TEMA IV

REPRESENTACIÓN DE LOS SISTEMAS

1.-Introducción.

Los **diagramas de bloques** son representaciones de las relaciones entre las partes componentes de un sistema y son especialmente convenientes para la comprensión de las señales y componentes de los sistemas. Seguidamente vamos a estudiarlos de forma operativa, esto es, para tratar de llegar a saber utilizarlos, principalmente en la reducción de un sistema a una función de transferencia final equivalente.

Existe otro tipo de representación que contienen la misma información, como son los **diagramas de flujo de señal**, que son especialmente interesantes por cuanto reportan una notable simplificación de notación, a la vez que presentan ventajas para el análisis y síntesis de las relaciones generadas entre las entradas y las salidas de los sistemas. A su vez, existe una regla (regla de Mason) que nos permite obtener una determinada relación de transferencia sin necesidad de reducir el sistema a un único bloque).

2.- DIAGRAMA FUNCIONAL O DE BLOQUES. ELEMENTOS.

Los diagramas de bloques se utilizan para describir esquemáticamente los sistemas. Esta representación gráfica de las ecuaciones transformadas de Laplace, se puede manejar casi con la misma facilidad que en el caso de los diagramas de circuitos eléctricos, aunque el tratamiento de las reglas sea diferente. Los diagramas de bloques pueden utilizarse para describir el funcionamiento interno de un sistema (amplificadores, motores de control, filtros, etc.) y ofrecen una alternativa sumamente simple para estudiar directamente las ecuaciones.

En un diagrama de bloques, se utiliza un **bloque** para indicar una correspondencia proporcional entre dos señales transformadas de Laplace. La función de proporcionalidad, o **transmitancia**, relaciona las señales de entrada y salida. Esto se indica dentro del bloque. Un **sumador** se usa para indicar adiciones o substracciones de señales. Este sumador puede tener cualquier número de señales entrantes, pero solo una señal de salida. Los signos algebraicos que se emplean en la suma, se indican próximos a la punta de flecha de cada señal entrante. Una **unión** o punto de reparto, indica que la misma señal sale hacia diferentes lugares.

Pueden observarse estos elementos en la siguiente figura:

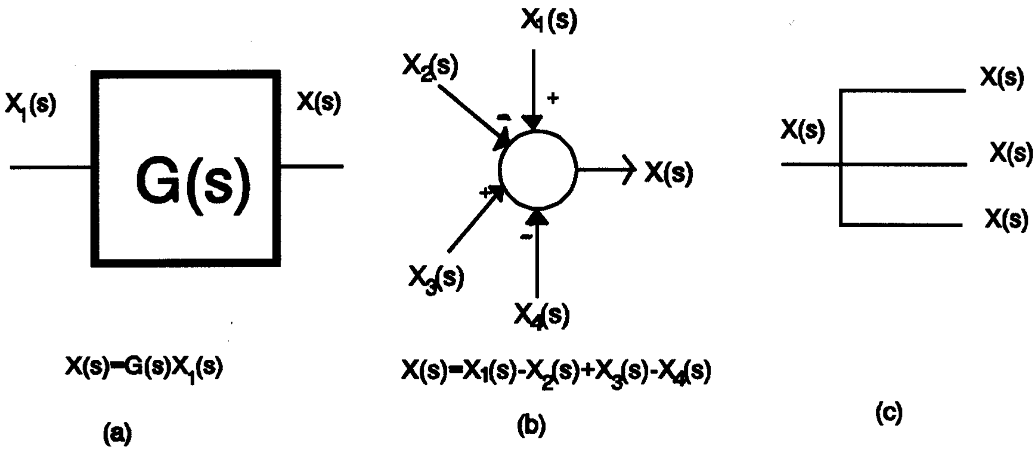

Figura 1

En esta figura pueden apreciarse los elementos básicos de los diagramas de bloques. (a) Bloque. (b) Sumador. (c) Unión o punto de reparto.

2.1.- REDUCCIÓN DE DIAGRAMAS DE BLOQUES DE ENTRADA Y SALIDA SIMPLE.

La modificación de los diagramas de bloques de sistemas, para efectuar simplificaciones u ordenamientos especiales se denomina **álgebra de los diagramas de bloques**. Puesto que los diagramas de bloques representan transformadas de Laplace de ecuaciones del sistema, la manipulación de un diagrama equivale a la manipulación algebraica de las ecuaciones originales, pero el manejo de diagramas es, por lo general, mucho más fácil para nosotros, que tratar directamente con las ecuaciones (posiblemente, esto no ocurra así para las computadoras).

En un diagrama de bloques de entrada simple y salida simple, **reducción** significa simplificar el diagrama compuesto hasta un punto tal que quede un simple bloque, que represente la función de transferencia que relaciona la salida con la entrada. En la reducción de un diagrama de bloques es conveniente proceder paso a paso, manteniendo siempre la misma relación general entre la entrada y la salida.

Algunas simplificaciones útiles son las que se citan a continuación:

-Dos bloques en **cascada**, sin conexiones adicionales entre ellos, equivalen, en lo que concierne a las señales entrantes y salientes, a un simple bloque de "producto de transmitancias".

-Dos bloques en **tándem**, equivalen a un simple bloque de "suma de transmitancias". Este resultado se modifica si existen otros signos, además de los positivos, sobre el sumador.

-Para dos bloques de una configuración de **retroalimentación**, se consideran dos posibles signos algebraicos sobre el sumador. G(s) se denomina **transmitancia directa** y H(s) es la **transmitancia realimentadora** en este arreglo. Las relaciones entre las señales son:

$$Y(s) = G(s)E(s)$$

$$E(s) = R(s) \pm H(s)Y(s)$$

Al eliminar E(s) y sustituir, se obtiene:

$$T(s) \equiv \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 \pm G(s)H(s)}$$

Un signo negativo sobre el sumador de retroalimentación da por resultado un signo algebraico positivo en el denominador de T(s); un signo positivo sobre el sumador da un signo menos en la ecuación.

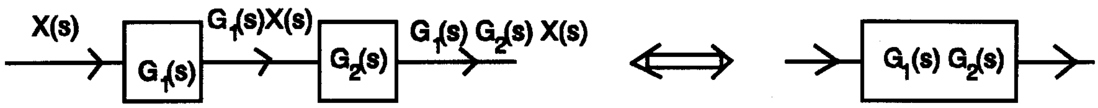

Figura 2

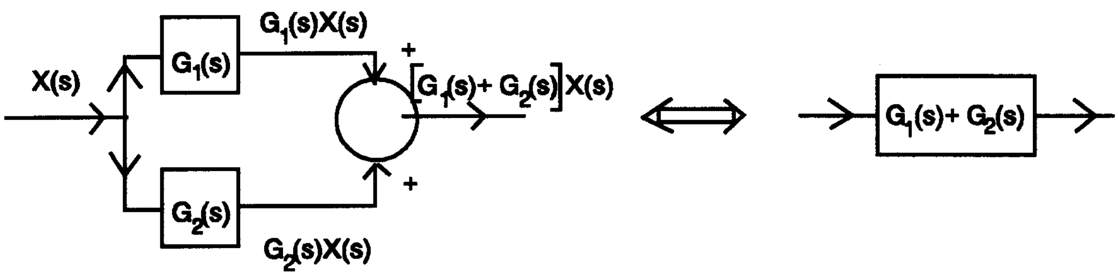

Figura 3

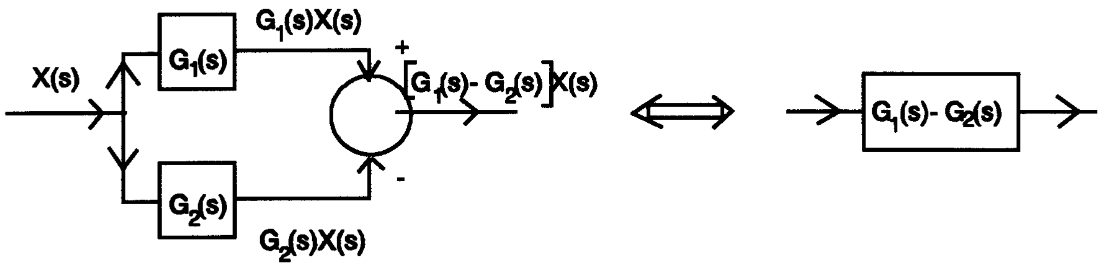

Figura 4

Las figuras 2, 3 y 4 representan equivalencias de bloques: (2) cascada, (3) tándem con signo positivo o sumador y (4) tándem con signo negativo o restador.

