TEMA VI

ESTABILIDAD

1.-Introducción.

De los estudios de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes sabemos que la solución homogénea que corresponde a la solución transitoria del sistema (entendida ésta como la que se anula cuando el tiempo se hace muy grande), está gobernada por las raíces de la ecuación característica. Básicamente, el diseño de sistemas de control lineal se puede enunciar como un problema que consiste en arreglar la localización de polos y ceros de la función de transferencia del sistema, para que se comporte de acuerdo con las especificaciones prescritas.

Entre las muchas formas de especificaciones de funcionamiento utilizadas en el diseño, el requerimiento más importante es que el sistema sea estable. Por lo general, un sistema inestable se considera inútil.

Para propósitos de análisis y diseño, la estabilidad se puede clasificar como ***estabilidad absoluta*** y ***estabilidad relativa***. La estabilidad absoluta se refiere a la condición de si el sistema es estable, es una respuesta de si o no. Una vez que se ha encontrado que el sistema es estable, es interesante determinar qué tan estable es, y este grado de estabilidad es una medida de la estabilidad relativa.

Cuando se consideran todos los tipos de sistemas (lineal, no lineal, invariante con el tiempo y variante con el tiempo), la definición de estabilidad se puede dar en muchas formas diferentes.

La estabilidad de un sistema lineal, invariante con el tiempo, queda asegurada si todas las raíces del polinomio característico del sistema se encuentran en el semiplano izquierdo (SPI) del plano complejo, por lo que, "a priori", el problema del estudio de la estabilidad de este tipo de sistemas parece resuelto; lo que, sin duda, sería así, si supiésemos resolver analíticamente ecuaciones polinómicas de cualquier grado n. Desgraciadamente, el famoso matemático noruego Abel demostró que no existe fórmula de resolución genérica para ecuaciones polinómicas de grado superior a cuatro. Esto condena a resolución numérica (aproximada) para ecuaciones características de grado mayor que cuatro, lo que no es un grave inconveniente ante las actuales posibilidades de factorización que cualquier software matematico puede realizar. El problema se encuentra cuando uno de los coeficientes del polinomio característico viene dado en función de un parámetro ajustable: ahí naufragan todos los procedimientos numéricos. Por suerte, existen otros métodos que nos permiten estudiar la estabilidad de los sistemas, sin necesidad de calcular exactamente la situación de las raíces: métodos gráficos como el criterio de Nyquist, de Bode y, el más iportante, sin duda, por ser analítico, el criterio de Routh-Hurwitz, que es al que nos dedicaremos en este capítulo.

2.-Conceptos de Estabilidad.

De todo lo anterior, se observa que, para sistemas lineales e invariantes con el tiempo, para que el sistema sea considerado estable (en todos los sentidos), todas las raíces de la ecuación característica deben localizarse en el SPI del plano s. Por esta razón, simplemente la condición de estabilidad de un sistema lineal se refiere como ***estable*** o ***inestable***. Esta última condición se refiere a que, por lo menos una de las raíces de la ecuación característica no está en el SPI del plano s. Por razones prácticas, a menudo se hace referencia a la situación en que dicha ecuación tiene raíces simples sobre el eje imaginario, y ninguna en el semiplano derecho (SPD) como ***marginalmente estable***. Una excepción a esto es si en el sistema se coloca un integrador, o en el caso de sistemas de control, un sistema de control de velocidad. En este caso el sistema tendría una (o varias) raíz en s=0 y sería considerado como estable. De forma similar, si el sistema está diseñado para ser un oscilador, la ecuación característica tendría raíces simples sobre el eje imaginario y también sería visto como estable.

