TEMA III

MODELADO MATEMÁTICO DE SISTEMAS FÍSICOS

1.-Introducción.

No cabe duda de que las matemáticas son la herramienta imprescindible para el estudio de cualquier sistema físico. A la hora de abordar cualquier análisis o diseño del mismo, será previamente necesario elaborar un modelo matemático que se ajuste lo más fielmente al sistema real a estudiar, utilizando para ello las leyes físicas aplicables de que dispongamos o, en su defecto, resultados experimentales debidamente tratados. Generalmente, lo que obtendremos será un conjunto de ecuaciones diferenciales (no necesariamente lineales ni invariantes en el tiempo). Que podremos tratar mediante alguno de los métodos ya conocidos:

a)Usando las Funciones de Transferencia (solamente si el sistema es lineal e invariante con el tiempo).

b)Utilizando las Ecuaciones de Estado (que también pueden aplicarse a los sistemas no lineales).

El procedimiento habitual será establecer primeramente las variables que intervienen en el proceso para, posteriormente, interrelacionarlas entre sí, mediante las leyes físicas que regulan esas situaciones.

En este capítulo, vamos a realizar una pequeña introducción al procedimiento indicado, sin profundizar exhaustivamente en el mismo (este proceso debe ser realizado en detalle por el ingeniero de control, que no es al que va enfocado este texto). Sirva pues, solamente para tomar algunos conceptos intuitivos al respecto, sin mayores expectativas.

Por la misma razón que la apuntada en el párrafo anterior, tampoco vamos a tratar con sistemas no lineales, aunque apuntaremos la forma de “linealizar” un sistema (siempre y cuando esto sea posible) cuando el caso lo requiera.

Por último vamos a comentar algo que, aunque tampoco vamos a tratar con detalle, sí que es interesante, por los inconvenientes que puede ocasionar en algunos sistemas reales, como son los “retardos”.

2.-Sistemas eléctricos. Ecuaciones.

Dado el enfoque al que va destinado este texto, se suponen de sobra conocidos por el lector todo el tratamiento de cualquier tipo de circuito eléctrico, tanto en el dominio temporal (mediante ecuaciones diferenciales), como en el de Laplace (usando la Transformada de Laplace). En cualquier caso, las herramientas utilizadas (y sobre las que se basa cualquier otro posible método concreto) serán siempre la Ley de Ohm generalizada (entiéndase por esto, la ley matemática que relaciona las variables tensión / corriente, por un elemento) y los dos lemas de Kirchhoff, a lo que podemos añadir (si el circuito es lineal), el Principio de Superposición (se remite al lector a cualquiera de los textos recomendados en la asignatura de Circuitos II).

Así, cualquier sistema eléctrico podrá venir dado como un conjunto de ecuaciones diferenciales, que podrán transformarse sin problemas en un sistema de ecuaciones de estado o bien (si el sistema es lineal), en una (o varias) función de transferencia que determina unívocamente al sistema.

3.-Sistemas mecánicos.

La gran mayoría de los sistemas de control incorporan tanto sistemas eléctricos como mecánicos (además, en menor cuantía, también pueden incluir sistemas neumáticos e hidráulicos). Sabemos que existe una analogía total entre estos dos tipos de sistemas, de forma que de un circuito eléctrico siempre podemos obtener uno análogo mecánico y viceversa (es obvio que la analogía se entiende en cuanto a la forma de las ecuaciones obtenidas, naturalmente, las variables eléctricas y mecánicas son sustancialmente distintas).

En este apartado tendremos que distinguir entre movimientos de rotación y de traslación, así como posibles combinaciones.

Ahora las leyes que regulan estos sistemas son, obviamente, las de Newton.

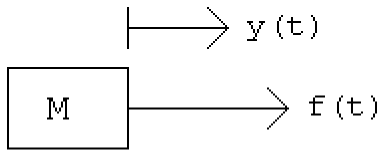
3.1.-Movimiento de traslación

Lo entenderemos aplicado a una partícula puntual y en una sola dimensión (esto es, movimiento en línea recta). Las variables utilizadas serán posición, velocidad y aceleración.