La figura siguiente (5) representa la simplificación de la configuración básica realimentada.

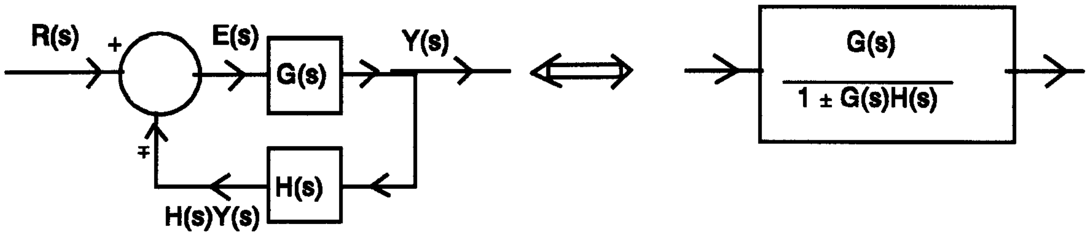

Figura 5

Las siguientes figuras muestran otras equivalencias útiles para reducción de diagramas de bloques:

(Fig. 6) Inserción de una ganancia unitaria.

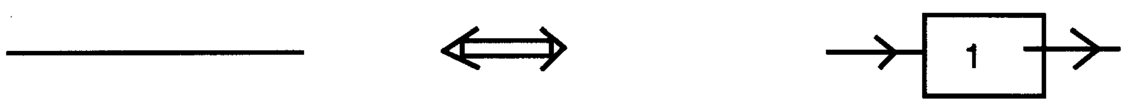

Figura 6

(Fig. 7) Cambio de signo en un sumador.

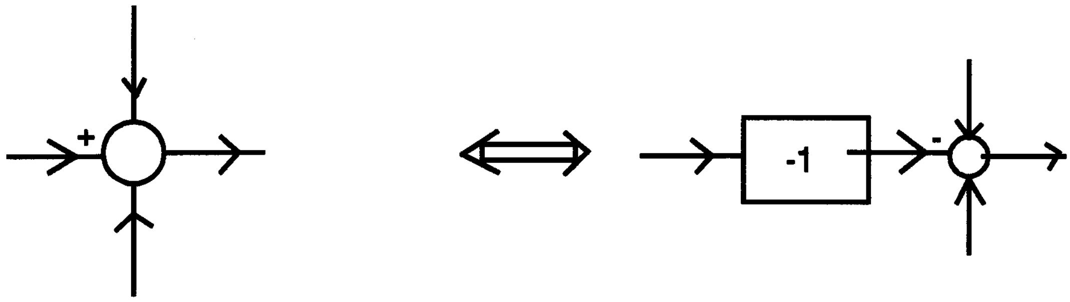

Figura 7

(Fig. 8) Cambio de un punto de reparto hacia atrás.

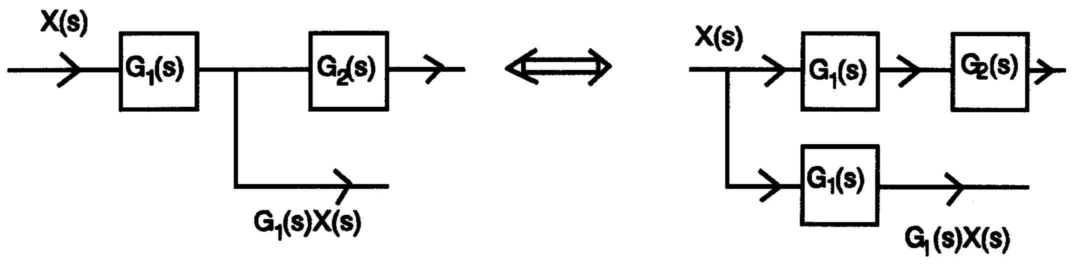

Figura 8

(Fig. 9) Cambio de un punto de reparto hacia delante.

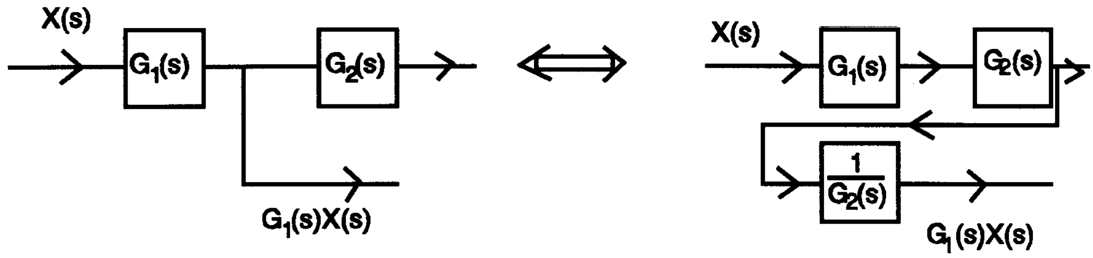

Figura 9

(Fig. 10) Combinación o desarrollo de sumas.

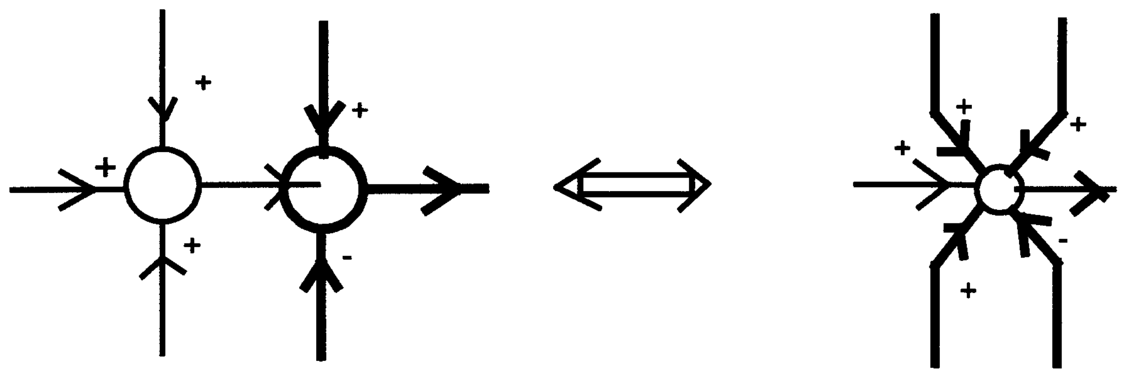

Figura 10

(Fig. 11) Combinación o desarrollo de puntos de reparto.

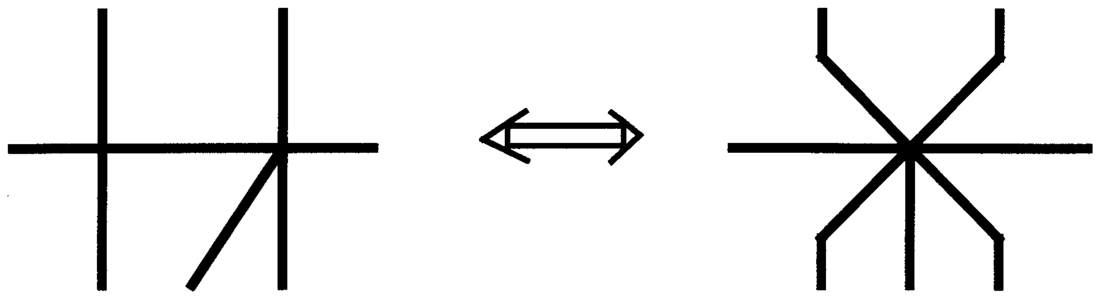

Figura 11

Las siguientes figuras muestran un ejemplo de utilización de equivalencias para reducir un diagrama de bloques con entrada y salida simple:

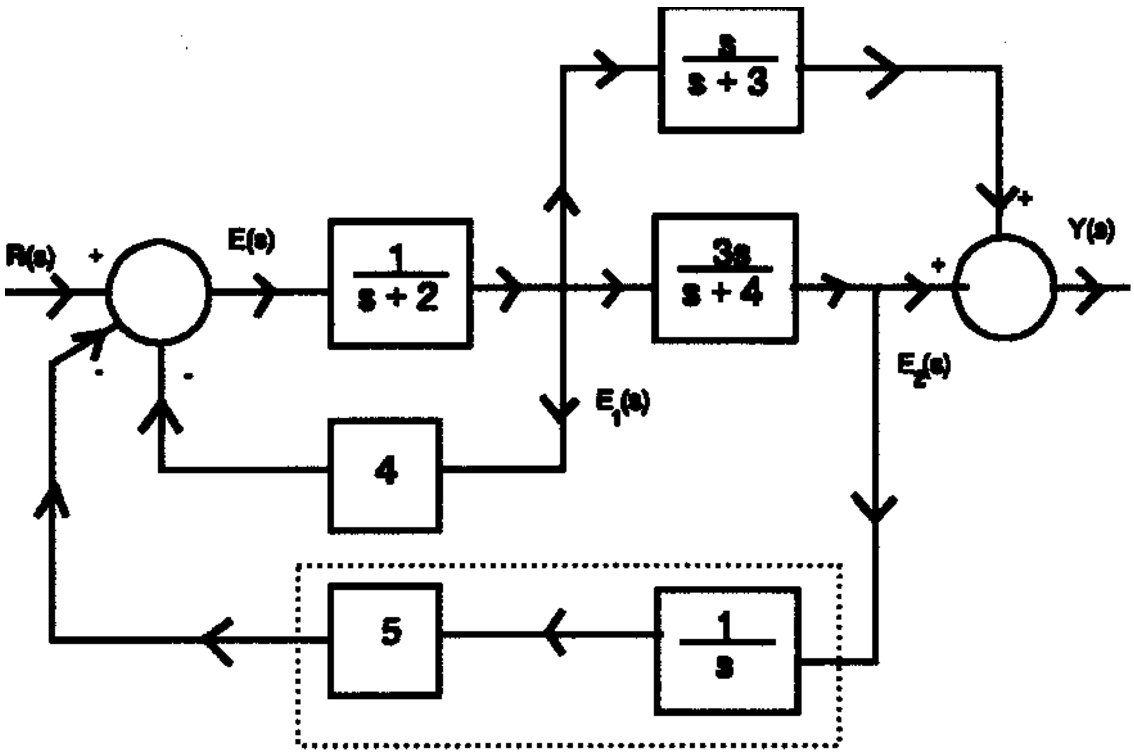

Figura 12

Lo primero que haremos será simplificar los bloques en cascada marcados en la Fig. 12.

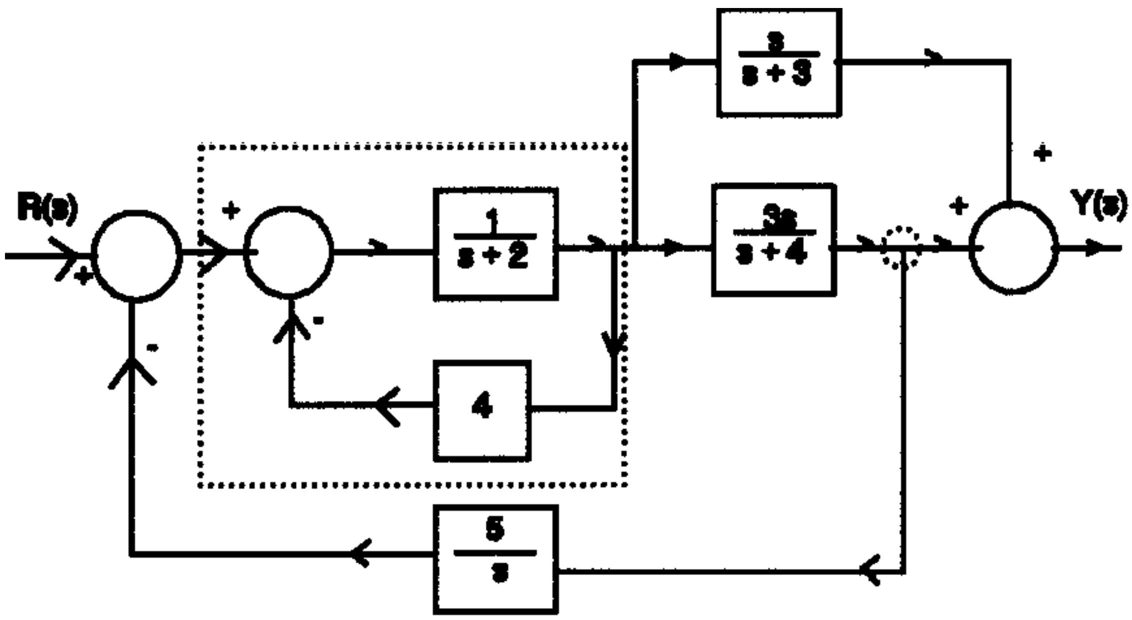

Figura 13

A continuación realizaremos la realimentación indicada en la Fig. 13, y moveremos el punto de reparto hacia la izquierda, obteniendo

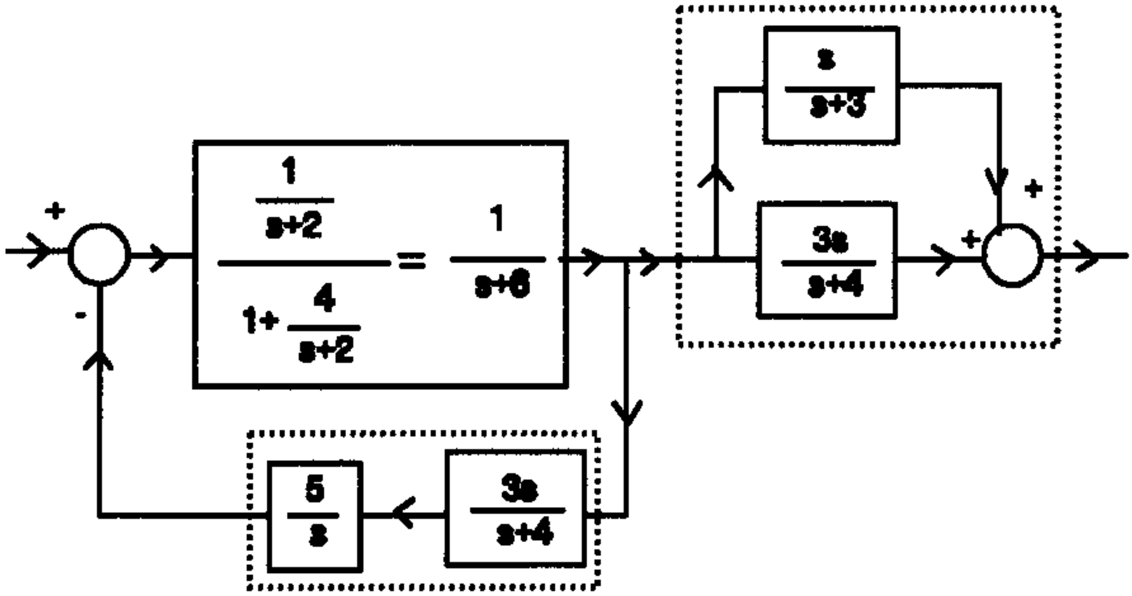

Figura 14

Realizando ahora la cascada y el tándem marcados el la Fig. 14 llegamos a

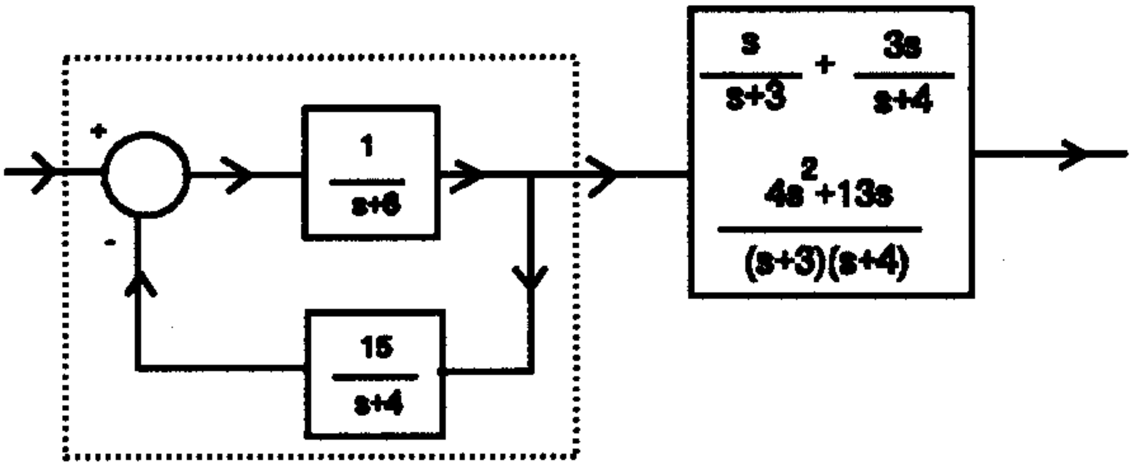

Figura 15

Realizando la realimentación marcada en la Fig. 15 obtenemos el siguiente diagrama