En general, la estabilidad de un sistema puede definirse de muchas formas diferentes, dependiendo de los requerimientos de alguna aplicación especial. Para los sistemas lineales, invariantes en el tiempo, todas las definiciones comunes de estabilidad son equivalentes; cada una implica a las otras, y cada una es consistente sí y sólo sí todas las raíces características del sistema pertenecen al SPI del plano complejo. Las definiciones más comunes de la estabilidad son las siguientes:

ESTABILIDAD ASINTÓTICA:

"Un sistema es asintóticamente estable si para todas las condiciones iniciales posibles su respuesta de entrada cero se aproxima a cero con el tiempo". En un sistema lineal, invariante con el tiempo, con una función de transferencia racional T(s), existe un término de respuesta de entrada cero por cada raíz del denominador de T(s). Un término crece o decrece con el tiempo dependiendo de que la raíz esté situada en el SPD o en el SPI. De aquí que tal sistema sea asintóticamente estable sí y sólo sí todas las raíces características del denominador de T(s) pertenecen al SPI.

ESTABILIDAD EN RESPUESTA IMPULSIONAL:

"Se dice que un sistema es estable en el sentido de la respuesta impulsional si su respuesta a una entrada impulso se aproxima a cero con el tiempo". Para ver que coincide con la anterior, basta recordar que para un sistema lineal e invariante en el tiempo, la respuesta del sistema al impulso coincide con la función de transferencia, por lo que es T(s) la que debe tener todos los polos en el SPI, al igual que en el caso anterior.

ESTABILIDAD PARA ENTRADA LIMITADA, SALIDA LIMITADA (***BIBO***: Bounded Input Bounded Output):

"Un sistema BIBO es estable si para cada entrada limitada su salida es limitada". Utilizando la relación de convolución de la Transformada de Laplace puede llegarse a las mismas conclusiones que en los dos casos anteriores.

ESTABILIDAD EN EL SENTIDO DE LIAPUNOV:

"Los sistemas físicos, en particular aquellos que son variables en el tiempo y no lineales, se pueden considerar que son estables si se cumple en ellos el principio de conservación de la energía". Para que su respuesta aumente se requiere un suministro continuo de energía. Al considerar las ecuaciones de un sistema, cualquiera que sea su origen, para representar un sistema físico, se puede probar la estabilidad según que el sistema físico equivalente sea o no conservativo.

En cualquier caso, nosotros solamente estudiaremos sistemas lineales invariantes con el tiempo, por lo que el problema de la estabilidad de un sistema se resume a demostrar que todas las raíces de su polinomio característico se encuentran en el SPI, usando para ello cualquier método que tengamos a nuestro alcance.

3.-Método de los coeficientes.

Cuando disponemos de un polinomio de primer o segundo grado (incluso tercero o cuarto), no existe ningún problema en conocer no solamente la situación de las raíces de dicho polinomio (esto es, si están en el SPD, en el SPI o sobre el Eje Imaginario del plano complejo –EI-), sino su localización exacta por cualquiera de los métodos de resolución hartamente conocidos.

Como ya hemos indicado, nuestro problema empieza cuando el polinomio es de grado igual o superior a cinco.

Dado que por regla general no necesitamos de tanta exactitud, sino solamente de situar a la izquierda, derecha o sobre el eje imaginario, la posición de las raíces de un polinomio (por cuestión de estabilidad), vamos a realizar a continuación algunas observaciones a este respecto.

En primer lugar, podemos ver que un polinomio de variable compleja **s**, cuyas raíces estuviesen todas situadas en el SPI, correspondería a un producto de términos de la forma **(s+a)**, siendo **a** un número cuya parte real es positiva. Es obvio que, en este caso, dicho polinomio debe tener:

-como primer requisito, todos sus coeficientes no nulos.

-como segundo requisito, todos sus coeficientes del mismo signo (bien positivos, bien negativos).

En segundo lugar, si se tuviesen raíces sobre el eje imaginario (y ninguna en el SPD), tendríamos factores de la forma **s** o bien $\mathbf{(s^2+a)}$, con lo cual, podría faltar algún coeficiente, pero todos seguirían teniendo el mismo signo.

Por último, si el polinomio tuviese alguna raíz en el SPD, esto daría lugar a factores de la forma **(s-a)**, con lo cual podría aparecer ("podría", no necesariamente "debería") algún coeficiente de distinto signo a los demás, e incluso (por cancelaciones), desaparecer algún coeficiente o ninguno.

Resumiendo:

-Si un polinomio presenta cambios de signo entre sus coeficientes, podemos aducir instantáneamente que dispone de (al menos) una raíz en el SPD.

