

TEMA IX

LA TÉCNICA DEL LUGAR DE LAS RAÍCES

- 1.-Introducción.
- 2.-Reglas para el trazado del Lugar de las Raíces estándar.
- 3.-Lugar de las Raíces de sistemas continuos típicos.
- 4.-Lugares geométricos de las Raíces de otros sistemas.
- 5.-Variación de parámetros negativos.

1.-Introducción.

Dado un sistema en lazo cerrado, sus polos determinan las características básicas de su respuesta transitoria. Habitualmente, lo que se desea es poder ajustar los polos y ceros del sistema en lazo abierto, para situar los del lazo cerrado en la posición más interesante para nuestros propósitos.

Los polos de lazo cerrado son las raíces de la ecuación característica. Es necesario descomponer en factores el polinomio característico para hallarlos, lo que suele ser bastante laborioso para grados superiores a tres. Se podrían descomponer mediante técnicas clásicas, pero si se dispone de un parámetro ajustable, se debería repetir el proceso para cada posible valor del parámetro (k).

El método del Lugar geométrico de las Raíces (“root-locus method”) fue desarrollado por W.R.Evans en un artículo titulado “Graphical Analysis of Control Systems” en la revista Transaction del AIEE en 1.948. La importancia de este método reside en el hecho de que se puede observar muy fácilmente cómo varía la situación de polos y ceros de un sistema en lazo cerrado cuando variamos un parámetro ajustable (normalmente la ganancia, aunque no necesariamente).

El Lugar de las Raíces constituye una potente herramienta, ya que proporciona información gráfica de un sistema, visualizando los efectos que produce sobre el mismo la variación de algún parámetro. Igualmente, proporciona una medida de la sensibilidad de las raíces a la variación del parámetro utilizado.

Su simplicidad le confiere un amplio grado de utilización así como facilidad de implementación en ordenadores.

2.-Reglas para el trazado del Lugar de las Raíces estandar.

Siguiendo nuestra norma habitual, solamente indicaremos las reglas para la construcción del Lugar de las Raíces, sin demostrarlas (aunque todas ellas pueden obtenerse de forma rápida y sencilla).

Vamos a partir de que tenemos una planta a controlar $G(s)$, y un bucle realimentado negativamente con una función de transferencia $H(s)$, en cuyo caso, la función del sistema realimentado sabemos que es:

$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Supongamos que la ganancia de lazo $G(s)H(s)$ tiene la siguiente forma (se supone que K es la ganancia de un amplificador previo a la planta):

$$G(s)H(s) = K \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

De lo que se trata es de observar la situación de los polos de $T(s)$, es decir, como se “mueven” las raíces del polinomio $1 + G(s)H(s)$, cuando variamos el parámetro K desde cero hasta infinito (también puede interesar el caso de valores negativos).

Las reglas para obtener dicha gráfica, las podemos sintetizar en las siguientes:

R1: El lugar de las raíces será una curva con tantas ramas como sea el grado de la ecuación característica ($1 + G(s)H(s) = 0$).

R2: El lugar de las raíces es simétrico respecto del eje real.

R3: Los puntos de arranque ($K=0$) son los polos de GH , y los de llegada ($K=\infty$) son los ceros de la función en lazo abierto (GH) o el infinito (si hay más polos que ceros).

R4: El lugar de las raíces restringido al eje real únicamente existe en los puntos tales que a su derecha se tenga un número **impar** de polos y ceros de la función de transferencia en lazo abierto.