La ley de Newton en estas condiciones indica que la suma algebraica (con signo) de las fuerzas aplicadas a una partícula es proporcional (constante masa) a la aceleración de la misma: $\sum F = m \cdot a$

Algunos de los elementos que intervienen en este tipo de movimiento son:

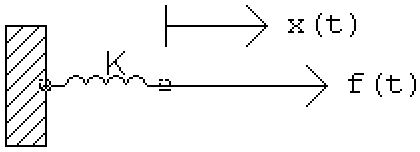
a)***Masa***: Permite al elemento almacenar energía cinética en el movimiento de traslación. Es el análogo a la inductancia en los circuitos eléctricos. Su símbolo es el indicado en la siguiente figura:



La ecuación aplicable es:

$$F = M \cdot a = M \frac{dv}{dt} = M \frac{d^2x}{dt^2}$$

b)***Resorte lineal***: Es el elemento que almacena energía potencial. Es el análogo al condensador en los circuitos eléctricos. Todos los resortes reales son no lineales, pero para pequeñas deformaciones pueden ser linealizadas:

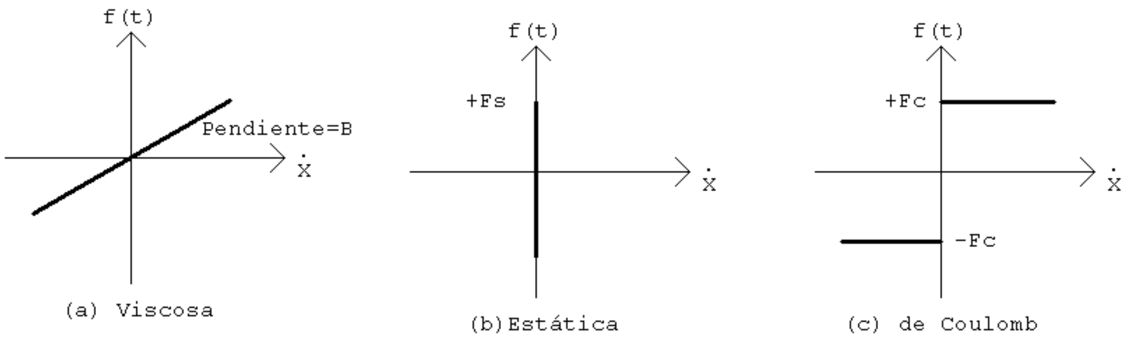


$$F = K \cdot x$$

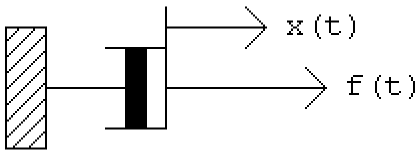
(K es la constante del resorte o rigidez).

c)***Fricción***: Para el movimiento de traslación, la fricción se produce cuando existe movimiento (o tendencia al movimiento) entre dos elementos físicos. No son lineales.

Existen tres tipos en la práctica: viscosa, estática y de Coulomb.



c1)La fricción ***viscosa*** representa una fuerza que es una relación lineal entre la fuerza aplicada y la velocidad. Se representa como un amortiguador.



Su ecuación es

$$f(t) = B\frac{dx(t)}{dt}$$

siendo B el coeficiente de fricción viscosa

c2)La fricción ***estática*** representa una fuerza que tiende a impedir el movimiento desde el comienzo. Desaparece una vez se inicia el movimiento.

c3)La fricción ***de Coulomb*** es una fuerza que tiene una amplitud constante con respecto al cambio de velocidad, pero el signo de la fuerza de fricción cambia al invertir la dirección de la velocidad:

$$f(t) = F_c \frac{dx/dt}{|dx/dt|}$$

3.2.-Movimiento de rotación.

Lo entenderemos como el movimiento de un cuerpo alrededor de un eje fijo. La extensión de la ley de Newton para este tipo de movimiento indica que: “La suma algebraica de los momentos o pares alrededor de un eje fijo es igual al producto de la inercia por la aceleración angular alrededor de dicho eje”:

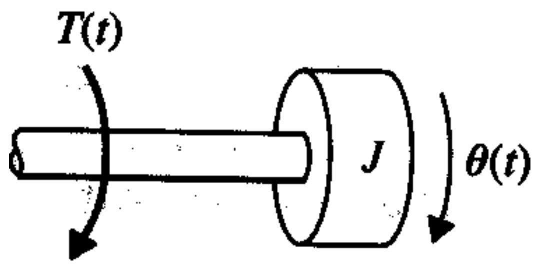
$$\sum Momentos = J \cdot \alpha$$

Otras variables utilizadas son el par (T), la velocidad angular (w) y el desplazamiento angular (θ).