-Si el polinomio presenta todos sus coeficientes del mismo signo, pero le faltan algunos coeficientes, deduciremos que existen raíces bien sobre el EI, bien en el SPD (aparte de las que puedan existir en el SPI).

-Si el polinomio posee todos sus coeficientes, y todos ellos presentan el mismo signo, nada podremos decir sobre la posición de sus raíces, y será, en este caso, necesario recurrir a algún método de mayor potencia que nos permita escrutar algo al respecto (condiciones de Cardano-Vietta).

En la actualidad, se dispone de varios métodos para poder conocer la situación (respecto del eje imaginario) de las raíces de un polinomio, de los cuales, el más conocido es el Método de Routh-Hurwitz.

4.-Criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz

Estrictamente hablando, el criterio de Hurwuitz es un procedimiento equivalente al arreglo de Routh (que es el que nosotros veremos, por su mayor simplicidad), que comprende determinantes o desarrollo de fracciones. En cualquier caso, ambos métodos son equivalentes y se suele utilizar el término "***prueba de Routh-Hurwitz***" como un reconocimiento a las contribuciones independientes de ambos investigadores.

Dado, como ya sabemos, que en Automática, la mayoría de las veces, solamente se necesita conocer en qué semiplano se encuentran las raíces de un polinomio, sin importar su localización exacta, este método es de alta importancia dentro de este campo, ya que el método es totalmente fiable y no permite ninguna indeterminación.

No vamos a entrar aquí en la demostración matemática que lo avala (una sencilla está basada en el llamado "*índice de Cauchy*" conjuntamente con las "*sucesiones de Sturn*"), sino simplemente a explicar su funcionamiento y, posteriormente, algunas ampliaciones útiles.

Este método, solo proporciona el número de raíces que un polinomio dispone en el SPD y sobre el EI, pero dado que solo se consideran polinomios con coeficientes reales, y por la existencia del "Teorema Fundamental del Algebra", automáticamente se deducen cuantas existen en el SPI.

Es un procedimiento potente, aunque no tanto como el de factorización, pero sí más simple que éste y, nos atrevemos a decir, que más fácilmente implementable de forma informática.

La forma de proceder es la siguiente:

Dado un polinomio genérico $c_n s^n + c_{n-1} s^{n-1} + c_{n-2} s^{n-2} + ... + c_1 s + c_0$ donde todos los coeficientes están presentes (si no lo están, en su lugar correspondiente se pondrá un 0), se separa en dos filas, de manera que los coeficientes queden salteados entre una y otra:

s^n	c_n	c_{n-2}	c_{n-4}	...
s^{n-1}	c_{n-1}	c_{n-3}	c_{n-5}	...
s^{n-2}	a_1	a_2	a_3	...
s^{n-3}	b_1	b_2	...	
...	...	...		
s^0	...			

Y nuestro cometido será completar las filas restantes de la siguiente manera:

$$a_1 = -\frac{\begin{vmatrix} c_n & c_{n-2} \\ c_{n-1} & c_{n-3} \end{vmatrix}}{c_{n-1}} \qquad a_2 = -\frac{\begin{vmatrix} c_n & c_{n-4} \\ c_{n-1} & c_{n-5} \end{vmatrix}}{c_{n-1}}$$

donde se va "corriendo" de columna, hasta obtener ceros.

La cuarta fila se obtiene de forma parecida a la tercera, pero utilizando las dos filas anteriores:

$$b_1 = -\frac{\begin{vmatrix} c_{n-1} & c_{n-3} \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}}{a_1} \qquad b_2 = -\frac{\begin{vmatrix} c_{n-1} & c_{n-5} \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}}{a_1}$$

El proceso se sigue indefinidamente hasta llegar a la fila correspondiente a s^0.

Puede observarse que cada fila posterior, presenta igual o un término menos distinto de cero, con lo cual, si no han surgido imprevistos, al llegar a la última fila, solamente se tendrá que el primer elemento es distinto de cero, dando en este momento por finalizada la operación (posteriormente se discutirán posibles problemas que puedan ya entreverse).