R5: Si el número de polos (n) es mayor que el de ceros (m), hay más puntos de arranque que de llegada; la diferencia ($n-m$) son las asíntotas que tienden al infinito, las cuales forman un ángulo con el eje real dado por:

$$\alpha_k = \frac{(2r+1)\pi}{n-m} \quad ; \quad r = 0, 1, \dots, n-m-1$$

R6: El punto de corte con las asíntotas (“centroide”) viene dado por:

$$\sigma = \frac{\sum_j^n \operatorname{Re}(p_j) - \sum_i^m \operatorname{Re}(z_i)}{n-m}$$

R7: Los puntos de ruptura (“breakaway point”) son puntos donde los lugares geométricos comprendidos entre dos polos dejan el eje real. Estos puntos vienen determinados por

$$\frac{dK}{ds} = 0$$

(si se obtienen más, pueden deberse a la parte $-\infty < K < 0$) donde, obviamente:

-4- La técnica del Lugar de las Raíces

$$K = -\frac{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}$$

R8: Para un polo o cero con orden de multiplicidad λ :

a) El ángulo de salida del lugar geométrico desde un polo complejo (para los polos reales siempre son $\pm 90^\circ$) viene dado por:

$$l \cdot \phi_p = +(2r+1) \cdot \pi + \phi \quad ; \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

donde ϕ es la “contribución” neta, en ese polo, debido a todos los polos y ceros ($\phi = \sum \theta_z - \sum \theta_p$).

b) El ángulo de llegada, en el lugar geométrico, de un cero complejo es:

$$l \cdot \phi_z = +(2r+1) \cdot \pi - \phi \quad ; \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

donde ϕ es la “contribución” neta, en ese cero, debido a todos los polos y ceros ($\phi = \sum \theta_z - \sum \theta_p$).

R9: Los puntos de intersección de los lugares de las raíces con el eje imaginario se calculan aplicando el criterio de Routh a la ecuación característica, o bien, sustituyendo s por $j\omega$ en dicha ecuación y obteniendo los valores de ω y K (igualando partes real e imaginaria a cero).

R10: Se pueden calcular las ganancias K en los diferentes puntos del lugar de las raíces, a partir de la condición modular:

$$K = \frac{\prod_{i=1}^n |s - p_i|}{\prod_{j=1}^m |s - z_j|}$$

Veamos este proceso aplicado al siguiente sistema:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s^2 + 2s + 2)}$$

R1: El número de ramas coincide con el grado de la ecuación característica ($1+GH=0$): 3

R2: El lugar de las raíces es simétrico respecto del eje real.

R3: Los puntos de arranque son los polos: $s_1 = 0$; $s_2 = -1-1j$; $s_3 = -1 + 1j$ y acaban en el infinito al no tener ceros GH (tres asíntotas).

R4: La parte restringida al eje real consiste en todo el semieje negativo (zona donde a su derecha existe un número impar de ceros y polos: 1).

R5: Hay $n - m = 3 - 0 = 3$ asíntotas cuyos ángulos con el eje real son:

$$\alpha_k = \frac{(2r+1)\pi}{n-m} \quad ; \quad r = 0, 1, \dots, n-m-1$$

esto es, $\pi/3$; π y $5\pi/3 = -\pi/3$

R6: El "centroide" se encuentra en:

$$\sigma = \frac{\sum_j^n \operatorname{Re}(p_j) - \sum_i^m \operatorname{Re}(z_i)}{n-m} = \frac{0 + (-1) + (-1) - 0}{3-0} = -\frac{2}{3}$$

R7: No hay puntos de ruptura (no existen choques de polos sobre el eje real, al no tener nada más que uno).

R8: Ángulos de salida de los polos complejos:

$$\phi_p = +(2r+1)\cdot\pi + \phi \quad ; \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

donde ϕ es la "contribución" neta, en ese polo, debido a todos los polos y ceros ($\phi = \sum\theta_z - \sum\theta_p$):

a) Polo $-1 + 1j$:

$$\phi = \sum\theta_z - \sum\theta_p = 0 - (3\pi/4 + \pi/2) = -5\pi/4 = -225^\circ$$

$\phi = \pm(2r+1)\cdot\pi + (-5\pi/4) = |r=0| = -\pi/4$ y $+\pi/4$ (este último es para el otro polo)

b) Polo $-1 - 1j$:

$$\phi = \sum\theta_z - \sum\theta_p = 0 - (-3\pi/4 - \pi/2) = 5\pi/4 = 225^\circ$$

$\phi = \pm(2r+1)\cdot\pi + (5\pi/4) = |r=0| = \pi/4$ y $-\pi/4$ (este último es para el otro polo)

R10: El corte con el eje imaginario lo obtenemos aplicando el método de Routh al polinomio característico:

$$1 + \frac{k}{s(s^2 + 2s + 2)} = 0 \Rightarrow s^3 + 2s^2 + 2s + k = 0$$

Obteniendo el "arreglo" de Routh:

-6- La técnica del Lugar de las Raíces

s^3	1	2
s^2	2	k
s^1	$(4-k)/2$	
s^0	k	

De donde obtenemos:

$K > 0$ y $k < 4$ para que las raíces estén en el SPI.