a)La ***inercia*** se considera la propiedad de un elemento de almacenar energía cinética de rotación. Para un cuerpo, depende de su masa y del reparto de ésta respecto del eje de giro. Por ejemplo, para un disco de masa M y radio r que gira alrededor de su eje central, se tiene

$$J = \frac{1}{2} M \cdot r^2$$

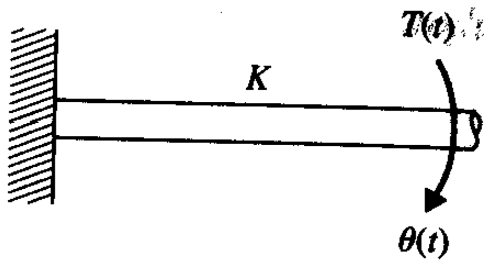
Cuando un par es aplicado a un sólido con inercia J, según se muestra en la figura siguiente



La ecuación se escribe como:

$$T(t) = J \cdot \alpha(t) = J \frac{d\omega(t)}{dt} = J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2}$$

b)***Resorte torsional***: Existe un análogo del resorte lineal, que almacena energía potencial de rotación



Su ecuación es:

$$T(t) = K \cdot \theta(t)$$

c)***Fricción*** para el movimiento de rotación.

Se pueden usar los tres tipos siguientes, similares a los del movimiento de traslación:

c1)Fricción ***viscosa***:

$$T(t) = B \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

c2)Fricción ***estática***:

$$T(t) = \pm (F_s)\Big|_{\dot{\theta}=0}$$

c3)Fricción de ***Coulomb***:

$$T(t) = F_C \frac{d\theta / dt}{|d\theta / dt|}$$

3.3.-Conversión entre movimientos de traslación y rotación.

Es usual el convertir movimientos de traslación en rotación y viceversa, dentro del mundo del control. Se puede pasar del movimiento circular al de traslación por medio de diversos dispositivos, como tornillos "sin fin", cintas transportadoras (cremallera y piñón), poleas, etc.

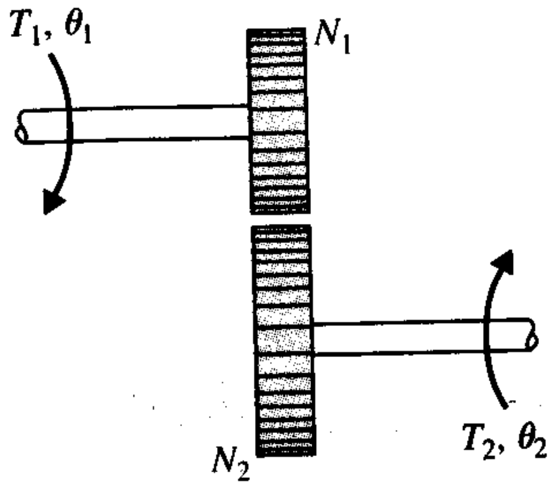
Los trenes de engranajes, palancas o bandas sobre poleas, son dispositivos mecánicos que transmiten energía desde una parte del sistema a otra, en una forma tal que se alteran la fuerza, el par, la velocidad y el desplazamiento. Pueden verse como dispositivos de acoplamiento utilizados para lograr la máxima transferencia de potencia.

a)***Engranajes***.

Despreciando la inercia y la fricción de los engranajes (caso ideal), se cumplirán las siguientes reglas:

a1)El número de dientes sobre la superficie de los engranajes es proporcional a los radios r_1 y r_2 de los engranajes:

$$r_1 N_2 = r_2 N_1$$



a2)La distancia sobre la superficie que viaja cada engranaje es la misma:

$$\theta_1 \cdot r_1 = \theta_2 \cdot r_2$$

a3)El trabajo realizado por un engranaje es igual al que realiza el otro engranaje (no existen pérdidas):

$$T_1 \cdot \theta_1 = T_2 \cdot \theta_2$$

Combinando todas ellas, y llamando w_1 y w_2 a las velocidades angulares, obtenemos:

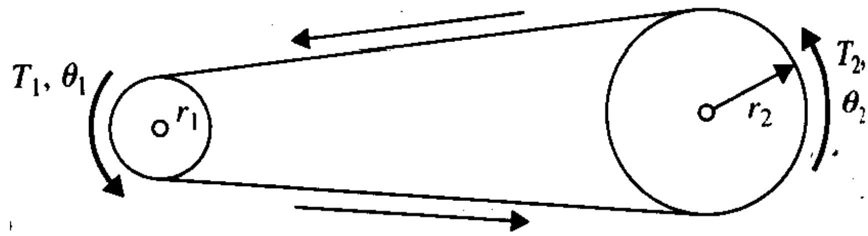
$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{w_2}{w_1} = \frac{r_1}{r_2}$$

En la práctica, los engranajes tienen inercia y fricción entre los dientes, que puede no ser despreciable. También podemos encontrarnos con *huecos* o *zonas muertas* que pueden llegar a ocasionar inexactitudes, oscilaciones e inestabilidad.

b)***Bandas y cadenas***.

Sirven para el mismo propósito que el tren de engranajes, excepto que permiten la transferencia de energía sobre una distancia mayor, sin usar un número excesivo de engranajes.

Suponiendo que no hay deslizamiento entre la banda y la polea, llegamos a que:



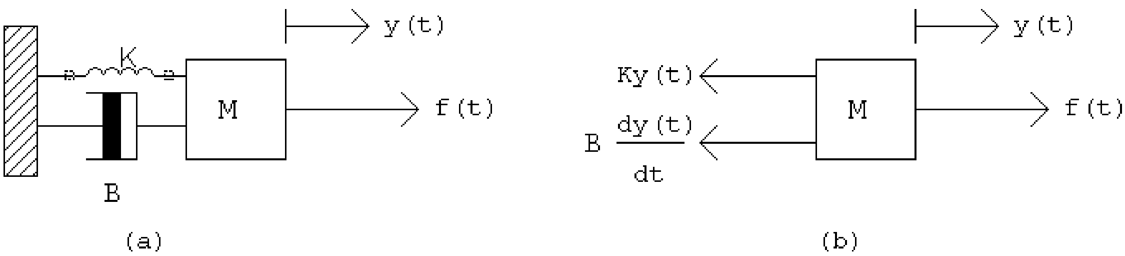
$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{x_2}{x_1}$$

Estos elementos pueden considerarse como el análogo de un transformador o “amplificador” (con matices) en los circuitos eléctricos.

3.4.-Ecuaciones.

Las ecuaciones de un sistema mecánico lineal se escriben construyendo primero un modelo del sistema que contenga los elementos lineales conectados y, luego, se aplica la ley de movimiento de Newton al diagrama de cuerpo libre (traslación y/o rotación).

Veamos como ejemplo el sistema masa-resorte de la figura. El movimiento lineal de interés es el de la dirección horizontal. Considerando sentido positivo de traslación hacia la derecha, el diagrama de cuerpo libre del sistema se representa en la figura (b).



La ecuación aplicable a dicho sistema sería:

$$f(t) - K \cdot y(t) - B \cdot \frac{dy(t)}{dt} = M \cdot \frac{d^2 y(t)}{dt^2}$$

reordenando:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{B}{M}\frac{dy(t)}{dt} + \frac{K}{M}y(t) = \frac{f(t)}{M}$$

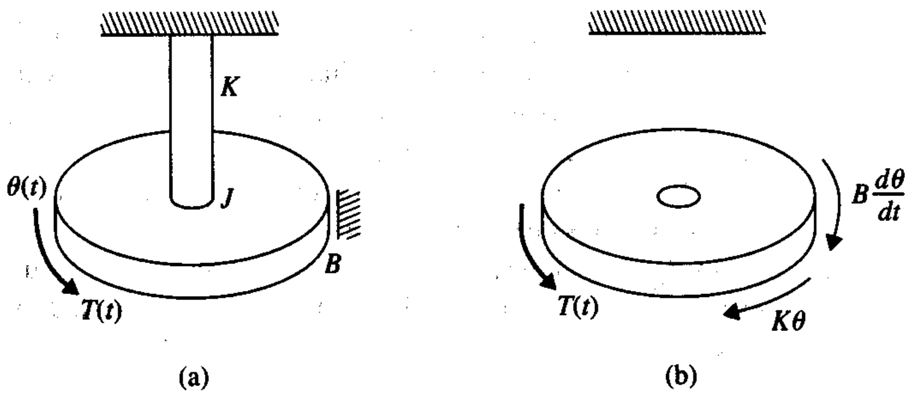
Podemos poner el sistema en forma de ecuaciones de estado, tal y como se muestra a continuación

