TEMA V

# RESPUESTA TEMPORAL

## *1.-Introducción.*

Una vez obtenido el modelo matemático de un sistema, disponemos de varios métodos para analizar el comportamiento del sistema. Los sistemas de control se diseñan para conseguir un determinado comportamiento, tanto en régimen permanente como transitorio. La respuesta en el tiempo de un sistema de control se divide normalmente en dos partes: respuesta transitoria y respuesta estacionaria (permanente o en estado estable). En sistemas de control, la respuesta transitoria está definida como la "parte de la respuesta temporal que tiende a cero cuando el tiempo se hace muy grande". Por el contrario, la respuesta estacionaria "es la parte de la respuesta temporal que permanece, una vez que la transitoria ha desaparecido".

Un sistema realimentado tiene capacidad inherente de poder ajustar sus parámetros para obtener tanto su respuesta transitoria como permanente.

Todos los sistemas de control estables reales presentan un fenómeno transitorio antes de alcanzar la respuesta en estado estable; ello es debido a que la masa, la inercia y la inductancia, son inevitables en los sistemas físicos, por lo que sus respuestas no pueden seguir cambios bruscos en la entrada de forma instantánea y, normalmente, se observarán transitorios.

En consecuencia, la respuesta transitoria es normalmente importante, ya que es una parte significativa del comportamiento dinámico del sistema; y la desviación entre la respuesta de la salida y la entrada (o respuesta deseada) se debe controlar cuidadosamente antes de alcanzar el estado estable.

La respuesta en estado estable de un sistema de control es también muy importante, ya que indica en donde termina la salida del sistema cuando el tiempo se hace grande. En general, si la respuesta en estado estable de la salida no coincide exactamente con la deseada, se dice que el sistema tiene un error de estado estacionario.

El estudio de un sistema de control en el dominio del tiempo involucra esencialmente la evaluación de sus respuestas transitoria y estacionaria. En el problema de diseño, las especificaciones se proporcionan normalmente en términos del comportamiento transitorio y del estacionario, y los controladores se diseñan para que todas esas especificaciones sean cumplidas por el sistema diseñado.

Como ya se indico con anterioridad, si se conoce la respuesta impulsional de un sistema, mediante la integral de convolución podremos obtener la respuesta a cualquier tipo de señal. Por desgracia, esta operación no está exenta de complejidad, por lo que resulta más interesante el conocer la respuesta temporal de un sistema a las entradas típicas escalón, rampa y parábola.

Desgraciadamente, las entradas de un sistema de control pueden variar en forma aleatoria con respecto al tiempo. Esto provoca un problema para el diseñador, ya que es difícil diseñar un sistema de control que tenga un funcionamiento satisfactorio para todas las formas posibles de señales de entrada. Para propósitos de análisis y diseño, es necesario suponer algunos tipos básicos de entradas de prueba para evaluar el funcionamiento de un sistema. Conseguimos así sistematizar el tratamiento matemático del problema, a la vez se consigue el poder predecir su comportamiento para señales más complejas, esto es, si el sistema es lineal, se cumplirá el principio de Superposición, lo que indicará que la respuesta a una señal formada a partir de otras más simple será suma de las respuestas del sistema ante cada una de éstas por separado.

Cuando la respuesta de un sistema lineal e invariante con el tiempo se analiza en el dominio de la frecuencia, se emplea una entrada senoidal con frecuencia variable. Cuando la frecuencia de entrada se barre desde cero hasta el valor significativo de las características del sistema, las curvas en términos de la relación de amplitudes y fases entre la entrada y la salida se dibujan como funciones de la frecuencia. Es posible predecir el comportamiento del sistema en el dominio del tiempo a partir de sus características en el dominio de la frecuencia.

Para facilitar el análisis en el dominio del tiempo, se utilizan las siguientes señales de prueba determinísticas:

a)Entrada función escalón (función de Heaviside). Representa un cambio instantáneo en la entrada de referencia: r(t) = A·u(t) siendo u(t) el escalón unitario

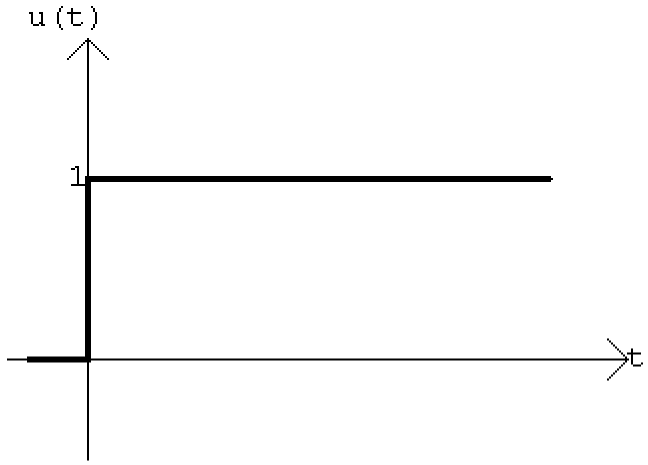


**Figura 1**

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

Esta señal es muy útil como señal de prueba, ya que su salto instantáneo inicial de amplitud revela cómo de rápido responde un sistema a entradas con cambios abruptos. Además, como la función escalón contiene, en principio, un espectro con una banda ancha de frecuencias como resultado de la discontinuidad del salto, es equivalente a la aplicación de una gran cantidad de señales senoidales con un intervalo de frecuencias grande.

b)Entrada función rampa. Es una señal que cambia constantemente con el tiempo. Matemáticamente se representa mediante:

$$r(t) = A \cdot t \cdot u(t)$$

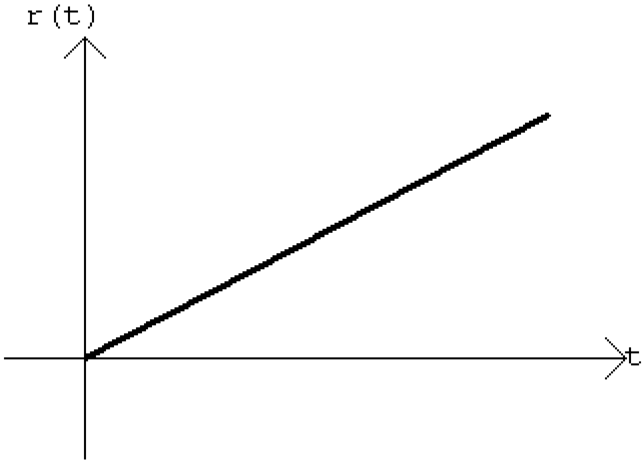


**Figura 2**

Esta señal nos dice cómo responde el sistema a señales que cambian linealmente con el tiempo.

c)Entrada función parabólica. Esta función representa una señal que tiene una variación más rápida que la función rampa. Matemáticamente se representa por

$$r(t) = A \cdot \frac{t^2}{2} \cdot u(t)$$

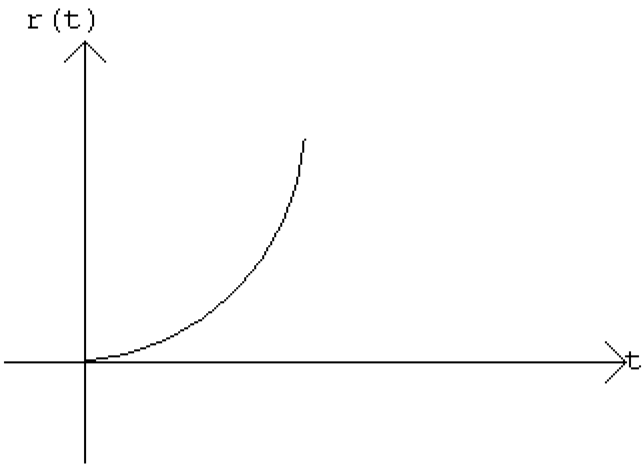


**Figura 3**

(el factor ½ se añade por conveniencia matemática, para que la transformada de Laplace de la señal sea simplemente $A/s^3$).

Estas señales tienen la característica común de que son simples de describir en forma matemática. De la función escalón a la parabólica, las señales se vuelven progresivamente más rápidas con respecto al tiempo. En teoría se pueden definir señales con velocidades aún más rápidas, como $t^3$ (que se denomina función tirón), y así sucesivamente. Sin embargo, en realidad, rara vez es necesario o factible emplear señales de prueba más rápidas que una función parabólica. Esto se debe a que, como se verá posteriormente, para seguir una entrada de orden superior en forma exacta, el sistema debe tener integraciones de orden superior en el lazo, lo que, normalmente conlleva serios problemas de estabilidad.