Los puntos de corte con el eje imaginario son para $k=0$ (polo inicial en $s=0$, pero que parte hacia la izquierda) y el de interés, que es cuando $k > 0$. Justamente en $K = 4$ se tendrá el corte: en $k = 4$ se tiene una terminación prematura, por lo que el polinomio original será divisible por $2s^2 + 4$ y la raíz será $2(jw)^2 + 4 = 0 \Rightarrow w = \sqrt{2}$ rd/s.

Otra forma de obtener esto último es sustituir s por jw en la ecuación característica:

$$(jw)^3 + 2(jw)^2 + 2(jw) + k = 0 \Rightarrow (k - 2w^2) + j(2w - w^3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k - 2w^2 = 0 \\ w(2 - w^2) = 0 \end{cases}$$

cuyas soluciones son, de la segunda ecuación: $w = 0$ rd/s (trivial) y $w = \sqrt{2}$ rd/s, y al sustituir en la primera nos queda $k = 4$; resultados que coinciden con los anteriores.

Dibujando todo lo anterior, obtenemos la gráfica de la figura 1.

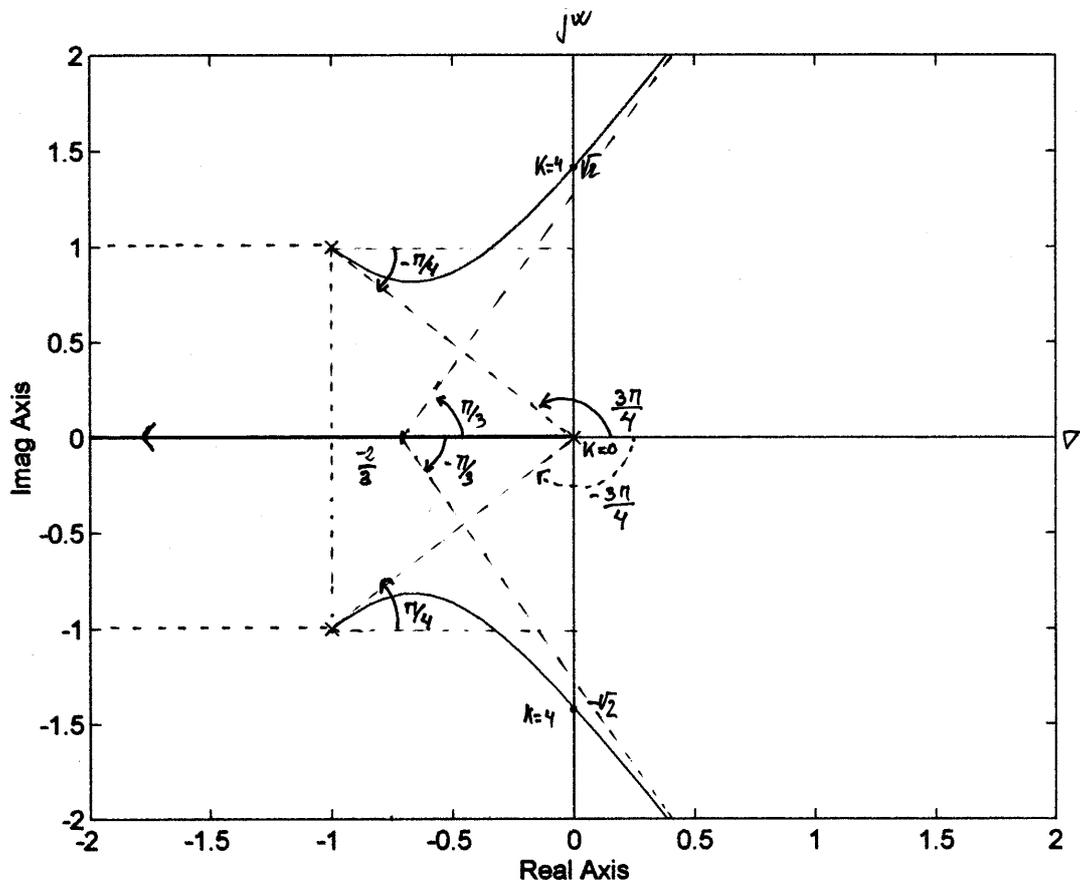


Figura 1

3.-Lugar de las Raíces de sistemas continuos típicos.

Vamos a presentar los lugares de las raíces de los sistemas típicos de control, cuyos diagramas de Nyquist también vimos en el tema de respuesta en frecuencia

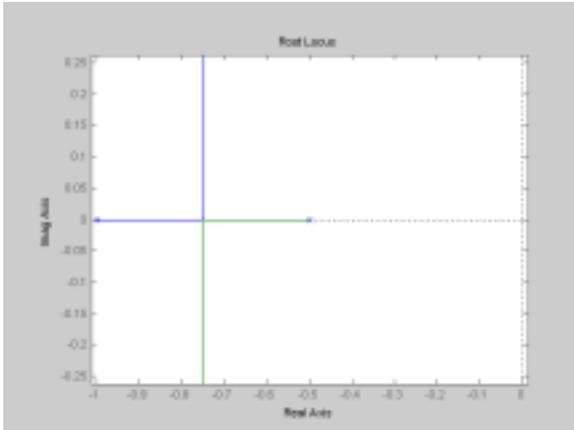


Figura 2

◆ **Regulador simple**

$$\frac{K}{(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)}$$

(K=2 ; T₁=1; T₂=2)

◆ **Regulador**

$$\frac{K}{(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)(1 + j\omega T_3)}$$

(K = 6; T₁ = 1; T₂ = 2; T₃ = 3)

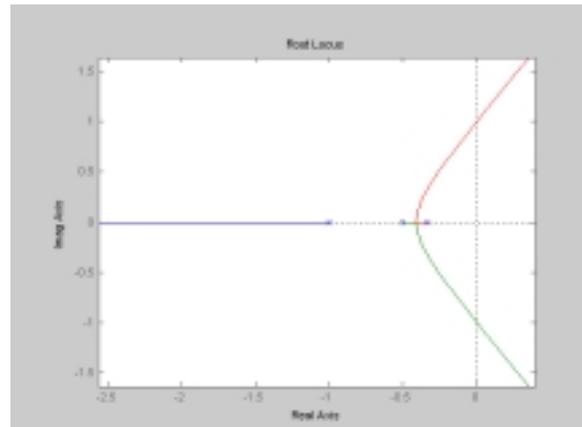


Figura 3

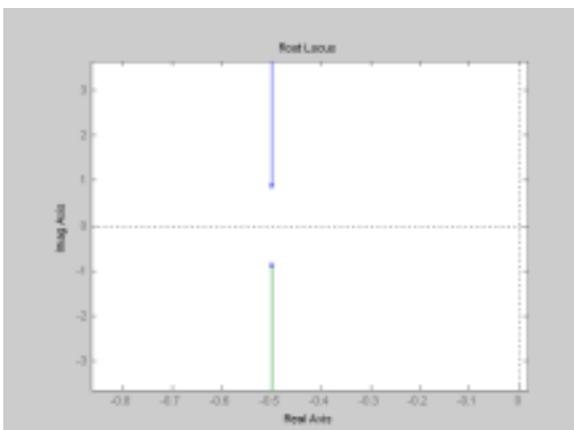


Figura 4

◆ **Válvula hidráulica**

$$\frac{K}{K_1(j\omega)^2 + K_2(j\omega) + 1}$$

(K = 1; K₁ = 1; K₂ = 1)