Veamos como ejemplo el siguiente polinomio:

$$2s^5+s^4+2s^3+4s^2+s+6$$

s^5	2	2	1
s^4	1	4	6
s^3	**-6**	**-11**	0
s^2	**13/6**	**6**	0
s^1	**73/13**	0	
s^0	**6**	0	

Vemos que no hay ningún problema para encontrar todos los coeficientes que nos faltaban, podemos decir, a la vista de dicha tabla, que el polinomio en cuestión tiene **dos** raíces en el SPD. ¿Porqué?. Aquí está la regla: "Existen tantas raíces en el SPD como cambios de signo se observen en la primera columna del desarrollo".

Como vemos en nuestro ejemplo, hay dos cambios de signo: de 1 a -6 y de -6 a 13/6 , de lo cual deducimos que dicho polinomio solamente tiene dos raíces en el semiplano derecho.

El método, en sí, es bastante fácil, como puede verse, pero hay algunas objeciones que veremos a continuación.

4.1.-Casos especiales.

i)Qué ocurre si en los cálculos, nos aparece un 0 en la primera columna?.

En este caso se presenta un grave inconveniente por dos causas; la primera (y más importante) es que no podremos calcular los coeficientes de la siguiente fila, ya que habrá que dividir por 0. Pero, en segundo lugar, suponiendo que fuese posible obtener los restantes coeficientes, ¿es posible considerar que hay un cambio de signo cuando un número se compara con el 0?.

El problema es importante, pero con una solución rápida: el hecho de que aparezca un cero en la primera columna (siendo el resto de la fila no nulo), se debe, por así decirlo, al azar. Existe un método, no exento de riesgo y complejidad basado en suponer que ese 0 no es tal sino un ε muy pequeño, y del que puede obtenerse el signo.

Este es el método más potente (y más complejo), y hay que tener cuidado ya que los resultados deben coincidir tanto para valores positivos de ese ε, como negativos (calculando límites). En caso de que esto no ocurra, ello indicará que se tienen raíces sobre el eje imaginario (esta "trampa" del ε, supone una traslación del eje en una cantidad mínima ε, que no debería influir en el resultado, excepción, claro está, de que se tenga alguna raíz situada justamente sobre el eje imaginario). En cualquier caso, interpretando las variaciones existentes se podrá encontrar la solución correcta.

Una segunda opción se basa en la teoría de las llamadas transformaciones conformes, como lo es el cambio de variable $\sigma = 1/s$.

Puede demostrarse que tras aplicar esta transformación, el nuevo polinomio numerador (obtenido multiplicando todo el anterior por la mayor potencia de σ) no solamente mantiene el mismo número de raíces en cada semiplano, sino que cada raíz anterior tiene ahora una homónima reflejada sobre la circunferencia unidad, de forma que el producto de ambas es la unidad (aunque este hecho apenas nos interesa).

A efectos prácticos, esta transformación nos indica que el polinomio original, y el obtenido alterando la secuencia general, tienen el mismo número de raices en cada semiplano (por ejemplo, los polinomios $s^3 + 2s^2 + 3s + 4$ y su transformado $4s^3 + 3s^2 + 2s + 1$ tienen la misma cantidad de raíces en cada semiplano).

Así pues, si al probar esta solución desaparece el problema, ya habremos terminado (obviamente, esto no funcionará con polinomios "capicúas").

Hay otra clara opción que elimina errores y se presta mucho mejor a ser informatizada, que es el introducir una raíz conocida en el polinomio, es decir, elegimos un factor del tipo **s+a** (siendo, por supuesto ese **a**, totalmente arbitrario, pero conocido) y multiplicamos a dicho polinomio por éste. Con ello, es más que probable que nuestro problema (el del 0 en la primera columna) desaparezca. Procedemos de forma idéntica y al final, solo hemos de tener en cuenta que nosotros conocemos de antemano la solución artificial introducida, con lo cual solamente hemos de eliminarla del resultado obtenido.