## *2.-Respuesta impulsional.*

La “función” impulso unitario (Delta de Dirac), tiene la siguiente forma matemática:

$$g(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \infty & t = 0 \\ 0 & t > 0 \end{cases}$$

(se observa que el entrecomillar la palabra función es del todo lógico, ya que esa definición puede ser de cualquier cosa menos de una función en regla; de hecho, esta función responde más bien a algo llamado distribución funcional que a una función en sí).

Diremos que el impulso es unitario si se cumple

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt = 1$$

Con anterioridad, ya se comentó que la Función de Transferencia de un sistema lineal está definida como la Transformada de Laplace de la respuesta del sistema a una entrada impulso, por lo que, a priori, sería necesario conocer siempre la respuesta de cualquier sistema a una entrada impulsional, para obtener su Función de Transferencia (por suerte, sabemos que esto no es necesario, ya que podemos obtener ésta directamente si conocemos la ecuación diferencial del sistema, por aplicación directa de la Transformación de Laplace). No obstante, conocer la respuesta a un impulso es siempre interesante porque dicha respuesta nos da idea de cual es el comportamiento intrínseco de dicho sistema. No en vano, a dicha respuesta se la denomina “respuesta natural o propia” del sistema.

En esencia, como la Transformada de Laplace del impulso unitario es la unidad, la salida (en el dominio de Laplace) tiene como expresión matemática la de la Función de Transferencia, esto es, Y(s) = G(s), donde se observa que no hay ninguna inferencia ajena al sistema (debida a forzamientos externos). Podemos afirmar que la Función de Transferencia y la respuesta impulsiva de un sistema, contienen exactamente la misma información. La forma en que un sistema responde a un impulso, se verá siempre representada (al menos en el aspecto) en la respuesta a cualquier otro tipo de señal.

## *3.-Influencia en la respuesta transitoria de la situación de polos y ceros.*

A la vista de lo comentado en el punto anterior, cabe pensar que la respuesta impulsional tiene mucho que ver con el transitorio de un sistema. Concretamente, y recordando que para un sistema lineal e invariante con el tiempo, la ecuación diferencial asociada tiene por respuesta la solución de la ecuación homogénea más la solución particular de la ecuación completa (incluida la excitación), queda claro que, estrictamente hablando, el transitorio de un sistema dependerá (normalmente) de ambas componentes (homogénea más particular), pero en la mayor parte de los casos, la solución transitoria coincidirá con la homogénea (suponiendo sistemas reales, estables y sin saturaciones, esto es, sistemas cuyos polos estén situados en el Semiplano Izquierdo del plano complejo), ya que la estacionaria se supondrá no nula (cosa habitual). Así pues, vamos a recordar las posibilidades que pueden presentarse en la solución homogenea de un sistema.

Supongamos que su función de transferencia tiene la forma

$$T(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

sabemos que el denominador igualado a cero (D(s)=0), que recibe el nombre de ecuación característica, coincide con la ecuación homogénea.

Sabemos que si las raíces de dicha ecuación no están repetidas, la solución homogenea la podremos poner de la siguiente forma:

$$y_{\mathrm{hom}}(t) = \sum_{i=1}^{N_R} A_i \cdot e^{-\sigma_i t} + \sum_{k=1}^{N_C} B_k \cdot e^{-\sigma_k t} sen(w_k t + \varphi_k)$$

donde se han supuesto $N_R$ raíces reales de la forma $s = \sigma_i$ y $N_C$ raíces complejas de la forma $s = \alpha_k \pm j \cdot w_k$ (complejas conjugadas siempre que los coeficientes de la ecuación diferencial sean reales). Se observa que en ambos casos se tiene una exponencial (sola cuando la raíz es real) o modulando una senoide (con raíces complejas). Obviamente, para que la respuesta sea estable, es decir, limitada para una entrada finita, es necesario que la parte real de las raíces $\sigma_i$ y $\alpha_k$ esté en la parte izquiera del plano s.

En el caso de tener alguna raíz repetida (orden de multiplicidad superior a uno), la salida contendrá términos de la forma $A + A_1 \cdot t + A_2 \cdot t^2 + \ldots$ , multiplicados por su exponencial corrrespondiente (que siempre es dominante frente a las potencias de t), lo que no afectará a la estabilidad, salvo en el caso de que se encuentren sobre el eje imaginario (es decir, caso particular de raíces imaginarias puras, incluyendo entre ella una raíz en el origen). En este caso, la exponencial se convierte en la unidad y puede observarse que, solamente en el caso de raíces no repetidas, el sistema será estable, en cualquier otro caso, la potencia $t^n$ hará que la salida crezca indefinidamente hasta llegar a la saturación (o destrucción) del sistema.

La siguiente figura muestra la respuesta impulsional para diversas localizaciones de raíces. En ella puede observarse que en el caso de raíces reales, la respuesta es una exponencial creciente o decreciente, según sea el valor de la raíz positivo o negativo, respectivamente. La subida o caída es más rápida cuanto mayor es el valor absoluto de la raíz.

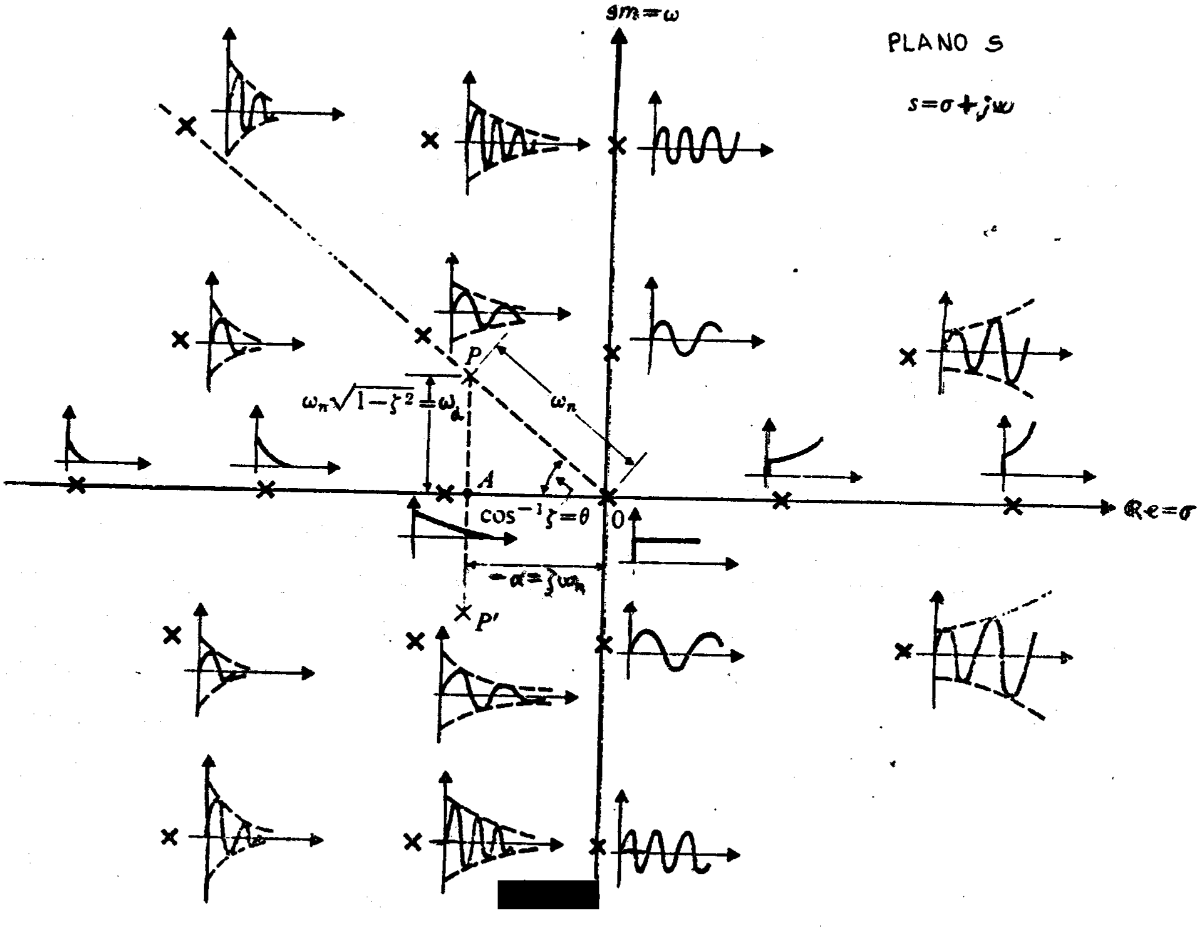


**Figura 4**

En el caso de raíces complejas conjugadas, la salida es una senoide amortiguada cuando $\alpha_i$ es negativa y una senoide creciente cuando es positiva. La frecuencia de oscilación depende del valor $w_k$ (parte imaginaria de la raíz): cuanto mayor es w, mayor es la frecuencia de oscilación).

