciales no lineales.

Por desgracia, la gran mayoría de los sistemas físicos no son lineales, lo que implica que las ecuaciones diferenciales que los describen no cumplirán la premisa de la linealidad. Por ejemplo, la ecuación de un simple péndulo, es no lineal:

$$ml \frac{d^2 \alpha(t)}{dt^2} + mg \sin \alpha(t) = 0$$



## -6- Fundamentos Matemáticos

Esto no quiere decir que dicha ecuación no disponga de solución analítica (en este caso son las llamadas funciones elípticas de Jacobi las que proporcionan dicha solución), ya que muchas de ellas pueden resolverse de forma exacta, pero para otras muchas se desconoce dicha solución (no existe un método general como en el caso de las lineales de coeficientes constantes).

A veces, si la no linealidad no es muy fuerte, se dispone de la posibilidad de "linealizar" el sistema, "linealizando" su ecuación diferencial, lo que no deja de ser una aproximación que, en muchos casos, no nos aporta una solución válida. Existen ecuaciones diferenciales no lineales, aparentemente simples, como la conocida e importante (por ubicua) ecuación de Van der Pol

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \delta(x^2 - 1) \cdot \frac{dx}{dt} + x = f(t)$$

que, no solamente no tienen solución analítica sino que, para determinados rangos de valores de los parámetros y de las condiciones iniciales, puede presentar un comportamiento caótico (recordemos que una condición necesaria aunque, por suerte, no suficiente, para que el sistema pueda presentar un comportamiento caótico es la no linealidad).

### 3.3.-Ecuaciones de estado.

En general, una ecuación diferencial de n-ésimo orden (lineal o no), se puede descomponer en n ecuaciones diferenciales de primer orden, las cuales suelen ser más fáciles y cómodas de resolver. Por esta razón, son muy utilizadas en estudios analíticos de sistemas de control.

Por ejemplo, para un sistema eléctrico RLC serie, podemos obtener la siguiente ecuación integrodiferencial que la identifica:

$$R \cdot i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt = e(t)$$

en donde R es la resistencia, L la inductancia, C la capacitancia,  $i(t)$  la corriente en la red (variable dependiente) y  $e(t)$  el voltaje excitador aplicado. Diferenciando esa ecuación se obtiene una ecuación diferencial lineal de segundo orden. Pero podemos hacer lo siguiente, primeramente definir las siguientes variables de estado:

$$\begin{cases} x_1 = \int i(t) dt \\ x_2 = \frac{dx_1}{dt} = i(t) \end{cases}$$

sustituyendo y reordenando obtenemos las ecuaciones de estado (una de las posibles formas) del sistema estudiado:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\frac{1}{LC}x_1 - \frac{R}{L}x_2 + \frac{1}{L}e(t) \end{aligned} \right\}$$

Para la ecuación no lineal de Van der Pol indicada, su expresión en forma de variables de estado es:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\delta(x_1^2 - 1) \cdot x_2 - x_1 + f(t) \end{aligned} \right\}$$

Para la ecuación general de orden n indicada anteriormente

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \Lambda + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = f(t)$$

siempre se puede realizar el siguiente proceso:

a) Definir las variables de estado siguientes

$$\left\{ \begin{aligned} x_1(t) &= y(t) \\ x_2(t) &= \frac{dy}{dt} \\ &\quad \mathbf{M} \\ x_n(t) &= \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} \end{aligned} \right.$$

b) Construir las ecuaciones de Estado:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= x_2(t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= x_3(t) \\ &\quad \mathbf{M} \\ \frac{dx_n(t)}{dt} &= -a_0 x_1(t) - a_1 x_2(t) - \Lambda - a_{n-2} x_{n-2}(t) - a_{n-1} x_n(t) + f(t) \end{aligned} \right\}$$

Obsérvese que la última ecuación se obtiene al igualar el término de la derivada de mayor orden en la ecuación de orden n, con el resto de los términos. En la teoría de sistemas de control, el último conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden se conoce como *ecuaciones de estado*, y  $x_1, x_2, \dots, x_n$  son llamadas *variables de estado*.