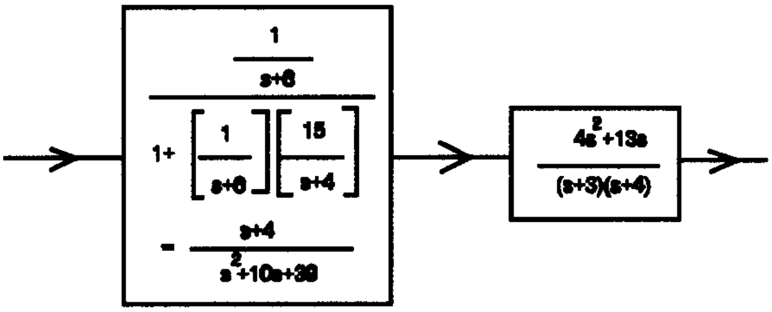

Figura 16

Para terminar, solamente hay que realizar la cascada que queda, obteniendo la función de transferencia final

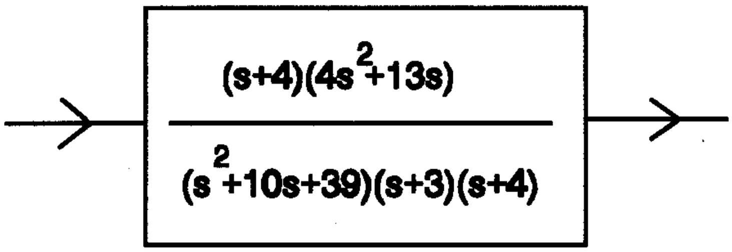

Figura 17

2.2.- REDUCCIÓN DE DIAGRAMAS DE BLOQUES DE ENTRADA Y SALIDA MÚLTIPLE.

En un sistema de entrada y salida múltiples, la reducción del diagrama de bloques implica encontrar cada una de las funciones de transferencia del sistema. Esto se lleva a cabo al considerar una salida cada vez y reducir la relación entre cada una de las señales de entrada con la de salida que se esté considerando. Todas las entradas, excepto una, se igualan a cero para determinar la función de transferencia que relaciona una salida con esa entrada.

En el siguiente ejemplo, vemos que las señales de entrada y de salida en un sistema de dos entradas y dos salidas se relacionan de la forma indicada en los **diagramas canónicos** de bloques mostrados. Cada diagrama de bloques se reduce a una forma equivalente similar (por el proceso de entrada/salida única explicado anteriormente), donde las funciones de transferencia están evidentemente expuestas.

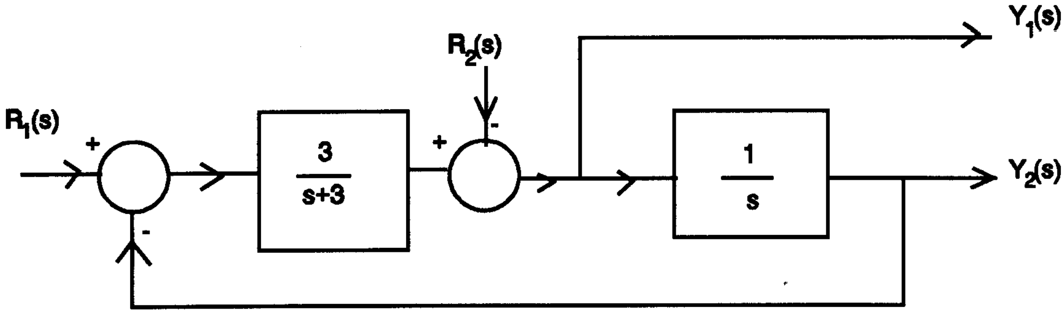

Figura 18

Aplicando el Principio de Superposición, por ser un sistema lineal, podremos representar este sistema mediante la siguiente combinación de funciones de Transferencia:

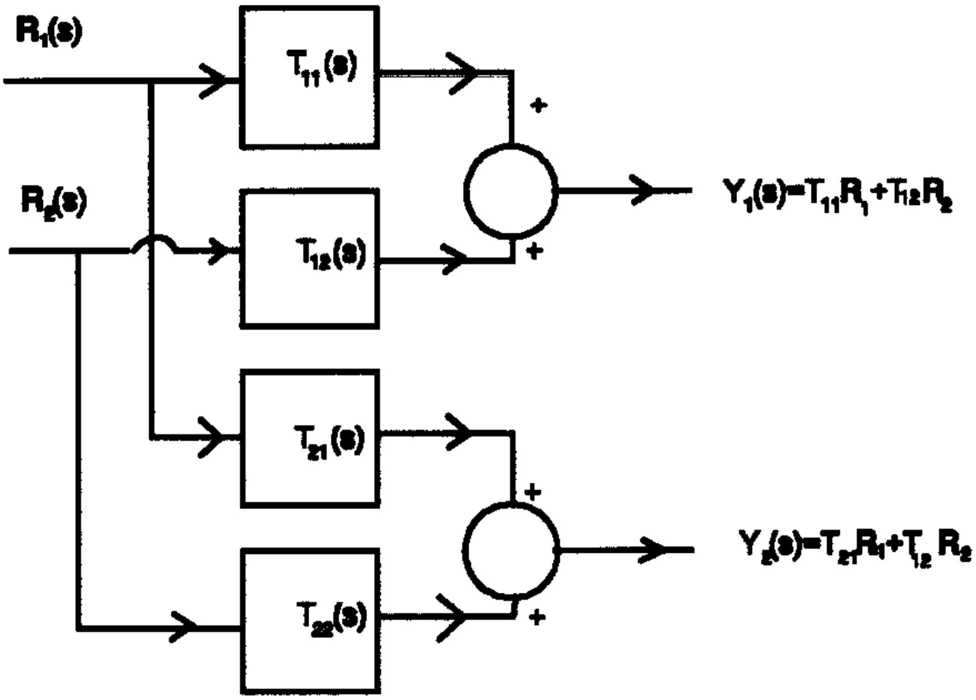

Figura 19

Los valores de las funciones de transferencia se obtienen fácilmente, como indicamos a continuación.

$$T_{11}(s) = \frac{\dfrac{3}{s+3}}{1+\left(\dfrac{3}{s+3}\right)\left(\dfrac{1}{s}\right)} = \frac{3s}{s^2+3s+3}$$

$$T_{12}(s) = -\frac{1}{1-\left(\dfrac{-3}{s^2+3s}\right)} = \frac{-s^2-3s}{s^2+3s+3}$$

$$T_{21}(s) = \frac{\dfrac{3}{s^2+3s}}{1+\left(\dfrac{3}{s^2+3s}\right)} = \frac{3}{s^2+3s+3}$$

$$T_{22}(s) = -\frac{\dfrac{1}{s}}{1-\left(\dfrac{1}{s}\right)\left(\dfrac{-3}{s+3}\right)} = \frac{-s-3}{s^2+3s+3}$$

3.-GRÁFICAS DE FLUJO DE SEÑAL

3.1.-ELEMENTOS DE UNA GRÁFICA DE FLUJO.

Los SFG (Signal-Flow-Graph) son una versión simplificada de los diagramas de bloques. Fueron introducidos por S.J. Mason para la representación causa-efecto de los Sistemas Lineales modelados por ecuaciones algebraicas.

La misma información que se comunica por medio de un diagrama de bloques también se describe gráficamente mediante una gráfica de flujo de señal. La ventaja de esta última es que se adapta perfectamente a la determinación de las funciones de transferencia en un solo paso, por medio de un método conocido como la regla de la ganancia de Mason.

Otra ventaja adicional frente a los diagramas de bloques es que es un procedimiento bastante más simple que el otro método cuando acometemos sistemas muy complejos.

Por el contrario, los SFG están restringidos por reglas matemáticas más rígidas que las de los diagramas de bloques.