En el caso de que las raíces complejas sean imaginarias puras (no repetidas), se obtiene una senoide de amplitud constante (por lo que no es transitoria) y de frecuencia igual a la parte imaginaria de las raíces. Si existen raíces con orden de multiplicidad r, la resolución es de la forma:

$$A_1 \cdot \mathrm{sen}(wt+\varphi_1) + A_2 \cdot t \cdot \mathrm{sen}(wt+\varphi_2) + \ldots + A_r \cdot t^{r-1} \cdot \mathrm{sen}(wt+\varphi_r)$$

En el caso de que la raíz esté situada en el origen, la salida es constante. Si la raíz es de orden r en el origen, la salida es de la forma:

$$A_1 + A_2 \cdot t + ... + A_r \cdot t^{r-1}$$

Como se deduce de esa figura, conociendo la localización de los polos de la función de transferencia de un sistema de control, se tiene una información inmediata de su comportamiento en el dominio del tiempo y, por tanto, de su transitorio.

La influencia de los ceros en el transitorio no es tan clara como la de los polos, pero no por ello deja de ser importante o, al menos, interesante. Para empezar algo simple, cabe preguntarse ¿que ocurriría si tuviesemos un cero y un polo en el mismo lugar?. La respuesta es obvia y sencilla: que ambos se cancelan, es decir, que el efecto conocido del polo desaparece, anulado por su cero. Por supuesto, esto es un caso absurdo, pero nos da pie para intuir el resultado en el caso, que sí puede ser habitual, de tener un cero situado en las proximidades del polo. Matemáticamente este hecho da por respuesta que el “residuo” (coeficiente numerador del desarrollo en fracciones simples) de dicho polo se reduce drásticamente, esto es, su influencia se ve minimizada frente al caso de no tener ese cero próximo. Esto se puede apreciar claramente, y es una opción para amortiguar polos no deseados, pero solamente funciona cuando el polo está en el semiplano izquierdo (amortiguación), ya que si se encontrase en el derecho, al no estar nunca la situación del cero exactamente sobre la del polo, esto provoca que inicialmente no se note su efecto, pero conforme transcurre el tiempo, la exponencial creciente suple con creces el bajo valor de su residuo y, antes o después, el sistema termina por saturarse (inestabilizarse).

También, y aunque esto ya no es tan obvio, puede verse que lo que posteriormente llamaremos “sobreelongación”, “sobrepaso”, etc, puede verse muy incrementado cuando se tienen ceros próximos al origen, por lo que este hecho deberá tratar de evitarse durante el diseño.. A veces, sin embargo, una buena localización del cero puede ser interesante para mejorar la respuesta del sistema. Al igual que con los polos, cuando el cero se desplaza del origen, su efecto se hace menos pronunciado y, para valores muy alejados, su influencia influencia es despreciable. La modificación que se realiza en los sistemas de control para obtener una mejora en las características de respuesta se denomina “compensación”; lo que se consigue introduciendo elementos especiales en el sistema que ejercen acciones de control específicas, bien sean diferenciales (derivativas) o integrales.

## *4.-Sistemas de Primer Orden.*

Veremos aquí solamente un breve resumen de este tipo de circuitos, ya que este tema es típicamente de Teoría de Circuitos, y puede encontrarse en bibliografía al respecto.

Un sistema de primer orden se describe mediante una ecuación diferencial de primer orden. El sistema más simple tiene la ecuación:

$$\frac{dy}{dt} + a_o\, y(t) = b_o\, r(t)$$

donde $a_o$ y $b_o$ son constantes.

Por transformación de Laplace y reagrupación de términos:

$$sY(s)-y(0^-)+a_oY(s)=b_oR(s)$$

y despejando Y(s):

$$Y(s) = \frac{b_o}{s+a_o} R(s) + \frac{y(0^-)}{s+a_o}$$

donde el primer sumando es la **componente de estado cero** y el segundo la **componente de entrada cero**.

La función de transferencia que relaciona Y(s) con R(s) es, por consiguiente:

$$T(s) = \frac{b_o}{s+a_o}$$

Puede demostrarse que considerando una entrada **escalón** de amplitud A (**r(t)=A·u(t)**), y condiciones iniciales nulas, la salida será:

$$Y(s) = \frac{(b_o A/a_o)}{s} + \frac{(-b_o A/a_o)}{s+a_o}$$

Tomando Transformadas Inversas de Laplace:

$$y(t) = \left[ \frac{b_o A}{a_o} - \frac{b_o A}{a_o} \cdot e^{-a_o t} \right] \cdot u(t)$$

Si las condiciones iniciales no son nulas:

$$Y(s) = \frac{(b_o A/a_o)}{s} + \frac{y(0^-)-(b_o A/a_0)}{s+a_o}$$

Tomando Transformadas Inversas de Laplace:

$$y(t) = \left\{ \frac{b_o A}{a_o} + \left[ y(o^-) - \frac{b_o A}{a_o} \right] \cdot e^{-a_o t} \right\} \cdot u(t)$$

Es fácil observar que si la **raíz característica** s = $-a_o$ es negativa ($a_o$ positiva), el sistema es estable y el término exponencial natural decae con el tiempo, dejando el término constante forzado (o "estado estacionario"). Para una raíz característica positiva ($a_o$ negativo), el término exponencial crece con el tiempo, y el sistema es inestable. En general, cuando el sistema es estable, las respuestas natural y de entrada cero se extinguen con el tiempo.

En la siguiente figura puede observarse la respuesta temporal de un circuito de primer orden con condiciones iniciales nulas (fig. 5) y no nulas (Fig. 6):

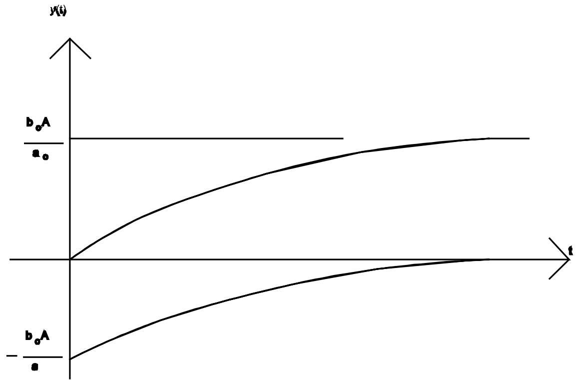

**Figura 5**

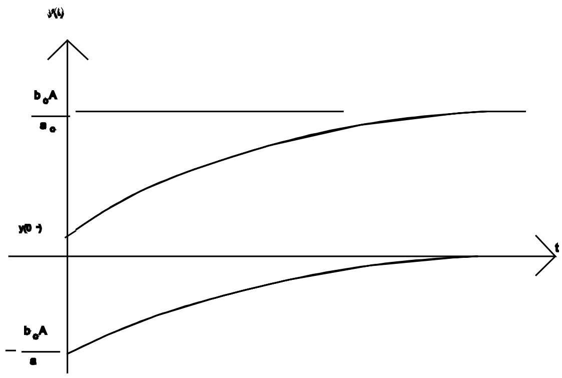

**Figura 6**

La **constante de tiempo** de un sistema estable de primer orden es :

$$\tau \equiv \frac{1}{a_o}$$

Este valor representa el intervalo de tiempo en el cual la exponencial decae por un factor 1/e (0.37). Las funciones de transferencia de los sistemas de primer orden se suelen escribir de la siguiente forma:

$$T(s) = \frac{polinomio\ numerador}{s + a_o} = \frac{\dfrac{polinomio\ numerador}{a_o}}{\dfrac{1}{a_o}s + 1} \Rightarrow$$

$$T(s) = \frac{\dfrac{polinomio\ numerador}{a_o}}{\tau s + 1}$$

para mostrar la constante de tiempo en forma explícita.

El sistema de primer orden más general comprende la entrada **r(t)** y, posiblemente, varias de sus derivadas:

$$\frac{dy}{dt} + a_o y(t) = b_m \frac{d^{m)} r}{dt^m} + \ldots + b_1 \frac{dr}{dt} + b_o r(t)$$

La función de transferencia correspondiente es

$$T(s) = \frac{b_m s^m + ... + b_1 s + b_o}{s + a_o}$$

En la práctica, el numerador de una función de transferencia rara vez tiene un orden superior al del denominador (en ese caso se acentuarían sin límite las frecuencias superiores), y en este caso, tendríamos:

$$\frac{dy}{dt} + a_o y = b_1 \frac{dr}{dt} + b_o r$$

de donde, tomando Transformadas de Laplace y operando, se obtiene la expresión de Y(s):

$$Y(s) = \frac{b_1 s + b_o}{s + a_o} \cdot R(s) + \frac{y(0^-) - b_1 r(0)}{s + a_o}$$

donde, el primer sumando recibe el nombre de **componente de estado cero** y el segundo **componente de entrada cero**.