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= x_2(t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= -\frac{K}{M}x_1(t) - \frac{B}{M}x_2(t) + \frac{1}{M}f(t) \end{aligned}\right\}$$

Aplicando la transformación de Laplace a la ecuación anterior de segundo orden y suponiendo condiciones iniciales nulas, obtenemos la función de transferencia del sistema:

$$T(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{M \cdot s^2 + B \cdot s + K}$$

Otro ejemplo, en este caso para un movimiento de rotación sería el estudio del sistema rotacional de la siguiente figura



El sistema consiste en un disco montado en un eje que está fijo en un extremo. El momento de inercia del disco, alrededor del eje de rotación es J. El canto del disco está próximo a una superficie, y el coeficiente de fricción viscosa entre las dos superficies es B. La inercia del eje se supone despreciable, pero la constante de resorte torsional es K. Se supone que se aplica un par al disco, tal y como se muestra.

La ecuación del par o momento alrededor del eje se escribe a partir del diagrama de cuerpo libre (figura b)

$$T(t) - B \cdot \frac{d\theta}{dt} - K \cdot \theta = J \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

4.-LINEALIZACIÓN DE SISTEMAS.

Cuando se estudian sistemas lineales, los procedimientos analíticos más eficaces suelen ser las transformadas de Laplace y de Fourier. Desgraciadamente, ningún sistema físico es perfectamente lineal. Sin embargo, bajo ciertas suposiciones, casi siempre puede obtenerse un modelo lineal, que es un compromiso entre la simplicidad del modelo matemático y la precisión de los resultados que se obtienen con él. Algunas veces no es posible conseguir un modelo lineal que sea válido, por ejemplo, en presencia de una fuerte no linealidad o en presencia de efectos distributivos que no pueden representarse por parámetros concentrados.

El procedimiento que se adopta comúnmente para resolver un problema nuevo es: primero construir un modelo simplificado, que sea tan lineal como sea posible, para obtener una idea aproximada de la respuesta dinámica del sistema. En una segunda fase se completará el modelo para hacer un análisis más preciso y que se aproxime mejor al comportamiento lineal.

Un sistema o ecuación no lineal se puede linealizar suponiendo que las perturbaciones (cambios) de las variable dependientes, respecto a sus valores en una condición de equilibrio permanente o estacionaria arbitraria, son lo suficientemente pequeños para que los productos y potencias de las variables perturbadas y sus derivadas puedan despreciarse. Consideremos la ecuación no lineal elemental:

$$Y' + 2Y - 3X^2 = 0$$

donde X e Y son funciones del tiempo e Y' representa la derivada de Y respecto al tiempo. Vamos a expresar las variables dependientes como:

$$X(t) = X_0 + x(t) \quad ; \quad Y(t) = Y_0 + y(t)$$

donde X_0 e Y_0 son los valores en una condición de equilibrio y son constantes y x(t) e y(t) son las perturbaciones respecto del tiempo de X e Y, sobre la posición o punto de equilibrio. Como quiera que Y_0 es constante, se tiene:

$$Y'(t) = \frac{d}{dt}\left[Y_0 + y(t)\right] = y'(t)$$

sustituyendo estas dos últimas ecuaciones en la primera, y desarrollando el binomio $(X + x)^2$ tenemos:

$$y' + 2Y_0 + 2y - 3X_0^2 - 6X_0 x - 3x^2 = 0$$

con la suposición de pequeñas perturbaciones, el término no lineal representado por x^2 es despreciable y resulta:

$$y' + 2Y_0 + 2y - 3X_0^2 - 6X_0 x = 0$$

La ecuación estacionaria o de régimen permanente que describe la condición de equilibrio, se puede obtener directamente de esta última, considerando nulas las variaciones temporales (y', y, x), resultando:

$$2Y_0 - 3X_0^2 = 0$$

Restando esta ecuación a la anterior, obtenemos la ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes que describe el comportamiento dinámico de las variables con respecto a la condición de equilibrio:

$$y' + 2y - 6X_0 \cdot x = 0$$

ecuación conocida como ecuación dinámica. Las condiciones iniciales de las variables perturbadas son iguales a cero, lo que facilita el uso de la función de transferencia.