Veamos el siguiente ejemplo:

Sea el polinomio: $s^5+s^4+3s^3+2s^2+4s+2$

cuyo arrego de Routh sería

s^5	1	3	4
s^4	1	2	2
s^3	**1**	**2**	
s^2	**0**	**2**	
s^1	**?**		
s^0			

Vemos que aparece un cero en la columna izquierda, lo que nos hace detener el proceso. Sin embargo, si multiplicamos el polinomio original por (s+1) (con lo cual estamos introduciendo una raíz "artificial" en el semiplano izquierdo), obtenemos el polinomio: $s^6+2s^5+4s^4+5s^3+6s^2+6s+2$
el cual, posee la siguiente resolución:

s^6	1	4	6	2
s^5	2	5	6	
s^4	**3/2**	**3**	**2**	
s^3	**1**	**10/3**		
s^2	**-2**	**2**		
s^1	**13/3**			
s^0	**2**			

Vemos, que la dificultad ha desaparecido, y que este nuevo polinomio tiene **dos** raíces en el SPD. Como al polinomio inicial se le ha introducido una raíz en el SPI, esto quiere decir que nuestro polinomio inicial, también posee solamente **dos** raíces en el SPD.

En el caso improbable de que siguiese saliendo ese primer coeficiente nulo (y repetimos, el resto de la fila con algún coeficiente no nulo), este procedimiento no es aplicable, ya que no depende del valor de la raíz elegida para introducir. Lo que sí puede ocurrir es que se tengan varios ceros seguidos en la fila problemática (sin ser toda nula) y al realizar este proceso, se elimine el último de ellos, en este caso, habría que repetir el proceso, o multiplicar ya directamente por $(s+a)^r$, siendo r el número de primeros ceros que se presentan.

Hora es ya, antes de pasar al segundo problema, de observar algunas "casualidades" que algún lector meticuloso habrá, sin duda, observado: La primera, y que salta a la vista, es que el término independiente del polinomio siempre se repite cada dos filas. Esto es un hecho que siempre ocurre, y que puede servirnos de guía para comprobar algún posible error en los cálculos.

El segundo es menos obvio, pero no por ello menos importante: dado que todos los coeficientes se obtienen a partir de determinantes, y recordando algunas de sus propiedades, puede concluirse (no lo demostraremos aquí), que el resultado es independiente de que, en algún momento (y por conveniencia), una fila completa se multiplique por cualquier número **positivo** (lo que es bastante cómodo a la hora de trabajar con números fraccionarios).

Pasemos, sin más dilación al segundo y más interesante de los problemas:

ii)¿Qué ocurre si el proceso termina prematuramente (es decir, si se obtiene toda una fila de ceros antes de llegar al final)?

En este caso no nos vale el "truco" anterior, pues seguiría apareciéndonos antes o después dicha fila molesta. Para esta situación vamos a dar antes la solución, que la causa: para estos casos, basta sustituir dicha fila todo nula por la que se obtendría al derivar el polinomio correspondiente a la fila anterior y continuar el proceso.

De nuevo, un ejemplo vale más que mil palabras: Sea el polinomio $s^5+3s^4+4s^3+7s^2+4s+2$

s^5	1	4	4
s^4	3	7	2
s^3	**5/3**	**10/3**	**(Multiplicar por 3)**
s^2	**1**	**2**	
s^1	**0**	**0**	**¿?**
s^0			

Vemos que la terminación es prematura. La forma de arreglarlo es sustituir la fila de s^1 por la derivada de la fila anterior, o sea, por la derivada de $1s^2+2$, que es $2s+0$:

s^5	1	4	4
s^4	3	7	2
s^3	**5/3**	**10/3**	**(Multiplicar por 3)**
s^2	**1**	**2**	
s^1	**2**	**0**	
s^0	**2**		

No hay ahora ningún problema para observar que el polinomio en cuestión no posee ninguna raíz en el SPD.

¿Cual es la causa de este "curioso" efecto?. Uno muy claro y conciso: cuando en el desarrollo aparece una fila prematura de ceros, ello indica que el polinomio original es divisible por un polinomio par o impar, cuyos coeficientes se obtienen de la fila inmediatamente anterior a la totalmente nula (en nuestro ejemplo s^2+2 , puede verse que divide de forma exacta al polinomio original, el cociente sería el polinomio s^3+3s^2+2s+1).