Un diagrama de flujo representa un conjunto de ecuaciones algebraicas simultáneas en la forma $V_{sal} = \text{Ganancia} \cdot V_{ent}$.

Sus elementos básicos son los nudos, que representan las variables del sistema; y las ramas, que simbolizan los elementos multiplicadores o ganancias de señal, entre dos nudos. Es costumbre resaltar las variables de entrada y salida frente al resto, anteponiéndoles una rama de ganancia unidad (entrada desde la izquierda y salida hacia la derecha).

Al construir un diagrama de flujo, los nodos se usan para representar variables. Dichos nudos están unidos por segmentos lineales llamados ramas, de acuerdo con las ecuaciones causa-efecto. Las ramas tienen ganancias y direcciones asociadas. Una señal se puede transmitir a través de una rama solamente en la dirección de la flecha. La dirección de la rama desde el nodo y_k al y_j representa la dependencia de y_j sobre y_k, pero no al contrario.

Veamos un ejemplo de transformación de sistemas de ecuaciones algebraicas lineales a diagrama de flujo:

$$\left.\begin{array}{c} y_2 = a_{21}y_1 + a_{24}y_4 \\ y_3 = a_{32}y_2 + a_{33}y_3 + a_{34}y_4 \\ y_4 = a_{42}y_2 + a_{43}y_3 \\ y_5 = a_{52}y_2 + a_{54}y_4 \end{array}\right\}$$

Analizando las ecuaciones, podemos llegar fácilmente al siguiente diagrama de flujo:

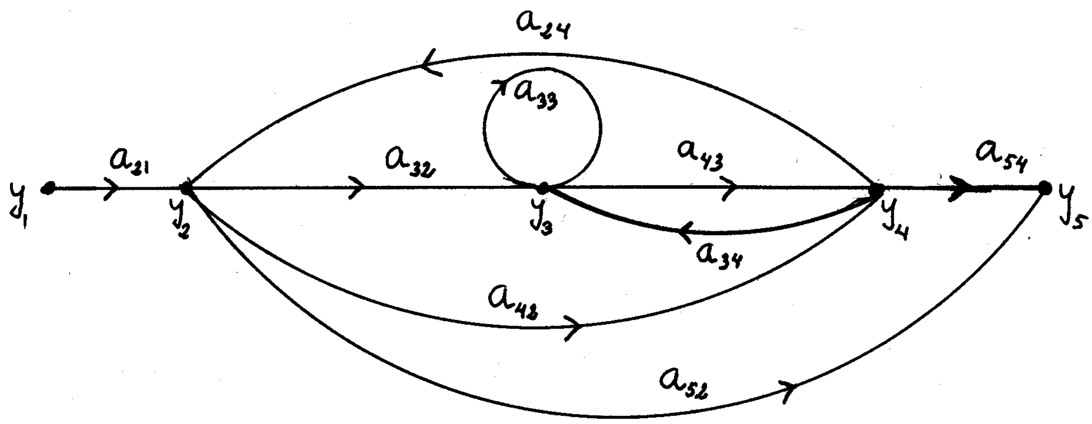

Figura 20

Las equivalencias entre diagramas de bloques y de flujo de señal pueden verse a continuación:

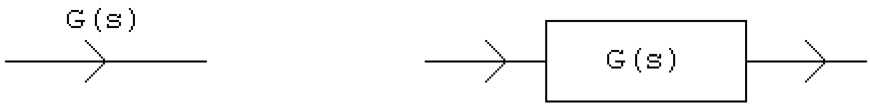

Figura 21

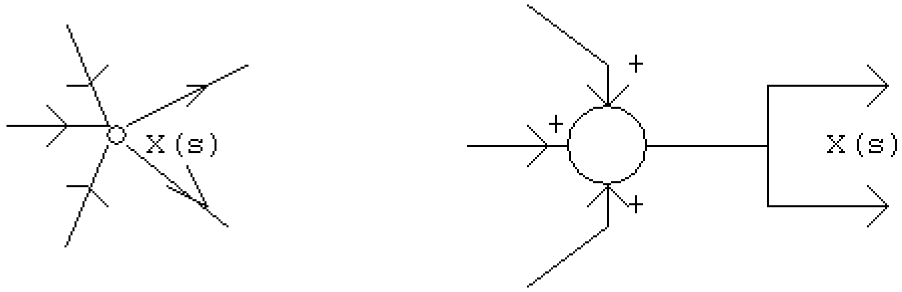

Figura 22

Veamos como ejemplo, cómo pasar de un diagrama de bloques a un gráfico de flujo de señal equivalente:

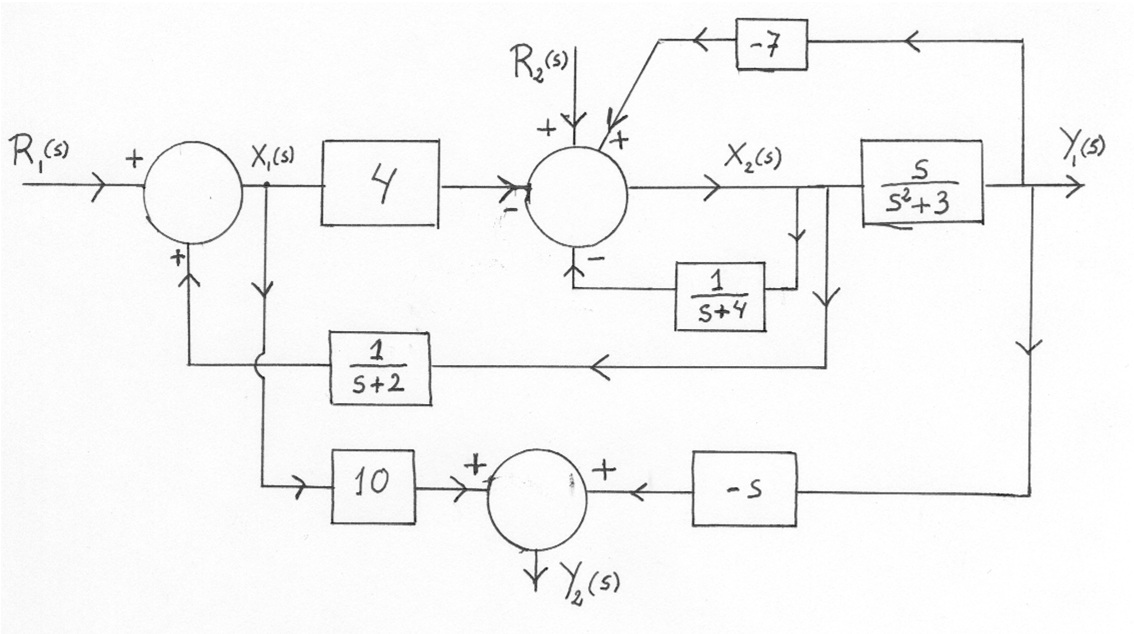

Figura 23

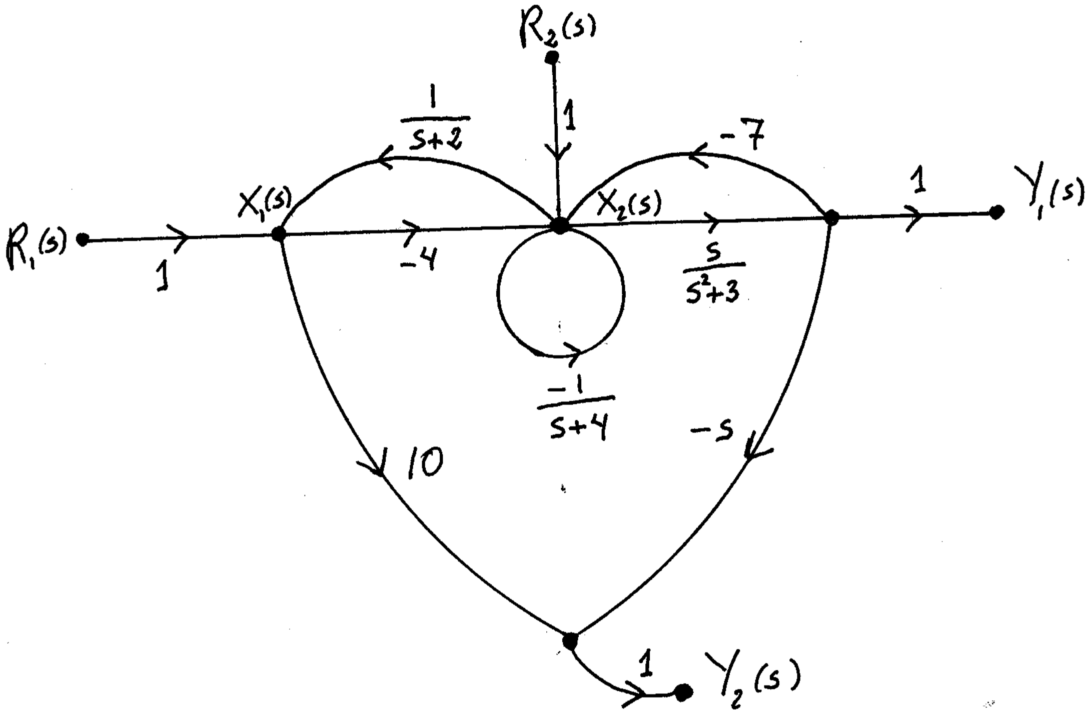

Figura 24

Igualmente podemos obtener el sistema de ecuaciones a partir del anterior diagrama, identificando las señales en cada nodo y escribiendo la ecuación de cada uno, igualando la señal en un nodo con la suma de las señales que llegan a él, a través de ramas, procedentes de otros nudos:

$$\left\{\begin{array}{c} X_1(s) = R_1(s) + \dfrac{1}{s+2} X_2(s) \\ X_2(s) = -4X_1(s) + R_2(s) - 7Y_1(s) - \dfrac{1}{s+4} X_2(s) \\ Y_1(s) = \dfrac{s}{s^2+3} X_2(s) \\ Y_2(s) = 10X_1(s) - sY_1(s) \end{array}\right\}$$

Debe tenerse en cuenta que dado un sistema, el diagrama de flujo no es único. Se pueden dibujar muchas gráficas de flujo de señal para un mismo sistema, escribiendo de forma distinta las ecuaciones del sistema.

3.2.-Definiciones.

Además de los nudos y las ramas ya definidos, los siguientes términos son útiles para realizar operaciones algebraicas con los diagramas de flujo de señal.

Nudo (nodo): Es un punto que representa una variable o señal.

Transmitancia (ganancia): Es la relación entre dos variables unidas por una rama, cuyo valor es el cociente de la de salida entre la de llegada.

Rama: Es un segmento de línea con dirección y sentido que une dos nudos. La ganancia de una rama es una transmitancia.

Nudo (nodo) de entrada (fuente): Es un nudo que solamente tiene ramas de salida. Corresponde a una variable independiente.

Nudo (nodo) de salida (pozo, sumidero): Es un nodo que tiene solamente ramas de entrada. Corresponde a una variable dependiente. Normalmente, las variables de salida se indicarán expresamente, ya que una variable de salida puede no ser un nodo de salida. En este caso, se añadirá, desde dicho nodo, una nueva rama de salida, de ganancia unitaria, hacia el nuevo nodo que, ahora sí, será de salida.

Nudo (nodo) mixto: Es un nudo que tiene tanto entradas como salidas.

Trayectoria (trayecto, camino): Es un recorrido de ramas conectadas, en el sentido de las flechas de las ramas. Si no se cruza ningún nudo más de una vez, es una **trayectoria abierta**. Si el camino o trayecto finaliza en el mismo nudo del cual partió, sin cruzar más de una vez por un nudo, es un **trayecto cerrado**. Si cruza un nodo más de una vez, pero finaliza en un nudo distinto del que se partió, el trayecto no es ni abierto ni cerrado.

Trayectoria (trayecto, camino) directa: Es una trayectoria que empieza en un nudo de entrada y termina en uno de salida, sin atravesar ningún nodo más de una vez.

Lazo (malla, ciclo): Es una trayectoria que se origina y termina en el mismo nodo, y en donde ningún otro nodo se encuentra más de una vez, esto es, es una trayectoria cerrada.

Ganancia de trayectoria (camino, trayecto): Es el producto de las ganancias de las ramas que atraviesa dicha trayectoria.

Ganancia de lazo (malla, ciclo): Es el producto de las transmitancias de las ramas del lazo.

Lazos (mallas, ciclos) disjuntos (que no se tocan): Son lazos que no tienen ningún nudo en común.

3.3.-Álgebra de las gráficas de flujo de señal.

Para obtener la relación entre la entrada y la salida se puede utilizar la regla de la ganancia de Mason (será lo más cómodo habitualmente), que veremos más adelante; o bien, tratar de reducir el grafo (de forma análoga a la reducción de diagramas de bloques) transformándolo hasta llegar a uno que solamente contenga las señales de entrada y salida unidas por una sola rama. Para ello, se pueden seguir las siguientes reglas:

a)El valor de un nudo con una rama de entrada es (Fig. 25): $X_2 = a \cdot X_1$

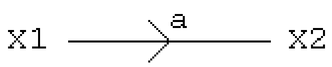

Figura 25

b)La transmitancia total de ramas en cascada es igual al producto de todas las transmitancias de las ramas:

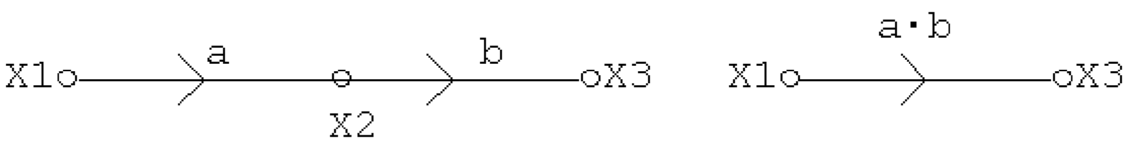

Figura 26

c)Se pueden combinar ramas en paralelo sumando sus transmitancias:

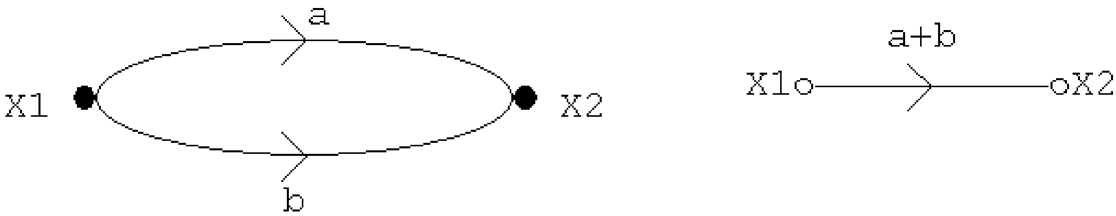

Figura 27

d)Se puede eliminar un nudo mixto de la forma siguiente:

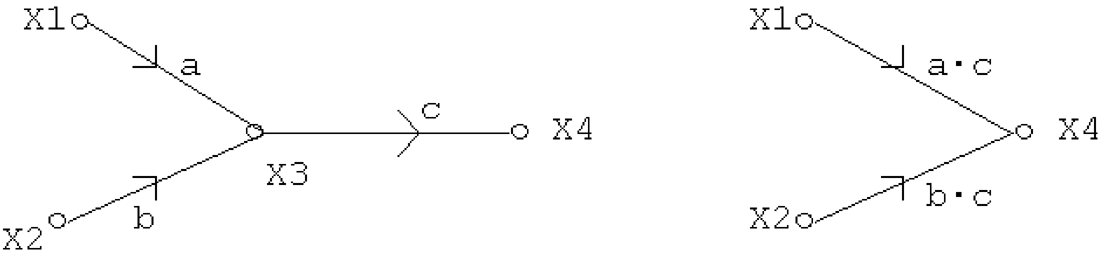

Figura 28

e)Se puede eliminar un lazo de la siguiente forma:

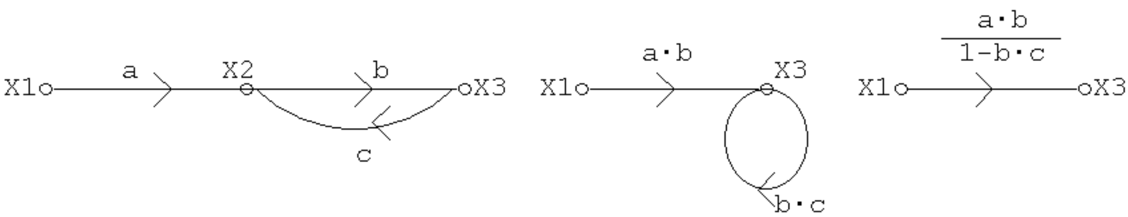

Figura 29

3.4.-Gráficos de flujo de señal de Sistemas de Control.