La función de transferencia que relaciona **Y(s)** con **R(s)** (componente de estado cero, que coincide con la función de transferencia) es:

$$T(s) = \frac{b_1 s + b_o}{s + a_o} = b_1 + \frac{b_o - a_o b_1}{s + a_o}$$

Tal sistema se puede considerar como constituido por una ganancia $b_1$ en tándem con un sistema de primer orden que tiene función de transferencia de numerador constante, como se indica en la figura siguiente.

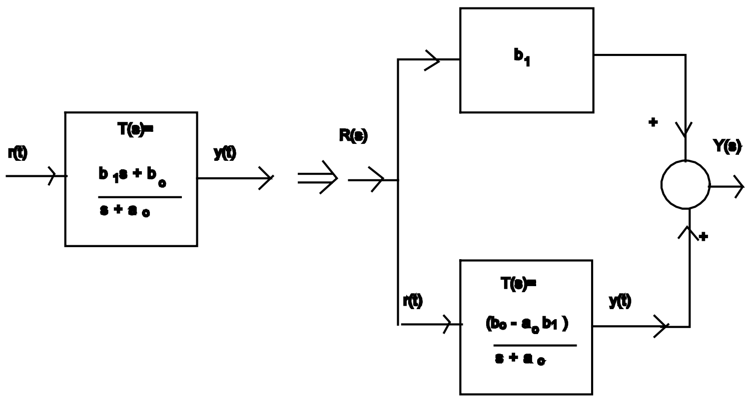


**Figura 7**

Con frecuencia, el cultivo de bacterias y muchas otras actividades biológicas se modela mediante una ecuación diferencial de primer orden, y sus respuestas son funciones del tiempo que tienen un simple término exponencial. Los circuitos eléctricos RL y RC, y la descomposición radiactiva, también exhiben comportamiento de primer orden.

## *5.-Sistemas de Segundo Orden.*

Los sistemas de segundo orden se describen mediante ecuaciones diferenciales de segundo orden de la forma:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + a_1\frac{dy}{dt} + a_o\, y(t) = b_m\frac{d^{m)}r}{dt^m} + \ldots + b_1\frac{dr}{dt} + b_o\, r(t)$$

Por la transformación de Laplace y reagrupación de términos:

$$Y(s) = \frac{b_m s^m + \ldots + b_1 s + b_o}{s^2 + a_1 s + a_o}\cdot R(s) + \frac{\begin{array}{c}\text{numerador de primer orden, polinomio}\\ \text{que comprende condiciones iniciales}\end{array}}{s^2 + a_1 s + a_o}$$

siendo el primer sumando la **componente de estado cero** y el segundo la **componente de entrada cero**.

La función de transferencia será de la forma:

$$Y(s) = \frac{b_m s^m + \ldots + b_1 s + b_o}{s^2 + a_1 s + a_o}$$

y el sistema tiene de **polinomio característico**:

$$\mathbf{s^2 + a_1 s + a_o = (s - s_1)(s - s_2)}$$

con las raíces $s_1$ y $s_2$ dadas por la forma cuadrática:

$$s_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_o}}{2} \quad y \quad s_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_o}}{2}$$

<u>a) Sistema sobreamortiguado.</u>

Si estas raíces son números reales diferentes, los términos naturales del desarrollo de la respuesta en fracciones parciales tienen la forma:

$$Y_{natural}(s) = \frac{\text{polinomio numerador de primer orden}}{s^2 + a_1 s + a_o} =$$

$$= \frac{\text{polinomio numerador}}{(s - s_1)(s - s_2)} = \frac{K_1}{s - s_1} + \frac{K_2}{s - s_2}$$

la cual, como una función del tiempo después de t=0, consta de la suma de dos términos exponenciales reales del tipo de primer orden:

$$y_{natural}(t) = K_1\cdot e^{-s_1 t} + K_2\cdot e^{-s_2 t}$$

y se dice que el sistema está **sobreamortiguado** (Fig. 8).

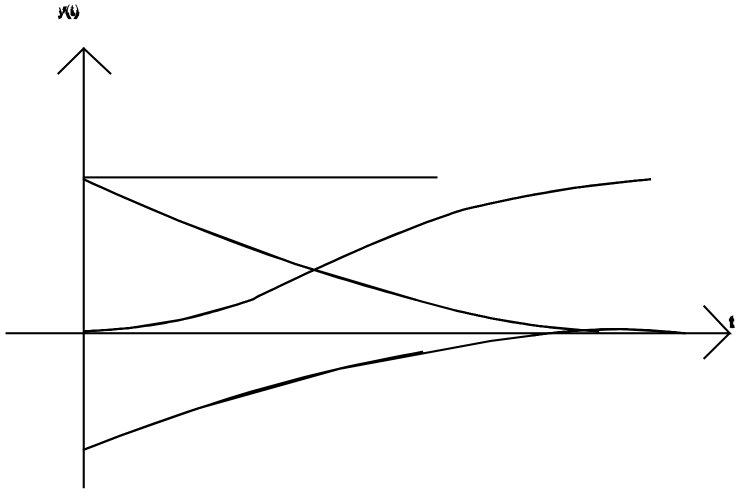


**Figura 8**

b)Sistema críticamente amortiguado.

Si las raíces características son iguales, los términos naturales tienen la forma:

$$Y_{natural}(s) = \frac{polinomio\ numerador}{s^2 + a_1 s + a_o} = \frac{polinomio\ numerador}{(s - s_1)^2} =$$

$$= \frac{K_1}{s - s_1} + \frac{K_2}{(s - s_1)^2}$$

para la cual, la función del tiempo correspondiente, posterior a t=0 es:

$$y_{natural}(t) = K_1 \cdot e^{s_1 t} + K_2 \cdot t \cdot e^{s_1 t}$$

Se dice que este sistema de segundo orden está **críticamente amortiguado** (Fig. 9).

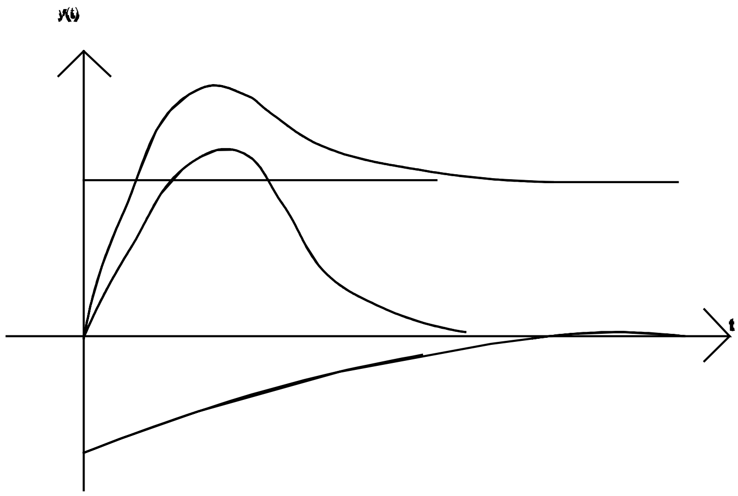


**Figura 9**

c) Sistema subamortiguado.

Si las raíces del polinomio característico son números complejos, éstos serán complejos conjugados: **$s_1 = a + jw$** ; **$s_2 = a - jw$** y la componente de respuesta natural tiene la forma:

$$Y_{natural}(s) = \frac{polinomio\ numerador}{s^2 + a_1 s + a_o} = \frac{polinomio\ numerador}{(s - a - jw)(s - a + jw)} =$$

$$= \frac{polinomio\ numerador}{(s + a)^2 + w^2}$$

cuya Transformada Inversa de Laplace es:

$$Y_{natural}(t) = \left[A \cdot e^{-at} \cdot \cos(wt + \theta)\right] \cdot u(t)$$

Este tipo de sistema se dice que está **subamortiguado** (Fig. 10).