La técnica de linealización anterior puede aplicarse a sistemas sencillos. Cuando existen varias no linealidades el modelo es más complejo y es más útil emplear un desarrollo en serie de Taylor alrededor del punto de equilibrio. Considérese, por ejemplo, una función Z (no lineal) de dos variables que dependen del tiempo X e Y; entonces, el desarrollo en serie de Taylor alrededor del punto de equilibrio Z_0, se puede poner como:

$$Z_0 + z(t) = Z_0 + \left.\frac{\partial Z}{\partial X}\right|_0 \cdot x + \left.\frac{\partial Z}{\partial Y}\right|_0 \cdot y + \left.\frac{\partial^2 Z}{\partial X^2}\right|_0 \cdot \frac{x^2}{2!} + \left.\frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2}\right|_0 \cdot \frac{y^2}{2!} + \left.\frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y}\right|_0 \cdot xy + \Lambda$$

donde x e y representan las perturbaciones de las variables respecto a sus valores de equilibrio. Si se suponen pequeñas estas perturbaciones, esta ecuación puede aproximarse por

$$z(t) \approx \left.\frac{\partial Z}{\partial X}\right|_0 \cdot x + \left.\frac{\partial Z}{\partial Y}\right|_0 \cdot y$$

Extendiendo este procedimiento a una función de n variables, X_n, la expresión aproximada anterior se puede generalizar a

$$z(t) \approx \left.\frac{\partial Z}{\partial X_1}\right|_0 \cdot x_1 + \left.\frac{\partial Z}{\partial X_2}\right|_0 \cdot x_2 + \Lambda + \left.\frac{\partial Z}{\partial X_n}\right|_0 \cdot x_n$$

Esta ecuación dinámica es una ecuación diferencial lineal, cuyos coeficientes son las derivadas parciales de la función evaluadas en la condición de equilibrio, que se suponen constantes. La ecuación de régimen permanente que define las condiciones de equilibrio puede obtenerse de la ecuación original no lineal.

Si aplicamos esta técnica para linealizar el anterior ejemplo, es conveniente despejar la derivada más elevada como función de las otras variables:

$$Y' = -2Y + 3\cdot X^2 = Y'(Y, X)$$

y desarrollando en serie de Taylor:

$$y' = \left.\frac{\partial Y'}{\partial Y}\right|_0 \cdot y + \left.\frac{\partial Y'}{\partial X}\right|_0 \cdot x$$

calculando las derivadas parciales obtenemos:

$$\left.\frac{\partial Y'}{\partial Y}\right|_0 = -2\big|_0 = -2 \quad ; \quad \left.\frac{\partial Y'}{\partial X}\right|_0 = 6X\big|_0 = 6X_0$$

y sustituyendo:

$$y' + 2y - 6\cdot X_0 \cdot x = 0$$

que es idéntica a la obtenida por el procedimiento anterior. La ecuación de equilibrio se obtiene de la ecuación general, haciendo igual a cero todas las derivadas respecto del tiempo:

$$2Y_0^2 - 3\cdot X_0^2 = 0$$

que coincide con la obtenida con anterioridad.

EJEMPLO DE APLICACIÓN:

Dada la ecuación diferencial no lineal siguiente

$$X'' + YX' + X^2 + XY + \frac{Y'}{Z} + Y^2 Z = 0$$

determinar:

a)Ecuación de equilibrio permanente.

b)Ecuación dinámica linealizada.