En las siguientes figuras se pueden ver algunos gráficos de flujo de señal de sistemas de control simples. Para ellos se puede obtener la función de transferencia de lazo cerrado fácilmente, según las anteriores reglas. Para gráficos más complejos es mucho más útil la fórmula de la ganancia de Mason, que veremos a continuación.

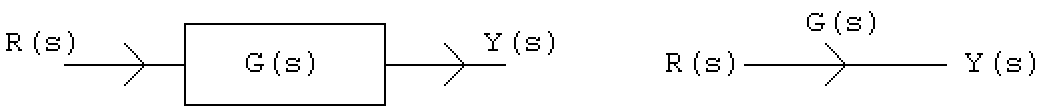

Figura 30

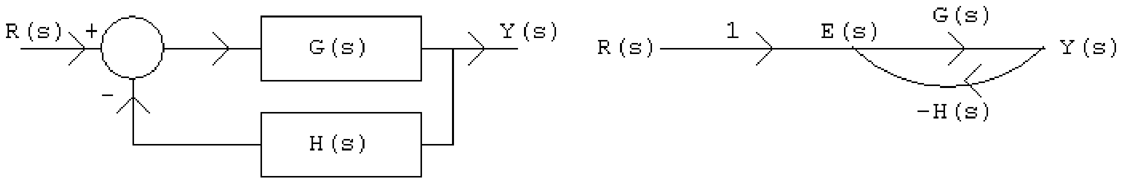

Figura 31

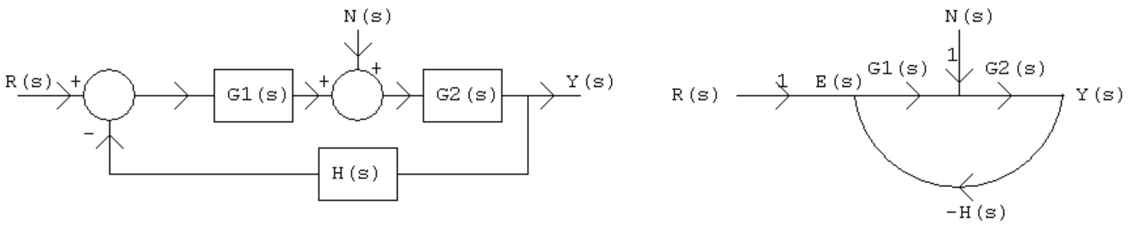

Figura 32

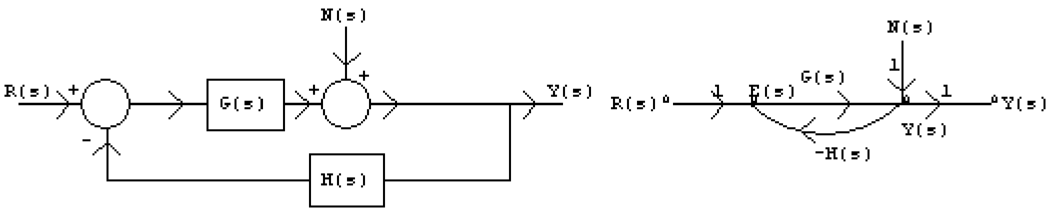

Figura 33

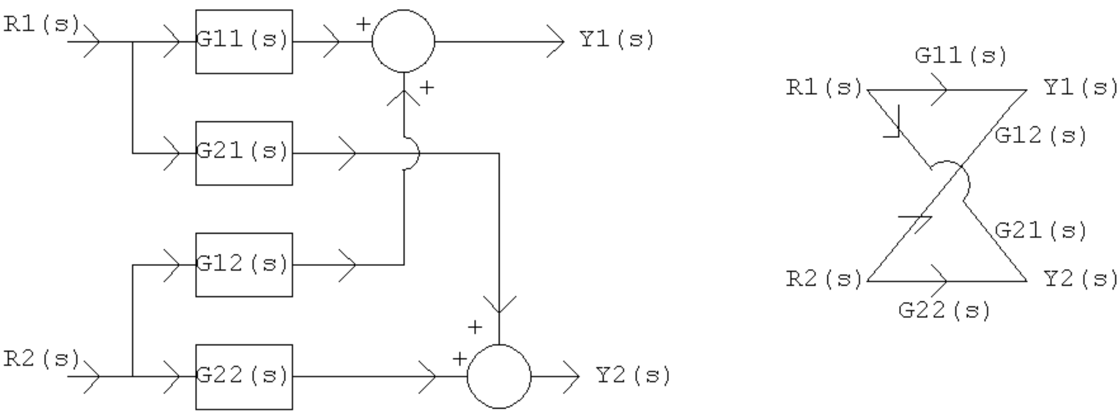

Figura 34

3.5.-Fórmula de la Ganancia de Mason para SFG.

En la práctica, en muchos casos se desea determinar la relación entre una variable de entrada y una de salida, en el gráfico de flujo de señal. La transmitancia entre un nudo de entrada y otro de salida es la ganancia total o transmitancia total entre esos dos nudos.

La fórmula de la ganancia de Mason, aplicada a la ganancia total, viene dada por la expresión:

$$T = \frac{\sum_{i}^{N} P_i \Delta_i}{\Delta}$$

siendo:

N = número de trayectorias directas entre la variable de entrada y la de salida.

$\boldsymbol{P_i}$ = Ganancia de la trayectoria i-ésima directa.

$\boldsymbol{\Delta}$ = Determinante del gráfico:

$$\Delta = 1 - \sum_{a} L_a + \sum_{b,c} L_b L_c - \sum_{d,e,f} L_d L_e L_f + ...$$

$\sum_{a} L_a$ = suma de todas las ganancias de lazo.

$\sum_{b,c} L_b L_c$ = suma de los productos de las ganancias de lazo de todas las combinanciones posibles de dos lazos disjuntos.

$\sum_{d,e,f} L_d L_e L_f$ = suma de los productos de ganancias de todas las combinaciones posibles de tres lazos disjuntos.

$\boldsymbol{\Delta_i}$ = Cofactor del determinante del i-ésimo trayecto directo del gráfico, eliminando previamente todos los lazos adjuntos a dicho i-esimo trayecto directo.

Nótese que esta regla solamente es aplicable entre un nudo de entrada y otro de salida. No obstante, podemos realizar una simple manipulación si quisiésemos aplicarla a un nudo de salida (y_{sal}) y un nudo de no entrada (y_x), cogiendo una entrada arbitraria real (y_{ent}) adicional y aplicar:

$$\frac{y_{sal}}{y_x} = \frac{y_{sal}/y_{ent}}{y_x/y_{ent}}$$

donde ahora podemos aplicar la regla para numerador y denominador por separado (es fácil conseguir que y_x sea de salida) y dividir el resultado entre ambos.

Veamos un ejemplo de aplicación de esta poderosa regla.

Ejemplo 1.: Encontrar la función de transferencia final del siguiente diagrama de bloques, tranmsformando previamente a gráfico de flujo de señal para, posteriormente, utilizar la regla de la ganancia de Mason.