-8- La técnica del Lugar de las Raíces

◆ **Servo de Instrumentos**

$$\frac{K}{j\omega(1 + j\omega T_1)}$$

(K=2, T₁=1)

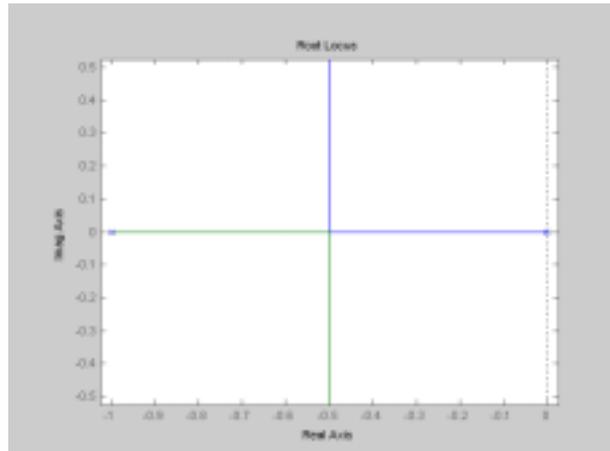


Figura 5

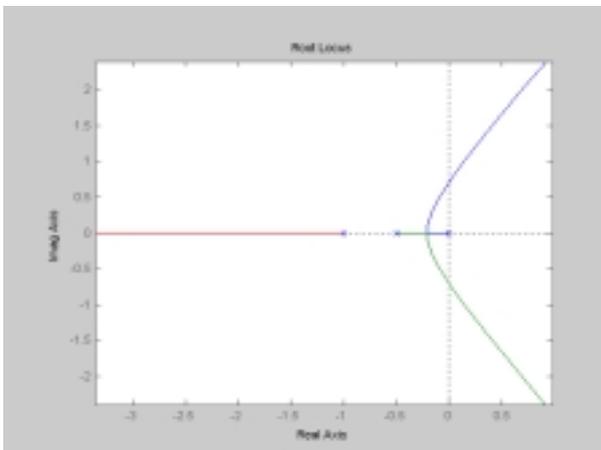


Figura 6

◆ **Servo de posición (I)**

$$\frac{K}{j\omega(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)}$$

(K=1, T₁=1, T₂=2)

◆ **Servo de posición (II)**

$$\frac{K}{j\omega(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)(1 + j\omega T_3)}$$

(K=1, T₁=1, T₂=2, T₃=3)

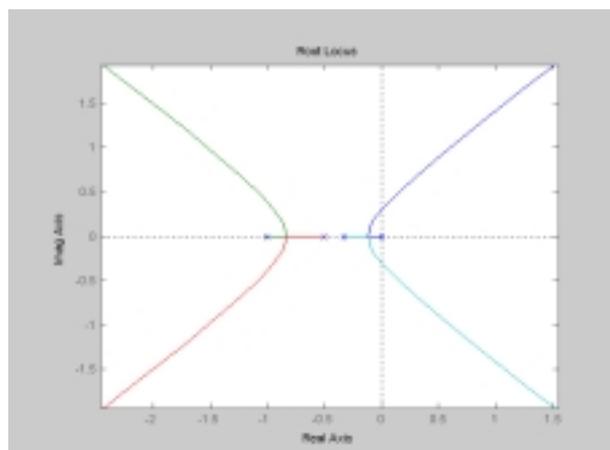


Figura 7

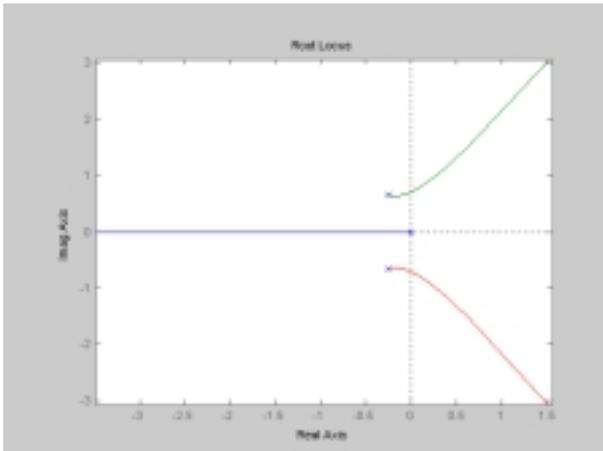


Figura 8

◆ **Servo de posición (III)**

$$\frac{K}{j\omega(K_1(j\omega)^2 + K_2(j\omega) + 1)}$$

(K=1, K₁=2, K₂=1)