Es usual en teoría del control, poner las ecuaciones de estado en forma matricial, de la siguiente manera:

## -8- Fundamentos Matemáticos

Para un sistema con una sola entrada  $u(t)$ , las ecuaciones de estado vendrían dadas en la forma:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \Lambda + a_{1n}x_n + b_1u(t) \\ & \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \text{M} \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \Lambda + a_{nn}x_n + b_nu(t) \end{aligned} \right\}$$

que podremos expresar en forma matricial:

$$\frac{dX(t)}{dt} \equiv \dot{X}(t) = A \cdot X(t) + B \cdot u(t)$$

siendo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \Lambda & a_{1n} \\ \text{M} & \text{M} & \text{M} & \text{M} \\ a_{n1} & a_{n2} & \Lambda & a_{nn} \end{bmatrix}; \quad X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \text{M} \\ x_n(t) \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \text{M} \\ b_n \end{bmatrix}$$

Para sistemas con múltiples entradas, tendríamos ecuación

$$\frac{dX(t)}{dt} \equiv \dot{X}(t) = A \cdot X(t) + B \cdot U(t)$$

siendo  $A$  y  $X(t)$  los mismos de antes, pero ahora  $U(t)$  y  $B$  vienen dados por

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \Lambda & b_{1m} \\ \text{M} & \text{M} & \text{M} & \text{M} \\ b_{n1} & b_{n2} & \Lambda & b_{nm} \end{bmatrix}; \quad U(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \text{M} \\ u_m(t) \end{bmatrix}$$

El estado de un sistema se refiere a las condiciones pasadas, presentes y futuras del sistema., Desde un sentido matemático, es conveniente definir un conjunto de *variables de estado* y *ecuaciones de estado* para modelar sistemas dinámicos. Las variables  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ , ...,  $x_n(t)$  son las variables de estado de un sistema de  $n$ -ésimo orden descrito por la ecuación general ya vista. Y las  $n$  ecuaciones de primer orden son las ecuaciones de estado. En general, existen algunas reglas básicas relacionadas con la definición de una variable de estado y lo que constituye una ecuación de estado. Las variables de estado deben satisfacer las siguientes condiciones:

i) En cualquier tiempo inicial  $t = t_0$ , las variables de estado  $x_1(t_0)$ ,  $x_2(t_0)$ , ...,  $x_n(t_0)$  definen los *estados iniciales* del sistema.



ii) Una vez que las entradas del sistema para  $t > t_0$  y los estados iniciales son especificados, las variables de estado deben definir completamente el comportamiento futuro del sistema.

Las variables de estado de un sistema se definen como un conjunto mínimo de variables  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ , ...,  $x_n(t)$ , de cuyo conocimiento en cualquier tiempo  $t_0$ , y del conocimiento de la información de la entrada de excitación que se aplica, son suficientes para determinar el estado del sistema en cualquier tiempo  $t > t_0$ .

No se deben confundir las variables de estado con las salidas de un sistema. Una salida es una variable que puede ser medida, pero una variable de estado no siempre satisface este requerimiento. En general, una variable de salida se puede considerar como una combinación algebraica de las variables de estado.

#### **4.-Transformadas de Laplace.**

Para facilitar y sistematizar la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales, con coeficientes constantes, se emplea extensamente el método de la Transformada de Laplace. Este método operacional ha encontrado una gran aceptación y se emplea en la literatura técnica y textos sobre sistemas realimentados.

El empleo de la transformada de Laplace en la Ingeniería de Control data de la década de 1940, pero su utilización en la resolución de problemas técnicos se adelanta a finales del siglo XIX. Se debe al ingeniero inglés Oliver Heaviside (1850-1925) la invención de lo que él denominó "cálculo operacional", y que empleó con frecuencia en la resolución práctica de transitorios en circuitos eléctricos. En 1893 publicó un trabajo con el título "On operators in mathematical physics" donde desarrollaba sus teorías y aplicaciones del cálculo operacional. Realmente el texto carecía de base matemática sólida y rigurosa, por lo que fue duramente criticada por científicos de su tiempo, entre los que destacaba Lord Rayleigh. La defensa del autor residía, principalmente, en el valor práctico del procedimiento, que permitía resolver con sencillez, circuitos complicados, contrastados fielmente por los resultados obtenidos.