SOLUCIÓN:

a)La condición de equilibrio se obtiene anulando las derivadas y resulta ser:

$$X_0^2 + X_0 Y_0 + Y_0^2 Z_0 = 0$$

b)Para calcular la ecuación dinámica, despejamos X'':

$$X'' = -YX' - X^2 - XY - \frac{Y'}{Z} - Y^2 Z$$

que, desarrollando en serie de Taylor al primer orden nos da

$$x''=\left.\frac{\partial X''}{\partial X'}\right|_0\cdot x'+\left.\frac{\partial X''}{\partial X}\right|_0\cdot x+\left.\frac{\partial X''}{\partial Y'}\right|_0\cdot y'+\left.\frac{\partial X''}{\partial Y}\right|_0\cdot y+\left.\frac{\partial X''}{\partial Z}\right|_0\cdot z$$

calculando las derivadas parciales en el punto de equilibrio y sustituyendo en la ecuación anterior obtenemos:

$$x''+Y_0x'+(2X_0+Y_0)x+\frac{y'}{Z_0}+(X_0+X_0^{'}+2Y_0Z_0)y+(Y_0^2-\frac{Y_0^{'}}{Z_0^2})z=0$$

que es la ecuación de funcionamiento dinámico. Obsérvese que las magnitudes de los coeficientes de los términos linealizados varían con las condiciones del punto de equilibrio. Esta es una manifestación de la no linealidad de la ecuación.

5.-RETARDOS

Hasta ahora, todos los sistemas considerados tienen funciones de transferencia que son el cociente de dos polinomios. En la práctica, se pueden encontrar retrasos puros en varios tipos de sistemas, especialmente en sistemas con transmisiones hidráulicas, neumáticas o mecánicas. Los sistemas de control por computadora también tienen retardos, ya que la computadora se toma cierto tiempo en ejecutar operaciones numéricas. En estos sistemas, la salida no comienza a responder a la entrada sino hasta después de un intervalo dado. Un ejemplo de este tipo de sistemas podría ser un sistema donde se mezclan dos fluidos diferentes en proporciones adecuadas. Para asegurar que se mida una solución homogénea, se sitúa un punto de supervisión a una cierta distancia del punto de la mezcla, por tanto, existe un retraso entre el punto de mezcla y el lugar donde se detecta el cambio en la concentración. Si la velocidad del flujo de la solución mezclada es *v* (m/s) y *d* es la distancia entre los puntos de mezcla y medición, el tiempo de retardo está dado por:

$$T_d=\frac{d}{v}\quad \text{(s)}$$

Se supone que la concentración en el punto de mezcla es y(t) y que ésta se reproduce sin cambios T_d segundos después en el punto de supervisión, la cantidad medida es:

$$b(t)=y(t-T_d)$$

La transformada de Laplace de la ecuación es:

$$B(s)=e^{-T_d s}Y(s)$$

en donde Y(s) es la transformada de Laplace de y(t). La función de transferencia entre b(t) e y(t) es:

$$\frac{B(s)}{Y(s)} = e^{-T_d s}$$

Otro ejemplo similar podría ser el representado por un control del grosor de láminas de acero, donde la medida de dicho grosor se realiza con posterioridad a la situación de los rodillos encargados de dicho grosor.

Los sistemas que están descritos inherentemente por funciones de transferencia trascendentales son más difíciles de manejar. Muchas herramientas analíticas, tal como el criterio de Routh-Hurwitz, están restringidas a funciones de transferencia racionales. La técnica del Lugar de las Raíces se aplica más fácilmente a sistemas con funciones de transferencia racionales.

Existen muchas formas de aproximar $e^{-Td \cdot s}$ por una función racional. Una de ellas es aproximar la función exponencial mediante una serie de McLaurin:

$$e^{-T_d s} \cong 1 - T_d s + \frac{T_d^2 s^2}{2}$$

o bien

$$e^{-T_d s} \cong \frac{1}{1 + T_d s + T_d^2 s^2 / 2}$$

obviamente, las aproximaciones no son válidas cuando la magnitud $T_d s$ es grande.

Una aproximación mejor es la de Padé, dada por

$$e^{-T_d s} \cong \frac{1 - \frac{T_d s}{2}}{1 + \frac{T_d s}{2}}$$

La característica de esta última aproximación es que la función de transferencia contiene un cero en el semiplano derecho del plano s, por lo que la respuesta al escalón del sistema aproximado puede presentar un sobreimpulso negativo pequeño cerca de t = 0s.

ANEXO
Aproximaciones del retardo

```
» s=linspace(0,50);Td=0.1;
» f1=exp(-Td*s);f2=1./(1+Td*s+Td^2*s.^2/2);f3=(1-Td*s./2)./(1+Td*s./2);
» plot(s,f1,'w',s,f2,'w:',s,f3,'w--')
```