Es a estos polinomios (pares o impares) a los que vamos a dedicar unos comentarios en este momento:

En primer lugar, un polinomio impar siempre debe tener como factor a **s**, y al dividirlo por **s** se transforma en uno par, con lo cual solo vamos a referirnos a estos últimos.

Es de sobra conocido en álgebra, que un polinomio par (aquel que da el mismo valor para s que para -s) es siempre simétrico respecto del eje imaginario (recuérdese que hablamos siempre de polinomios con coeficientes reales), o sea, que si dispone de una raíz en el semiplano derecho, poseerá otra colocada de forma simétrica respecto del eje vertical, en el semiplano izquierdo y viceversa. Dicho en términos que nos interesan, si un polinomio par de, por ejemplo, sexto grado, presenta dos raíces en el SPD, podemos afirmar que poseerá otras dos, y sólo dos (simétricas) en el SPI y, por el Teorema Fundamental del Algebra, las dos raíces restantes (siempre es el orden del polinomio), deberán estar situadas sobre el eje imaginario.

Podemos ir todavía más lejos, para ello vamos a refrescar algunos conceptos: un polinomio de coeficientes reales, si posee raíces complejas, éstas siempre aparecen con su complejo conjugado, formando siempre factores de la forma **(s^2+a)** si están sobre el eje imaginario (o **s** sobre el origen). ¿Qué podemos deducir de aquí?: que cualquier polinomio que posea raíces sobre el eje imaginario, deberá presentar en el desarrollo de Routh-Hurwitz una fila prematura de ceros. En otro caso, las raíces no estarán sobre el eje imaginario (salvo la raíz 0, que es fácilmente detectable por el factor **s**).

Así mismo, siguiendo este método (subsanando la posibilidad de aparición de algún 0 en la primera columna, siendo el resto de la fila no totalmente nula), el número de cambios de signos en esa primera columna, nos dará el número de raíces existentes en el SPD del plano complejo. Si no hay terminación prematura, el resto de raíces (hasta completar el orden del polinomio) se encontrarán en el SPI.

Si apareciese una fila de ceros, se procedería de la forma adecuada, sabiendo que, a partir de ese momento, estamos tratando con un polinomio par o impar (depende de la paridad del grado de la fila donde se produce), y que, por tanto, a partir de ahí, todas las raíces que se tengan en el SPD tendrá su análoga en el SPI, y el resto (si las hay), hasta completar el grado de este polinomio divisor, estarán situadas sobre el EI (que, dicho sea de paso, siempre serán pares, si descontamos las que se encuentren sobre el origen que, por otra parte, siempre pueden eliminarse antes de iniciar el proceso).

Nada mejor para aclarar ideas que un último ejemplo que tome en cuenta esta consideración. Sea el polinomio siguiente:

$$s^7-3s^6-12s^5+4s^4+23s^3+27s^2+36s+20$$

s^7	1	12	23	36
s^6	-3	4	27	20
s^5	**-32/3**	**32**	**128/3**	
s^4	**-5**	**15**	**20**	
s^3	**0**	**0**	**¿?**	
s^2				
s^1				
s^0				

Vemos que el polinomio inicial es divisible por el polinomio par siguiente: $-5s^4+15s^2+20$, y que, hasta ese momento, solamente se observó un cambio de signo, con lo cual, hasta ahí, el polinomio total disponía de **una** raíz en el SPD y las otras **dos** (el resto de la división es de grado 7-4=3) , por tanto, estarán en el SPI.

Procedemos a continuación poniendo en la fila nula (la de s^3) los coeficientes de la derivada de dicho polinomio: $-20s^3+30s$:

s^7	1	12	23	36
s^6	-3	4	27	20
s^5	**-32/3**	**32**	**128/3**	
s^4	**-5**	**15**	**20**	
s^3	**-20**	**30**	**----------**	
s^2	**15/2**	**20**		
s^1	**25/3**			
s^0	**20**			

Vemos que, en esta segunda parte, se observa un solo cambio de signo, con lo cual solamente hay **una** raíz más en el SPD; por tratarse de un polinomio par, también se tendrá **una** sola raíz más en el SPI, y las otras **dos** (recuérdese que este polinomio divisor es de grado cuarto) estarán sobre el EI.