El primitivo método operacional (o simbólico) de Heaviside se basa en considerar en las derivadas de una función  $y = y(t)$ :  $Dy$ ,  $D^2y$ ,  $D^3y$ , ... el operador  $D$  como un número ordinario (Heaviside utilizaba el operador "p" en vez de "D" para no confundirlo con el símbolo de la inducción eléctrica). Al aplicar este operador a un circuito eléctrico se obtiene una "ecuación operacional" en la que hay que realizar la "algebrización" de la misma para obtener la solución final.

El éxito creciente en las aplicaciones del cálculo operacional indujo a los matemáticos a buscar justificaciones teóricas por diversos caminos. El primero en lograr un principio de justificación de los métodos de Heaviside fue Carson en 1917, basándose en ecuaciones integrales; al año siguiente, Bromwich obtiene resultados similares utilizando la teoría de funciones de variable compleja. De cualquier modo, la base de ambos trabajos se encontró en los escritos de 1780 de Laplace. Con el paso de los años, el primitivo cálculo operacional de Heaviside ha sido sustituido por el de la transformación de Laplace. Esta transformación ha proporcionado la sustentación rigurosa de los métodos operacionales y no se han encontrado errores importantes en los resultados de Heaviside.

De forma similar al cálculo operacional, la transformación de Laplace, permite transformar una ecuación diferencial en otra algebraica de relativa sencillez, la cual puede ser expresada en la forma deseada. A partir de esta última, y mediante la transformada inversa, se obtiene la solución completa de la ecuación diferencial de partida, siendo otra de sus ventajas la posibilidad de permitir la inclusión de condiciones iniciales o límites.

Esencialmente, la transformación de Laplace elimina la variable independiente de las ecuaciones diferenciales (generalmente el tiempo), sustituyendo en su lugar el operador "s". Este operador, es una cantidad compleja, que puede ser tratada algebraicamente en forma similar al operador D o p de Heaviside. De hecho, si todas las condiciones iniciales son nulas, los operadores p y s son prácticamente idénticos.

Así pues, la transformada de Laplace permite resolver las ecuaciones diferenciales de forma sistemática, proporcionando la solución total en una sola operación. El método establece reglas definidas, las cuales pueden incluir en las ecuaciones, los valores exactos de las condiciones iniciales, de forma automática.

De nuevo, la Transformación de Laplace es una operación ya introducida en cursos anteriores, por lo que no vamos a entrar aquí en su descripción y utilización. Al final incluimos un anexo donde se dan todo tipo de detalles al respecto.

## **5.-Funciones de Transferencia**

La forma clásica de modelar sistemas lineales es utilizar la "*función de transferencia*" para representar las relaciones entrada-salida entre variables.

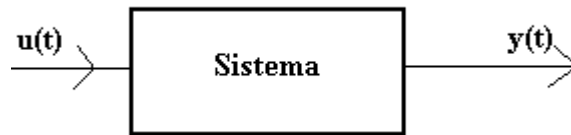
Sabemos que para un sistema lineal e invariante en el tiempo, la salida  $y(t)$  debida a la entrada  $u(t)$  se puede caracterizar una vez conocida la respuesta  $g(t)$  del sistema al impulso (función delta de Dirac). Esto se puede hacer directamente utilizando una operación relativamente complicada, como es la "*convolución de funciones*":

$$y(t) = g(t)*u(t)$$

o bien, de forma más cómoda, a través del concepto de función de transferencia, la cual definiremos de la siguiente manera:

“La *función de Transferencia* de un sistema lineal, invariante con el tiempo, se define como la transformada de Laplace de la respuesta al impulso unitario, con todas las condiciones iniciales nulas”.

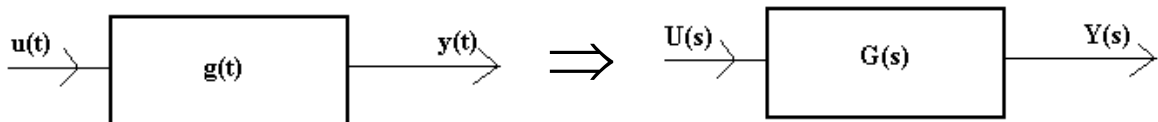
Dado el siguiente bloque estructural:



si  $u(t) = \delta(t) \Rightarrow y(t) = g(t)$  con lo que la función de transferencia del sistema quedará definida por:

$$G(s) = \mathcal{L} [g(t)]$$

Examinando ese mismo bloque en el dominio de Laplace:



se tendrá que:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

con todas las condiciones iniciales nulas, y siendo  $Y(s)$  y  $U(s)$  las transformadas de Laplace de las señales  $y(t)$  y  $u(t)$ , respectivamente.