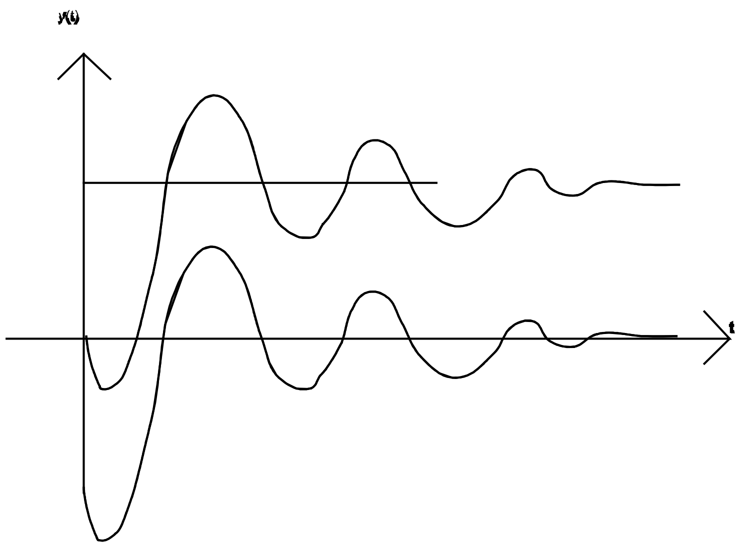


**Figura 10**

## 5.1.-Parámetros de interés.

A continuación, vamos a definir algunos parámetros interesantes, que describen las características más interesantes de la respuesta transitoria de los sistemas de segundo orden.

a)***Frecuencia natural no amortiguada ($w_n$) y relación de amortiguamiento ($\xi$)***

La respuesta natural de un sistema subamortiguado de segundo orden queda descrito por la frecuencia angular ***w*** y la constante exponencial ***a***, la cual se puede determinar a partir del polinomio característico del sistema:

$$\mathbf{s^2 + a_1 s + a_o = (s+a)^2 + w^2}$$

Se puede obtener otra descripción en función de la ***respuesta natural no amortiguada ( $w_n$ )***, y de la ***relación de amortiguamiento ($\xi$).***

Estas cantidades se relacionan con el polinomio característico de la siguiente manera:

$$s^2 + a_1 s + a_o = s^2 + 2\xi w_n s^2 + w_n^2$$

al igualar las dos descripciones se obtiene:

$$a = \xi \cdot w_n \quad y \quad w = w_n \cdot \sqrt{1 - \xi^2}$$

Para ξ entre 0 y 1, las raíces características están en una circunferencia de radio $W_n$ con centro en el origen del plano complejo.

Para ξ = 0 , las raíces están en el eje imaginario.

Para ξ = 1 , ambas raíces, repetidas, están sobre el eje negativo real (Fig. 11).

La frecuencia natural no amortiguada es la frecuencia angular a la cual las oscilaciones deben ocurrir si la relación de amortiguamiento fuese cero. Si es cero, la respuesta natural del sistema tiene la forma:

$$Y_{natural}(s) = \frac{polinomio\ numerador}{s^2 + w_n^2}$$

$$\mathbf{y_{natural}(t) = [A \cdot \cos(w_n t + \varphi)] \cdot u(t)}$$

Un conjunto de curvas de respuesta escalón normalizado para sistemas de segundo orden no amortiguado de la forma

$$T(s) = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\xi\, w_n s + w_n^2}$$

se muestra en la Figura 11. Para ξ = 0 , las oscilaciones continuarán indefinidamente. Para valores mayores de ξ se obtiene un decaimiento más rápido de las oscilaciones, pero con un ascenso más lento en la respuesta. Para ξ = 1, el sistema se torna críticamente amortiguado.

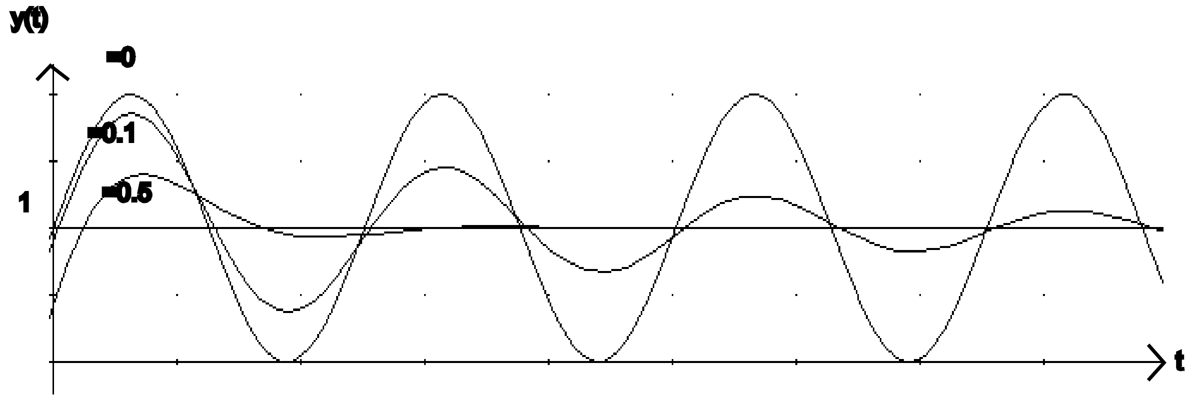


**Figura 11**

Para las siguientes definiciones, por convenio, se supone una entrada tipo escalón:

b)***Tiempo de retardo $t_d$ (delay time)***

Es el tiempo que tarda la respuesta en alcanzar por primera vez el 50% de su valor permanente, estacionario o final.

c)***Tiempo de subida o de crecimiento $t_r$ (rise time)***

Es el tiempo que transcurre desde que la respuesta pasa de un valor del 10% al 90% de su valor final. Esta definición se emplea en los sistemas sobreamortiguados. Cuando se trata de sistemas subamortiguados, se utiliza el tiempo de subida entre el 0 y el 100%.

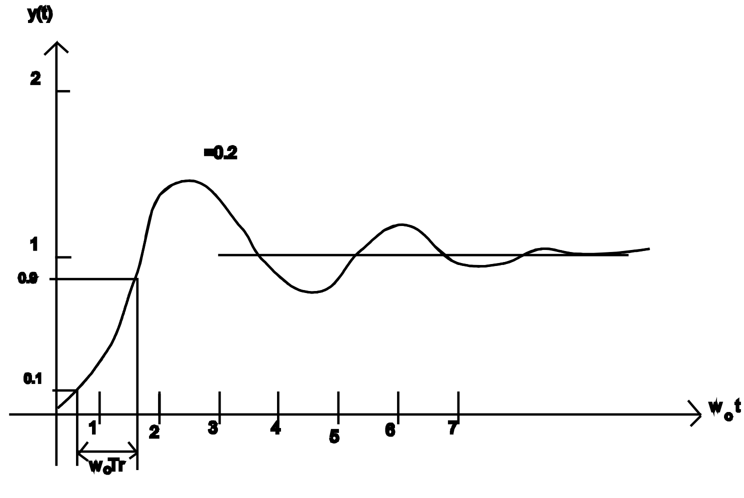


**Figura 12**

En las figuras 12 y 13 se muestra (para sistema de segundo orden subamortiguado con relación de amortiguamiento $\xi$ = 0.2) como obtener esta cantidad y la gráfica del tiempo de subida normalizado en función de la relación de amortiguamiento (respectivamente).

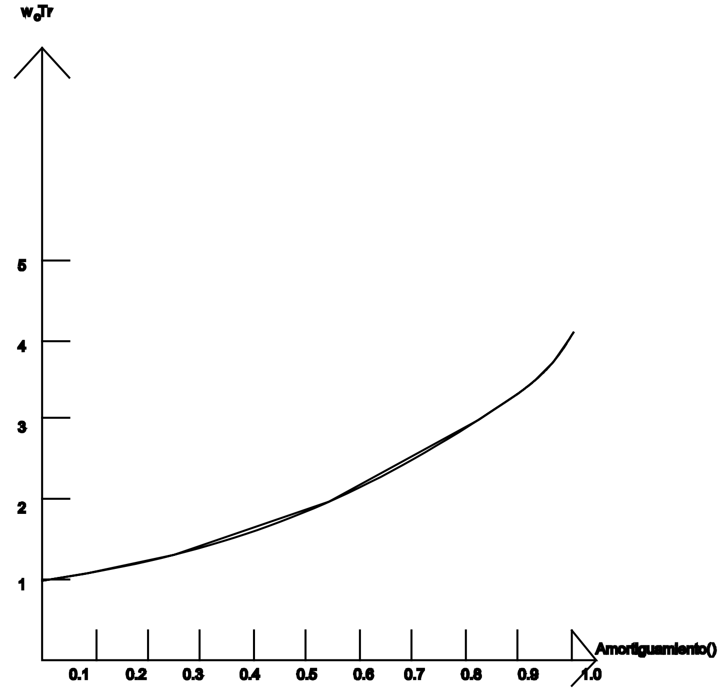


**Figura 13**

c)***Tiempo de pico $t_p$ (peak time)***

Es el tiempo requerido por la respuesta para alcanzar el primer pico o máximo del sobreimpulso o sobreelongación.

d) ***Tiempo de estabilización o de establecimiento $t_s$ (settling time)***

Es el tiempo que se requiere para que la respuesta escalón de un sistema se estabilice dentro de alguna banda específica de valores (normalmente en 5%, pero para sistemas con poco amortiguamiento se usa la banda del ±2%), respecto del valor final. Cuando se alcanza este tiempo se estima que ya ha concluido el transitorio del sistema.