Resumiendo, el polinomio original dispone de **3** raíces en el SPI, **2** raíces en el SPD y **2** sobre el EI. (puede verse que son -2, -1 (doble), +2, +5, +j y -j).

4.2.-Traslación de ejes

A partir de este momento, ya disponemos de un potente método que es capaz de situar en el plano complejo las raíces de un polinomio de cualquier orden de coeficientes reales. Aparte de esta útil consecuencia, ¿qué más podemos obtener?.

En primer lugar otra cosa muy importante en Control, como es comprobar si un sistema tiene un mínimo de "**estabilidad relativa**", es decir, si, una vez que sabemos es estable, saber si la primera de las raíces más próxima al EI, se encuentra a más distancia de on valor dado o no. Para ello solamente bastaría con provocar un desplazamiento hacia la izquierda del EI, con un simple cambio de variable, y estudiar de nuevo.

¿Algo más?. A esta pregunta podemos responder categóricamente: !La posición de la parte real de las raíces de cualquier polinomio con el grado de exactitud que deseemos! (que no es poco).¿Cómo?: Muy simple, mediante un proceso iterativo de traslación de **ejes** y análisis de resultados. Veamos esto de forma más detenida:

Sea el polinomio: $s^3+13s^2+55s+75$

Un análisis preliminar mediante el método de Routh nos dice:

s^3	1	55
s^2	13	75
s^1	**710/13**	
s^0	**75**	

Vemos que no tiene ninguna raíz en el SPD, las tres raíces están en el SPI, pero no se puede afinar algo más?. En efecto, supongamos que se hace el cambio de ejes (traslación del eje imaginario hacia la izquierda): $\sigma = (s+2)$

Con ello, nuestro polinomio queda de la forma:

$$(\sigma-2)^3+13(\sigma-2)^2+55(\sigma-2)+75 = \sigma^3+7\sigma^2+15\sigma+9$$

Si aplicamos de nuevo la prueba a este polinomio:

σ^3	1	15
σ^2	7	9
σ^1	**96/7**	
σ^0	**9**	

Podemos ver que este polinomio sigue sin tener raíces en el SPD, de los cual podemos deducir que nuestro polinomio original posee todas sus raíces en el SPI, pero además, situadas más a la izquierda de la vertical s=-2.

Vamos a afinar un poco más: hagamos ahora el cambio siguiente $\sigma=(s+4)$ (esto es, corremos el EI cuatro unidades a la izquierda) , con lo cual nos queda:

$$(\sigma-4)^3+13(\sigma-4)^2+55(\sigma-4)+75 = \sigma^3+\sigma^2-\sigma-1$$

del cual podemos ya deducir que tiene, al menos una raíz en el SPD (signos cambiantes y coeficientes no nulos), pero vamos a realizar la prueba (para saber cuantas raíces han cambiado de semiplano):

σ^3	1	-1	
σ^2	1	-1	
σ^1	**0**	**0**	**Terminación prematura**
σ^0			

Hay que aplicar la regla conocida, y sustituir la fila σ^1 por la derivada de σ^2-1 (polinomio par de grado 2): $2\sigma+0$

σ^3	1	-1
σ^2	1	-1
σ^1	**2**	**0**
σ^0	**-1**	

Vemos que hay un cambio de signo, con lo cual se tiene una raíz en el SPD, y al ser polinomio par, tendrá la otra situada de forma simétrica al EI, o sea, en el SPI. Resumiendo, este polinomio tiene una raíz en el SPD y dos en el SPI. De aquí podemos deducir que nuestro polinomio original tiene una raíz situada en el intervalo (-4,-2) (su parte real) y las otras dos raíces están a la izquierda de la vertical s=-4.

A continuación podríamos intentar estrechar más aún el intervalo de la primera raíz hacia la izquierda, haciendo el cambio σ=s+3 (en este caso saldría una solución sobre el eje imaginario, con lo cual ya sabríamos que una de las raíces está en **s=-3** .Al ser solo una, debe estar sobre el eje real, ya que si no aparecerían dos, debido al conjugado). Si ahora se obtuviese que hay una raíz en el SPD ello indicaría que nuestra raíz está entre -3 y -2. Si se obtiene que no hay en el SPD ni sobre el EI, estará entre -3 y -4 .