Debe destacarse que, por la definición, la función  $G(s)$  es una función intrínseca del sistema, independiente de la excitación de mismo. Los polos y ceros de  $G(s)$  se deben única y exclusivamente al sistema, y el orden del polinomio del denominador de  $G(s)$  es el orden del sistema.

Es obvio que, una vez determinado el sistema lineal en el dominio del tiempo ( $g(t)$ ), o bien en el dominio de Laplace ( $G(s)$ ), ambas descripciones contienen la misma cantidad de información, pudiendo pasar de uno a otro sentido sin más problemas que los debidos a la dificultad matemática que entrañe la transformada (pocos) o la transformada inversa (algunos más) de Laplace. Es importante señalar, y suele ser un error grave cometido por los principiantes, que el hecho de suponer que como  $Y(s) = G(s) \cdot U(s)$ , no implica que se verifique su equivalente en el dominio del tiempo, esto es,  $y(t) = g(t) \cdot u(t)$  (que es rotundamente falso). Si esto fuese así, no se necesitaría el uso de las transformadas. Lo que se verifica es lo ya comentado, esto es:  $y(t) = g(t) * u(t)$ , donde el símbolo  $*$  denota la “convolución matemática”:

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau) \cdot u(\tau) \cdot d\tau$$

A pesar de que la definición de función de transferencia se ha hecho en términos de respuesta al impulso, la relación entrada-salida de un sistema lineal invariante con el tiempo (con entrada en tiempo continuo) se describe a menudo mediante una ecuación diferencial, por lo que parece conveniente el tratar de obtener la función de transferencia directamente de dicha ecuación (sin tener que calcular previamente la respuesta temporal al impulso). Para ello, considérese un sistema que verifique la siguiente ecuación diferencial de n-ésimo orden, con coeficientes reales y constantes:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \Lambda + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \Lambda + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t)$$

Si tomamos transformadas de Laplace en ambos miembros, y suponemos todas las condiciones iniciales nulas, el resultado sería:

$$(s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \Lambda + a_1 s + a_0) Y(s) = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \Lambda + b_1 s + b_0) U(s)$$

y la función de transferencia entre  $y(t)$  y  $u(t)$  quedará como:

$$G(s) \equiv \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \Lambda + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \Lambda + a_1 s + a_0}$$

Se dice que la función de transferencia de un sistema de este tipo es *estrictamente propia* si  $n > m$ ; *propia* si  $n = m$  e *impropia* si  $m > n$ .

La *ecuación característica* de un sistema lineal se define como la ecuación que se obtiene de igualar a cero el polinomio denominador de la función de transferencia:

$$s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \Lambda + a_1 s + a_0 = 0$$

Es obvio que esta ecuación es la misma que la que aparece en el cálculo de la solución homogénea (ecuación homogénea) de una ecuación diferencial lineal del tipo propuesto.

Podemos ampliar todo lo anterior, para un sistema multivariable. Dado un sistema con múltiples entradas y salidas, al cumplirse el Principio de Superposición (si y solamente si el sistema es lineal), sabemos que el efecto total sobre cualquiera de las salidas, debido a todas las entradas, actuando simultáneamente, se puede obtener al sumar las salidas producidas por cada entrada, actuando por separado. En general, si un sistema lineal tiene  $p$  entradas ( $r_j$ ) y  $q$  salidas ( $y_i$ ), la función de transferencia entre la  $j$ -ésima entrada y la  $i$ -ésima salida, está definida como:

$$G_{ij}(s) = \left. \frac{Y_i(s)}{R_j(s)} \right|_{R_k(s)=0; k=1,2,\dots,p; k \neq j}$$

es obvio que:

$$Y_i(s) = G_{i1}(s)R_1(s) + G_{i2}(s)R_2(s) + \Lambda + G_{ip}(s)R_p(s)$$

Poniendo esto para todas las salidas y en forma matricial, tendremos:

$$Y(s) = G(s) \cdot R(s)$$

siendo

$$Y(s) = \begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ \vdots \\ Y_q(s) \end{bmatrix} \quad \text{"vector (qx1) de salidas transformadas"}$$

$$R(s) = \begin{bmatrix} R_1(s) \\ R_2(s) \\ \vdots \\ R_p(s) \end{bmatrix} \quad \text{"vector (px1) de entradas transformadas"}$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & \Lambda & G_{1p}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & \Lambda & G_{2p}(s) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ G_{q1}(s) & G_{q2} & \Lambda & G_{qp}(s) \end{bmatrix} \quad \text{"matriz (qxp) de funciones de transferencia"}$$

La salida del sistema, cuando todas las condiciones iniciales son cero, se llama componente de respuesta a **estado cero**. Su transformada de Laplace se obtiene simplemente con el producto de la función de transferencia y la transformada de entrada.

Si las condiciones iniciales del sistema no son cero, existe una componente adicional de salida, la parte de **entrada cero** de la respuesta. La forma de la respuesta de entrada cero se puede determinar a partir de la función de transferencia del denominador, en el supuesto de que no se hayan realizado cancelaciones previas de términos entre el numerador y el denominador de la función de transferencia. Es posible, aunque quizás no probable, que los parámetros del sistema sean justamente los números correctos, de manera que un factor de la función de transferencia del numerador se cancele con un factor del denominador, ocasionando que el término correspondiente de la respuesta de entrada cero del sistema sea pasado por alto.

Una alternativa para la descomposición entrada cero/estado cero de la respuesta del sistema es separar la respuesta en partes **natural** y **forzada** (hace años se utilizaron los términos estado **transitorio** y **estacionario**). Sin embargo, en la práctica, existen muchos sistemas interesantes para los cuales la componente natural de respuesta no es transitoria y/o la componente forzada no es estacionaria).

La componente natural consta de todos los términos de raíz característica del desarrollo en fracciones parciales de la respuesta. La componente de respuesta forzada es el resto de la respuesta y está compuesta por los términos asociados con la transformada de entrada (todo esto lo veremos con mayor detenimiento en el capítulo dedicado a la Respuesta Temporal).

En cuanto a la estabilidad, nos bastará, por ahora, conocer los conceptos relacionados a continuación:

Un sistema que se puede describir por medio de ecuaciones integrodiferenciales lineales, con coeficientes constantes, es estable si todas sus raíces características están a la izquierda del eje imaginario del plano complejo. Para un sistema estable, la componente de respuesta natural y la componente de entrada cero decrecen con el tiempo.

Las raíces características situadas a la derecha del eje imaginario corresponden a términos que aumentan con el tiempo en la respuesta natural, como sucede con las raíces repetidas a lo largo del eje imaginario. Si cualquiera de las raíces del polinomio característico está en el semiplano derecho o es repetida y está sobre el eje imaginario (incluyendo al origen), uno o más de los términos de la respuesta natural crece con el tiempo, y el sistema es inestable. Si todas las raíces características están en el semiplano izquierdo, todos los términos de la respuesta natural decrecen con el tiempo, y el sistema es estable.

Las raíces que están sobre el eje imaginario, si no son repetidas, dan términos de respuesta que ni crecen ni decrecen con el tiempo. Una raíz simple en el origen del plano complejo produce un término de respuesta constante, y un par conjugado de raíces imaginarias dan un término senoidal constante.

Se dice que el sistema es **marginalmente estable** si no tiene raíces en el semiplano derecho o raíces repetidas en el eje imaginario, pero existen raíces características no repetidas en el eje imaginario (así serán todos los circuitos osciladores).

Es una práctica común caracterizar a los sistemas por los términos exclusivos: **estable** (todas las raíces características están en el semiplano izquierdo); **marginalmente estable** (una o más raíces no repetidas están en el eje imaginario pero no tiene raíces en el semiplano derecho); **inestable** (raíces repetidas en el eje imaginario y/o raíces en el semiplano derecho).

Un sistema marginalmente estable no es ni estable ni inestable.