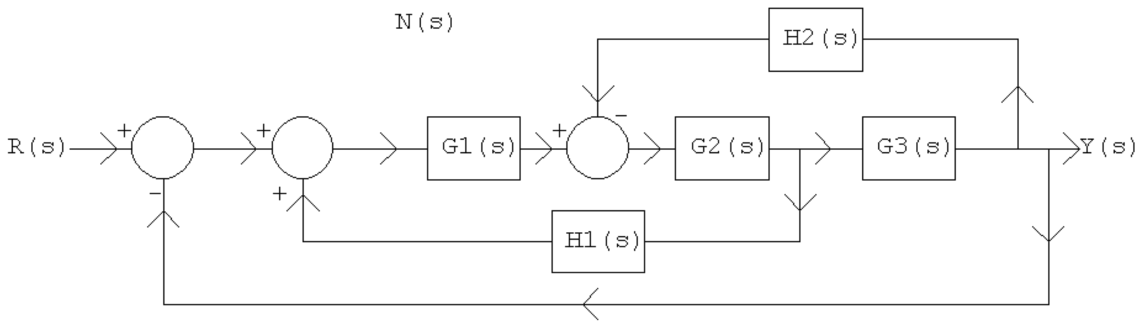

Figura 35

Primeramente obtendremos el gráfico de flujo de señal:

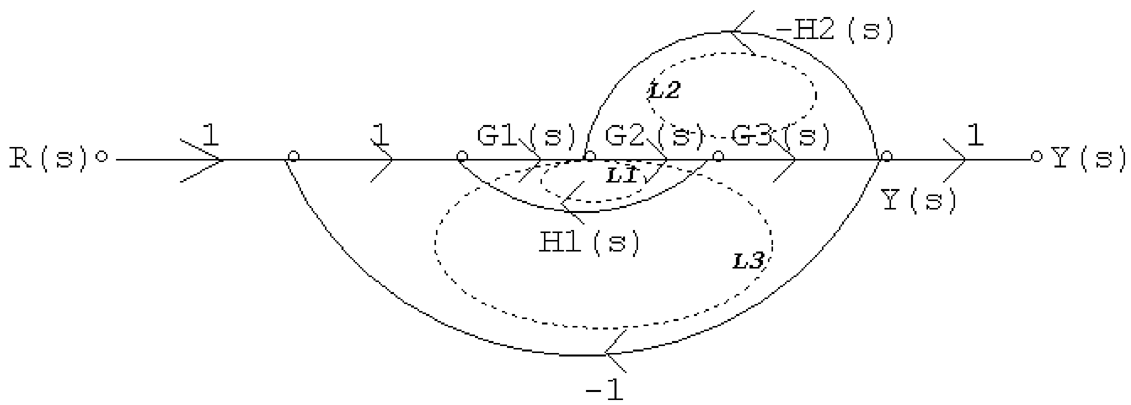

Figura 36

Podemos observar que en este sistema existe un solo trayecto directo:

$$P_1 = G_1 \cdot G_2 \cdot G_3$$

Existen tres lazos individuales:

$$L_1 = +G_1 \cdot G_2 \cdot H_1 \quad ; \quad L_2 = -G_2 \cdot G_3 \cdot H_2 \quad ; \quad L_3 = -G_1 \cdot G_2 \cdot G_3$$

Todos ellos tienen una rama en común, por lo que no existen lazos disjuntos. Así pues:

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3) = 1 - G_1 \cdot G_2 \cdot H_1 + G_2 \cdot G_3 \cdot H_2 + G_1 \cdot G_2 \cdot G_3$$

Al quitar todos los lazos adjuntos al camino P_1 se eliminan todos los lazos, por lo que

$$\Delta_1 = 1$$

Así pues, la ganancia pedida es:

$$T(s) \equiv \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{P_1 \cdot \Delta_1}{\Delta} = \frac{G_1 \cdot G_2 \cdot G_3}{1 - G_1 G_2 H_1 + G_2 G_3 H_2 + G_1 G_2 G_3}$$

Nótese que no hemos tenido que realizar ningún proceso de reducción para llegar al valor deseado.

Como es obvio, en sistemas con varias entradas y salidas, se irán eligiendo alternativamente una entrada y una salida, y aplicando repetidamente esta regla, se obtendrán todas las funciones de transferencia deseadas.

Por último, comentar que, debido a la similitud entre el diagrama de bloques y las gráficas de flujo de señal, la fórmula de la ganancia de Mason también es aplicable a los diagramas de bloques, pero, en sistemas complejos, para poder identificar los lazos y partes disjuntas de forma clara, suele ser de ayuda dibujar el diagrama de flujo de señal equivalente al de bloques, antes de aplicar la fórmula de la ganancia.

Terminaremos con un último ejemplo.

Ejemplo 2:

Obtener la función de transferencia de lazo cerrado, utilizando la fórmula de Mason, para el siguiente diagrama de flujo de señal.

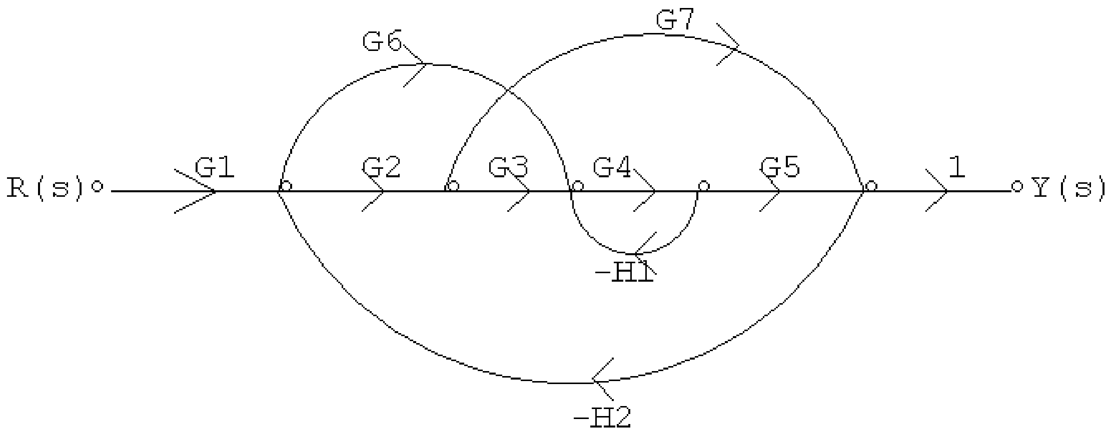

Figura 37

Pintaremos en primer lugar las trayectorias directas (trazos gruesos) y los lazos (trazos discontinuos):

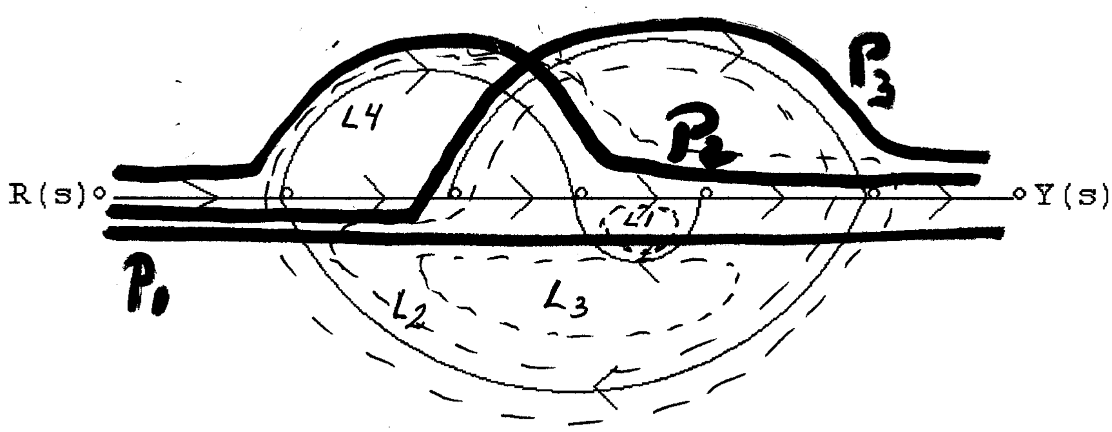

Figura 38

Tenemos tres trayectorias:

$$P_1 = G_1G_2G_3G_4G_5$$

$$P_2 = G_1G_6G_4G_5$$

$$P_3 = G_1G_2G_7$$

Existen cuatro lazos:

$$L_1 = -G_4H_1 \quad ; \qquad L_2 = -G_2G_7H_2$$

$$L_3 = -G_2G_3G_4G_5H_2 \quad ; \qquad L_4 = -G_6G_4G_5H_2$$

Vemos que L_1 y L_2 son disjuntos (el resto tienen en común algún nodo)

Tendremos que:

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + l_4) + (L_1 \cdot L_2) =$$

$$1 + G_4H_1 + G_2G_7H_2 + G_2G_3G_4G_5H_2 + G_6G_4G_5H_2 + G_2G_4G_7H_1H_2$$

$$\Delta_1 = 1 \; ; \qquad \Delta_2 = 1 \; ; \qquad \Delta_3 = 1 - L_1 = 1 + G_4H_1$$

con lo que:

$$T(s) = \frac{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2 + P_3\Delta_3}{\Delta} =$$

$$T(s) = \frac{G_1G_2G_3G_4G_5 + G_1G_6G_4G_5 + (G_1G_2G_7)(1 + G_4H_1)}{1 + G_4H_1 + G_2G_7H_2 + G_2G_3G_4G_5H_2 + G_6G_4G_5H_2 + G_2G_4G_7H_1H_2}$$