La figura 14 muestra un ejemplo, para un sistema típico de segundo orden, con relación de amortiguamiento $\xi$ = 0.5 aproximadamente.

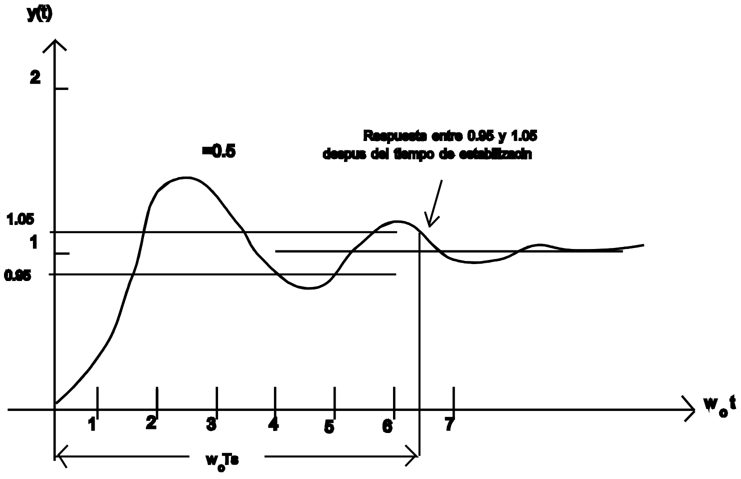


**Figura 14**

e) ***Porcentaje de sobreimpulso, sobreelongación $M_p$ (peak overshoot)***.

Representa la mayor diferencia existente entre la respuesta y su valor estacionario, en tanto por ciento.

$$\frac{\begin{pmatrix} \text{Valor m ximo alcanzado} \\ \text{en el primer sobreimpulso} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{valor de estado} \\ \text{estacionario} \end{pmatrix}}{\text{Valor de estado estacionario}} x100\%$$

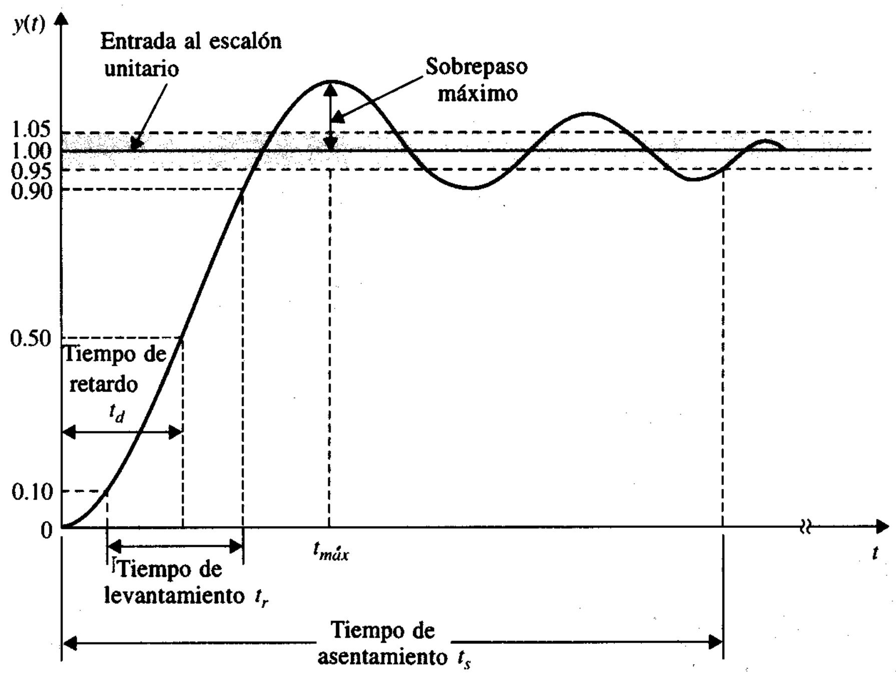


**Figura 15**

Para un sistema típico subamortiguado de segundo orden

$$T(s)=\frac{w_o^2}{s^2+2\xi\, w_o\, s+w_o^2}$$

podemos ver en la figura 16 como varía esta cantidad, en función del coeficiente de amortiguamiento.

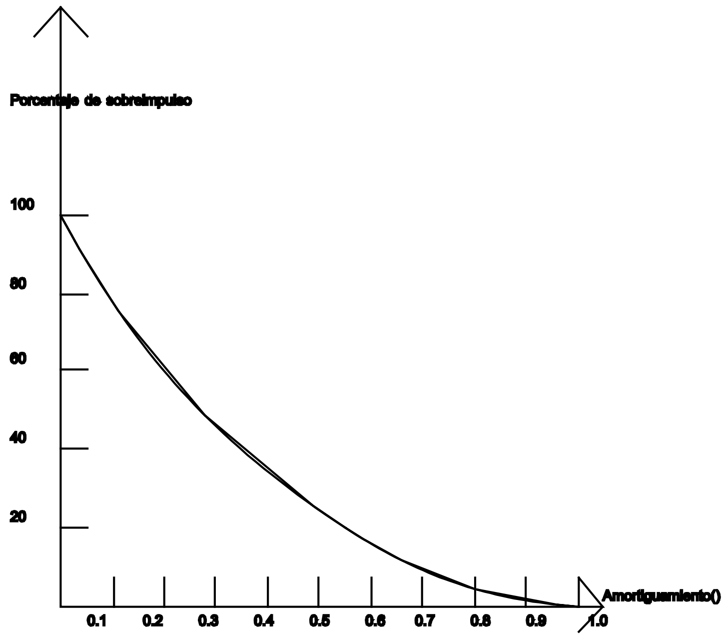


**Figura 16**

En base a la experiencia, se ha encontrado que una relación de amortiguamiento de cerca de **0.7** es satisfactoria en un amplio margen de aplicaciones (como los sistemas de posicionamiento y pilotos automáticos de aeronaves). Un valor numérico conveniente es. 2/2 = 0.707 para el cual la parte real e imaginaria del polo son iguales. La respuesta es más rápida que con amortiguamiento crítico y el sobreimpulso es aproximadamente de sólo el 5%.

Para un sistema típico subamortiguado de segundo orden, como el indicado con anterioridad, podemos indicar la forma de estos valores:

-Tiempo de crecimiento:

$$t_r=\frac{\pi-arctg\left(\dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)}{w_n\sqrt{1-\xi^2}}$$

-Tiempo de pico:

$$t_p = \frac{\pi}{w_n\sqrt{1-\xi^2}}$$

-Tiempo de estabilización:

Siendo T la constante de tiempo de las curvas amortiguadoras

$$T = \frac{1}{\xi w_n}$$

El tiempo de estabilización para un criterio del 5% queda como:

$$t_s = 3 \cdot T = \frac{3}{\xi w_n}$$

mientras que para el 2% queda:

$$t_s = 4 \cdot T = \frac{4}{\xi w_n}$$

-Sobreimpulso o sobreelongación:

$$M_p(\%) = 100 \cdot e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

## *6.-Sistemas de Orden Superior.*

La respuesta natural de los sistemas de tercero y órdenes superiores consta de una suma de términos, uno por cada raíz característica. Por cada raíz característica real diferente existe un término exponencial real en la respuesta natural del sistema. Por cada par de raíces complejas conjugadas, existe un par de términos exponenciales complejos, los cuales pueden expresarse mejor mediante el producto de una exponencial y una senoide. Las raíces repetidas proporcionan términos adicionales que contienen potencias del tiempo multiplicadas por la exponencial.

El tiempo de subida, sobreimpulso y tiempo de estabilización de la respuesta escalón son también representaciones útiles de los sistemas de orden superior. Estas cantidades, por otra parte, no son fáciles de calcular y deben ser tabuladas.

Veamos un ejemplo: Un sistema con la siguiente función de transferencia

$$T(s)=\frac{-8s^2+5}{s^4+9s^3+37s^2+81s+52}=\frac{-8s^2+5}{(s+1)(s+4)(s^2+4s+13)}$$

tiene una respuesta natural de la forma:

$$Y_{natural}(s)=\frac{K_1}{s+1}+\frac{K_2}{s+4}+\frac{K_3 s+K_4}{(s+2)^2+3^2}$$

o sea:

$$\mathbf{y_{natural}(t)= K_1e^{-t} + K_2e^{-4t} + Ae^{-2t}cos(3t+\varphi)}$$

Dada la dificultad de realizar un estudio completamente riguroso, para obtener las características de los sistemas de orden superior a dos, lo que se hace habitualmente es tratar de aplicar los resultados obtenidos para los de segundo orden a sistemas de orden superior, con el requisito de que éstos dispongan de dos polos complejos dominantes, lo que significa que si la parte real de estos polos es mucho menor que la de los otros (están mucho más próximos al eje imaginario que el resto), la respuesta del sistema puede obtenerse aproximadamente considerando únicamente la acción de los polos dominantes y despreciando los demás. Esto solamente puede hacerse si el sistema no tiene ceros (al menos próximos a los polos) ya que, como hemos indicado anteriormente, un cero próximo a un polo debilita el comportamiento de éste último.