Repitiendo este proceso de forma iterativa, hasta limitar la franja a un espesor igual a la precisión deseada, no hay ningún problema en obtener la situación de la parte real, no solo de una, sino de todas las raíces, con el grado de precisión deseado.

4.3.-Parámetros ajustables

En algunos casos, alguno de los coeficientes del polinomio a estudiar puede ser ajustable, y la cuestión se ciñe a estudiar el conjunto de valores de dicho parámetro que hacen que todas las soluciones del mismo estén en un determinado semiplano.

En estos casos, el proceso es el mismo, solamente que se complica el tratamiento, al tener que manejar variables. Para ver con mayor claridad lo expuesto, nada mejor que un ejemplo ilustrativo:

Dado el polinomio $P(s) = s^4 + (k+5)s^3 + 35s^2 + 10ks + 24$, encontrar para qué valores de k todas las raíces están en el SPI.

s^4	1	35	24
s^3	k+5	10k	
s^2	$\frac{25k+175}{k+5}$	**24**	
s^1	$\frac{226\,k^2+1510k-600}{25k+175}$		
s^0	**24**		

Para que todas las raíces se encuentren en el SPI, no deberemos tener ningún cambio de signo en la primera columna, por lo que (como el primer número es positivo) todos los coeficientes de la primera columna deben ser mayores que cero. Para ello se deberán cumplir todas las siguientes condiciones **simultáneamente**:

i) $K + 5 > 0$
ii) $25k + 175 > 0$
iii) $226k^2 + 1510k - 600 > 0$

-De la primera se obtiene que $K > -5$
-De la segunda vemos que $K > -7$ (que ya lo incluye la primera).
-La tercera inecuación es algo más compleja al ser una ecuación de 2º grado, pero fácilmente resoluble por cualquiera de los métodos aplicados en ese terreno. Baste ver que esa función es una parábola sin invertir (dado que el coeficiente de k^2 es positivo), que corta al eje de abcisas en los puntos k=0,376 y k=-7,058. Así pues (a la vista de su gráfica correspondiente), la última condición nos obliga a que k<-7,058 o bien k>0,376.

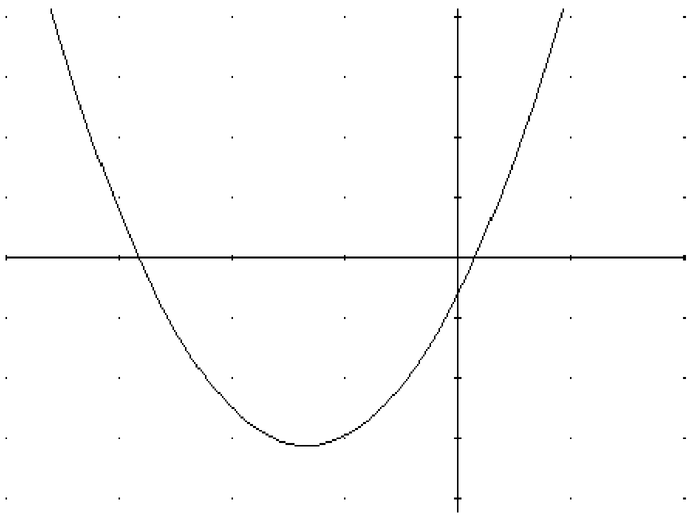

Figura 1

Reuniendo todas las condiciones vemos que el único intervalo aplicable es el de

K > 0,376

Para el resto de valores de K, tendremos alguna raíz fuera del SPI (sería interesante estudiar los casos límites de K).

Esta aplicación, que parece obvia, es la que realmente da importancia al método de Rout-Hurwitz, ya que, como dijimos al principio, todos los métodos numéricos, quedan anulados cuando aparece un parámetro k (que a todos los efectos es una variable), ya que no podemos realizar cálculos numéricos con variables no determinadas. Aquí la única solución es trabajar en modo simbólico para el parámetro k.