En cualquier caso, actualmente se dispone de procedimientos analíticos directos para reducir el orden de una función de transferencia, obteniendo otra, de segundo grado, de tal forma que, por ejemplo, para un método concreto, las respuestas en frecuencia de ambas funciones sean similares. En este caso no tenemos que preocuparnos de la posible situación de los ceros que existiesen.

Veamos un ejemplo: Sea un sistema de tercer orden, cuya función de transferencia en lazo abierto es

$$G(s)=\frac{1}{s(0.5s+1)(0.2s+1)}$$

y que está realimentado de forma unitaria, con lo que la función de transferencia en lazo cerrado será

$$T(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)}=\frac{10}{s^3+7s^2+10s+10}$$

cuyas raíces son:

$$s_1 = -5.516\ ;\ \ s_2, s_3 = -0.742 \pm j\cdot 1.124$$

Las raíces dominantes son $s_2$ y $s_3$ , ya que están mucho más próximas al eje imaginario que la raíz $s_1$.

Así pues, el sistema de segundo orden aproximado será

$$T'(s) = \frac{K}{(s-s_2)\cdot(s-s_3)} = \frac{K}{s^2 + 1.484s + 1.814} = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2}$$

La ganancia K puede hacerse igual a 1.814 con objeto de que la salida siga la entrada sin ningún error estacionario, e igualando términos semejantes, llegamos a que:

$$\varpi_n = 1.347 \text{ rd/s} \ ; \ \xi = 0.551$$

El método aproximativo mencionado, puede aplicarse, llegando a un sistema cuyos valores son:

$$\varpi_n = 1.362 \text{ rd/s} \ ; \ \xi = 0.561$$

que son muy similares a los obtenidos por eliminación de los polos no dominantes.

## *7.-Efecto de añadir polos y ceros a las funciones de transferencia.*

En la práctica, el diseño exitoso de un sistema de control no puede depender solamente de la selección de valores de los parámetros del sistema, de tal forma que se coloquen apropiadamente las raíces de la ecuación característica. Puede demostrarse que, aun cuando las raíces de la ecuación característica, que son los polos de la función de transferencia en lazo cerrado, afectan la respuesta transitoria de sistemas de control lineales e invariantes con el tiempo, particularmente la estabilidad, los ceros de la la función de transferencia, si existen algunos, son también importantes.

En esta sección se mostrará cómo la adición de polos y ceros a las funciones de transferencia de lazo abierto y de lazo cerrado tiene efectos variantes en la respuesta transitoria del sistema en lazo cerrado.

a)Adición de un polo en la función de transferencia de la trayectoria directa (Sistemas con realimentación unitaria).

Para un sistema de segundo orden típico, subamortiguado, cuya función en lazo abierto sea

$$G(s) = \frac{w_n^2}{s(s + 2\xi w_n)}$$

veamos el efecto de añadir un polo en la trayectoria directa de un sistema con realimentación unitaria

$$G'(s) = \frac{w_n^2}{s(s + 2\xi w_n)(1 + T_p s)}$$

Se considera que se ha añadido el polo en s = -1/$T_p$. La función de transferencia en lazo cerrado será:

$$T(s) = \frac{G'(s)}{1+G'(s)} = \frac{w_n^2}{T_p s^3 + (1+2\xi w_n T_p)s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2}$$

La figura 17 ilustra las respuestas al escalón unitario del sistema de lazo cerrado cuando $w_n$ = 1; ξ = 1, y $T_p$ = 0, 2, y 5.

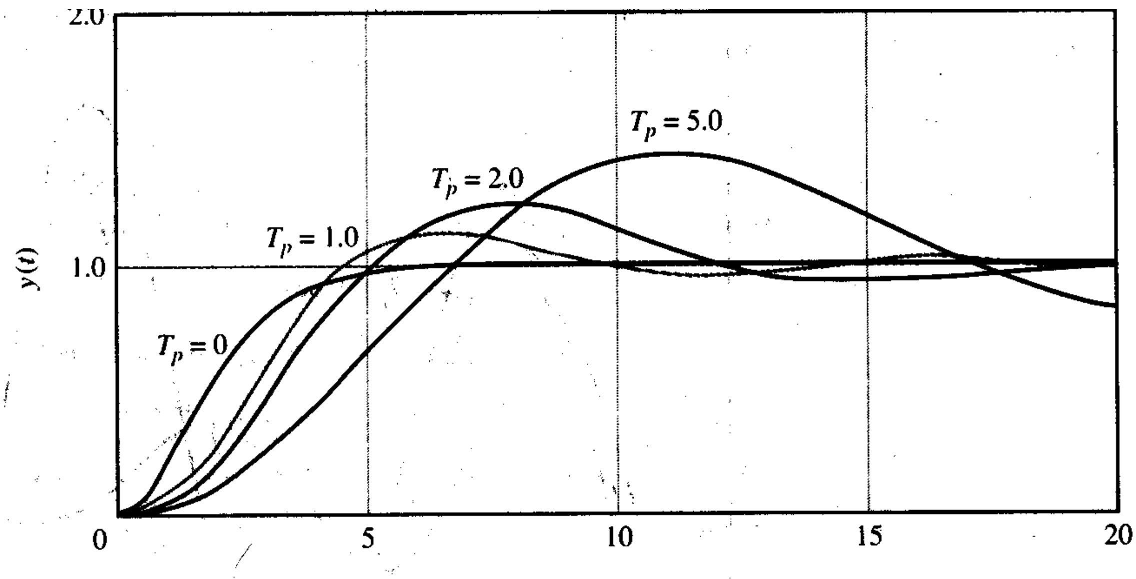


**Figura 17**

En estas respuestas se observa que:

"La adición de un polo a una función de transferencia de trayectoria directa tiene generalmente el efecto de incrementar el sobrepaso o sobreimpulso máximo del sistema en lazo cerrado".

Mientras que el valor de $T_p$ se incrementa, el polo (-1/$T_p$) se aproxima al origen en el plano s, y el sobreimpulso máximo aumenta. Estas respuestas también muestran que el polo adicional incrementa el tiempo de crecimiento de la respuesta al escalón. Esto no es sorprendente, ya que el polo adicional tiene el efecto de reducir el ancho de banda del sistema (en su momento se comprobará esta afirmación), recortando los componentes de alta frecuencia de la señal transmitida a través del sistema.

b)Adición de un polo en la función de transferencia de lazo cerrado.

Debido a que los polos de la función de transferencia de lazo cerrado son las raíces de la ecuación característica, controlan directamente la respuesta transitoria del sistema. SI consideramos la siguiente función de transferencia en lazo cerrado

$$T(s) = \frac{w_n^2}{(s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2)(1 + T_p s)}$$

en donde el término (1 + $T_p$s) se adiciona a una función de transferencia prototipo de segundo orden, la figura 18 muestra la respuesta al escalón unitario del sistema con $w_n$ = 1; ξ = 0.5, y $T_p$ = 0.05, 1, 2 y 4. Mientras que el polo en s = -1/$T_p$ se mueve hacia el origen en el plano s, el crecimiento del tiempo se incrementa y el sobreimpulso máximo decrece, por lo que podemos concluir:

"Al añadir un polo a la función de transferencia en lazo cerrado, se tiene el efecto opuesto, respecto al sobreimpulso, que el ocasionado al añadir el polo en lazo abierto".

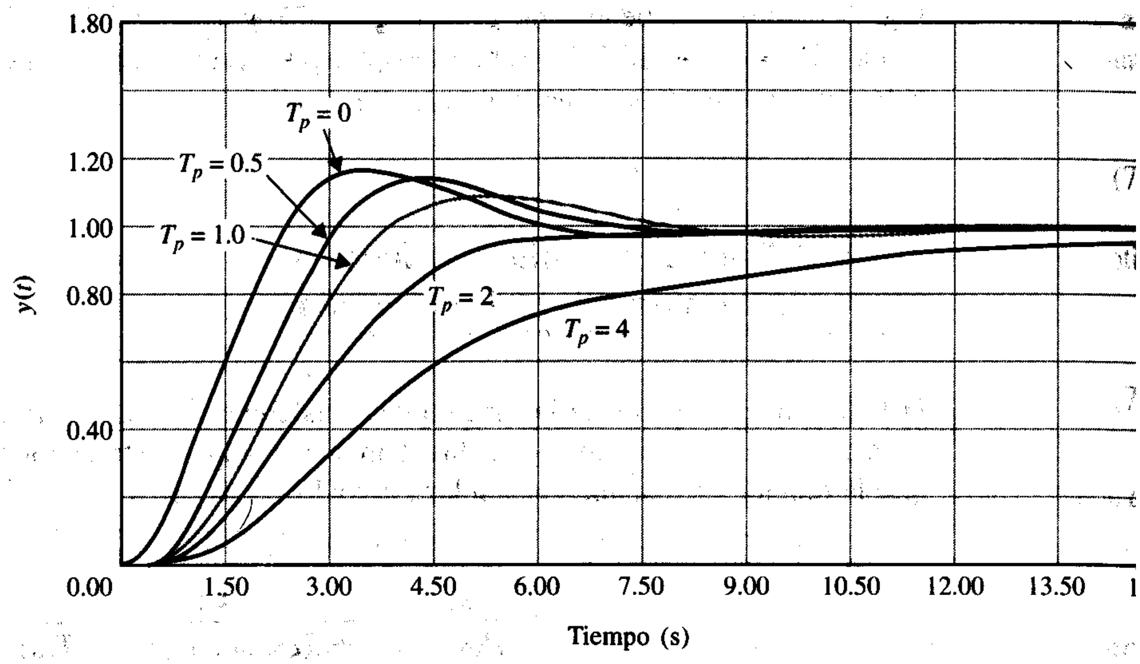


**Figura 18**

c)Adición de un cero en la función de transferencia de lazo cerrado.

La figura 19 muestra las respuestas al escalón unitario del sistema en lazo cerrado con la función de transferencia

$$T(s) = \frac{w_n^2 (1 + T_z s)}{(s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2)}$$

en donde $w_n$ = 1; ξ = 0.5; y $T_z$ = 0, 1, 3, 6, y 10. En este caso se observa que:

"El adicionar un cero en la función de transferencia en lazo cerrado disminuye el tiempo de subida e incrementa el tiempo de sobreimpulso máximo de la respuesta al escalón".

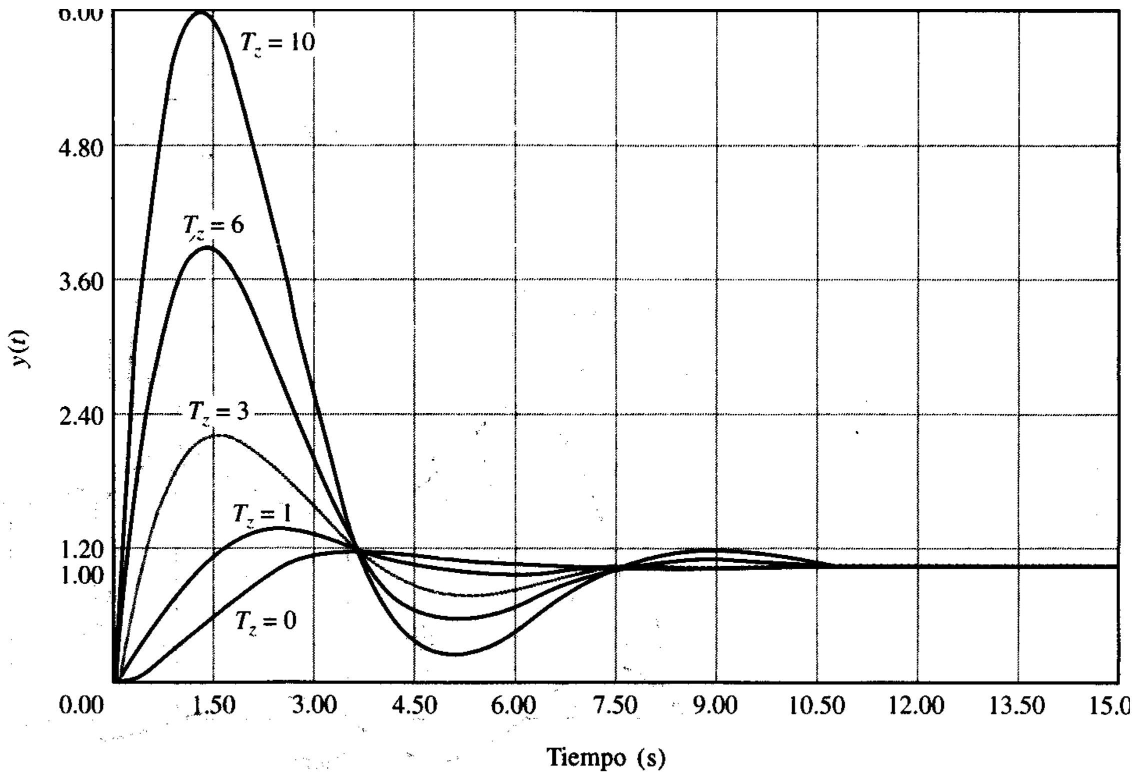


**Figura 19**

d)Adición de un cero en la función de transferencia de la trayectoria directa (Sistemas con realimentación unitaria).

Supongamos que añadimos un cero en $-1/T_Z$ a la función de transferencia de la trayectoria directa de un sistema de tercer orden, obteniendo, por ejemplo,

$$G(s) = \frac{6(1+T_z s)}{s(s+1)(s+2)}$$

La función de transferencia de lazo cerrado quedará

$$T(s) = \frac{6(1+T_z s)}{s^3 + 3s^2 + (2+6T_z)s + 6}$$

La diferencia en este caso y el anterior es que en el presente caso, no solamente al término $(1 + T_Z s)$ aparece en el numerador de T(s), sino que el denominador de T(s) contiene a $T_Z$. El término $(1+T_Z s)$ en el numerador de T(s) incrementa el sobreimpulso máximo, pero $T_Z$ en el cociente de T(s) tiene el efecto de mejorar el amortiguamiento o reducir el sobreimpulso máximo. La figura 20 ilustra las respuestas al escalón unitario cuando $T_Z$ = 0, 0.2, 0.5, 2, 5, y 10. Nótese que cuando T = 0, el sistema en lazo cerrado está al borde de convertirse en inestable. Cuando $T_Z$ = 0.2 y 0.5, los sobreimpulsos máximos se reducen, debido principalmente al amortiguamiento mejorado, mientras que cuando $T_Z$ se incrementa por encima de 2, aun cuando el amortiguamiento continúa siendo mejorado, el término (1 +$T_Z$s) en el numerador se vuelve más dominante, por lo que el sobreimpulso máximo realmente se vuelve más grande mientras $T_Z$ continúa aumentando.

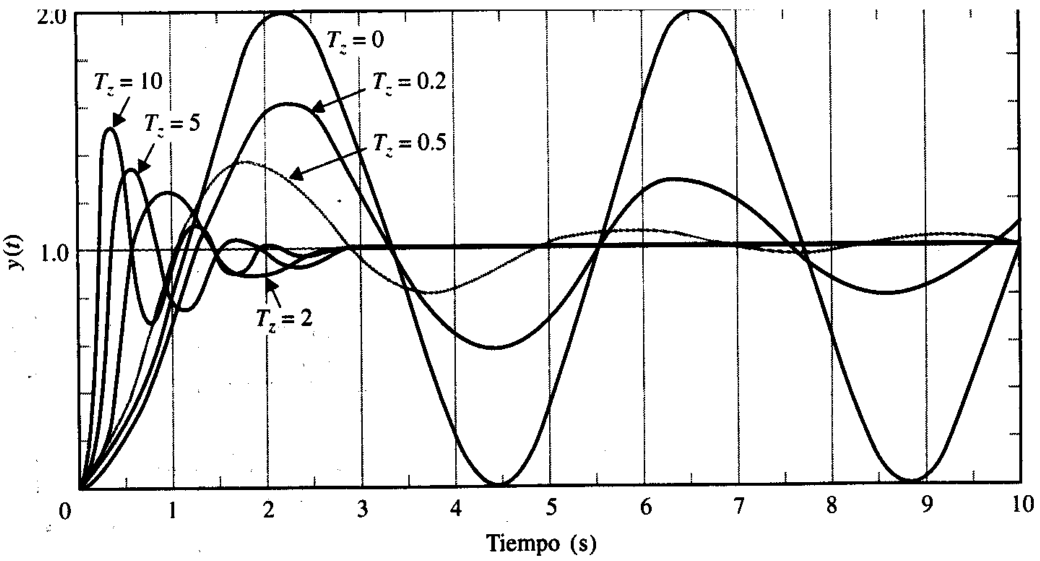


**Figura 20**

Un resultado importante en esta discusión es:

"Aun cuando las raíces de la ecuación característica se utilizan generalmente para estudiar el amortiguamiento relativo y la estabilidad relativa de sistemas de control lineales, los ceros de la función de transferencia no deben sobrepasarse en sus efectos en el desempeño transitorio del sistema".