◆ **Compensador de retardo de fase**

$$\frac{1 + j\omega T_d}{1 + j\omega T_d G} ; (G > 1)$$

(T_d=1, G=2)

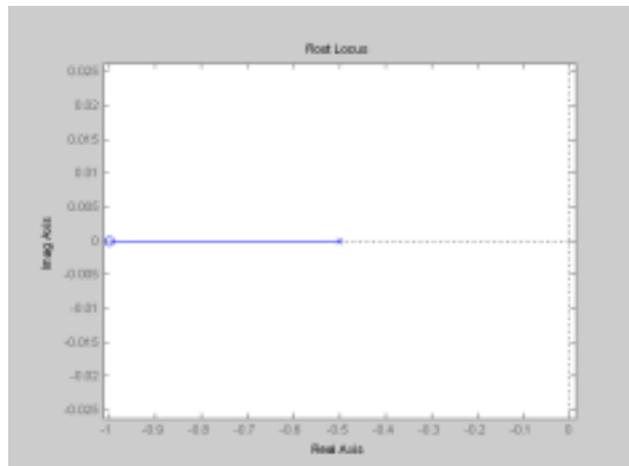


Figura 9

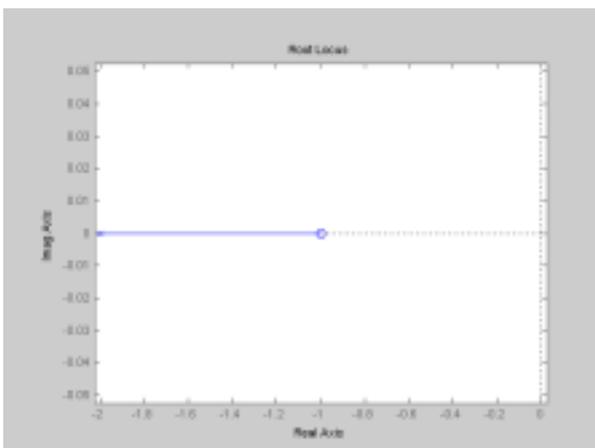


Figura 10

◆ **Compensador de adelanto de fase**

$$G \frac{1 + j\omega T_d}{1 + j\omega T_d G} ; (G < 1)$$

(T_d=1, G=1/2)

4.-Lugares geométricos de las Raíces de otros sistemas.

Hasta ahora, hemos analizado solamente el caso de que el parámetro ajustable k represente la ganancia del sistema en lazo abierto:

$$G(s) \cdot H(s) = k \frac{N(s)}{D(s)}$$

Pero esta técnica puede adaptarse fácilmente a los casos en que sea otro el parámetro variable que se desea estudiar. Esta gráfica se denomina "lugar de las raíces, generalizado", o "contorno de raíces".

Supongamos, por ejemplo, el sistema ajustable de la figura 11, donde k es un parámetro ajustable

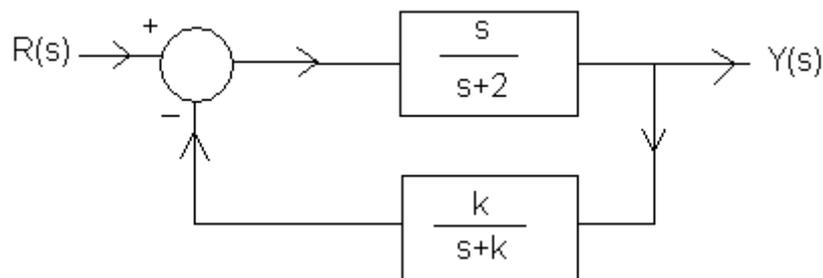


Figura 11

Su función de transferencia será:

$$T(s) = \frac{\frac{s}{s+2}}{1 + \left(\frac{s}{s+2}\right)\left(\frac{k}{s+k}\right)} = \frac{s(s+k)}{s^2 + 2s + k(2s+2)} = \frac{s(s+k)}{1 + k \frac{2s+2}{s^2+2s}}$$

con lo que podemos considerar que:

$$GH = k \frac{2s+2}{s(s+2)}$$

y obtener su lugar de las raíces generalizado, como se muestra en la figura 12.

Otro posible caso podría ser el de la figura 13, donde vemos que la ecuación característica es:

$$s^2 + a \cdot s + k = 0$$

Ahora nos interesa variar el parámetro a , por lo que podemos hacer las siguientes transformaciones:

$$1 + a \frac{s}{s^2 + k} = 0$$

Y, considerando ahora

$$GH = a \frac{s}{s^2 + k}$$

aplicar el método conocido.

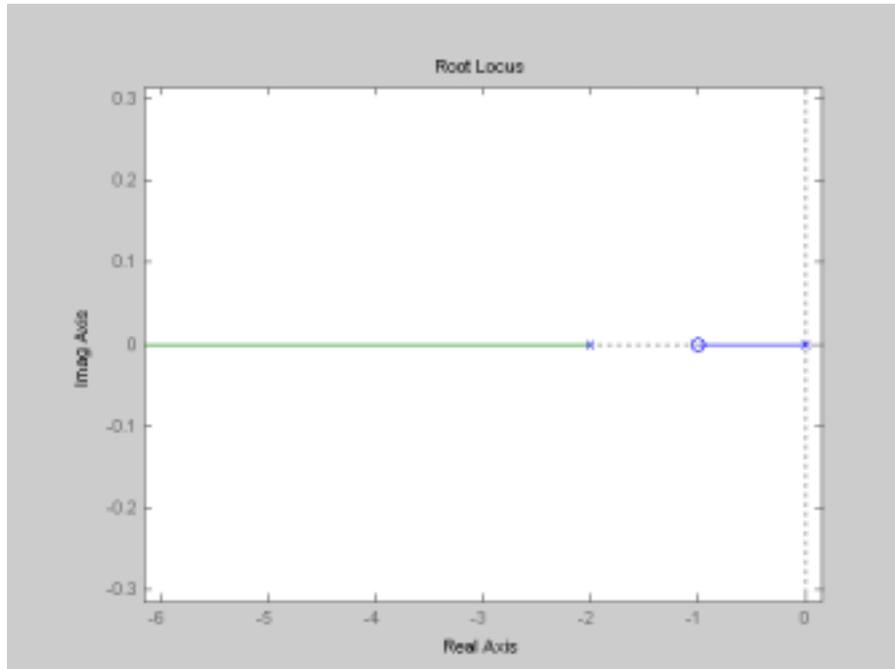


Figura 12

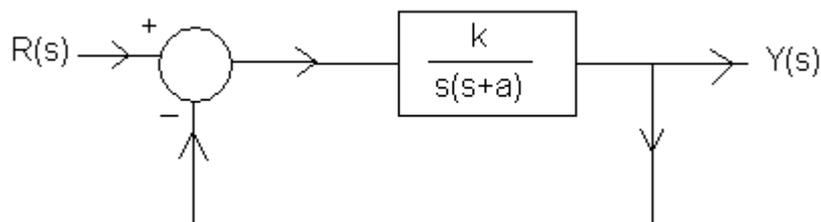


Figura 13

Por último, veamos el caso de un sistema subamortiguado típico de segundo orden, con realimentación unitaria, donde el parámetro ajustable es el amortiguamiento ξ , tal y como se indica en la figura 14.

Ahora la función de transferencia es:

$$T(s) = \frac{\frac{2s-4}{s^2 + 6\xi s + 9}}{1 + \frac{2s-4}{s^2 + 6\xi s + 9}} = \frac{2s-4}{s^2 + 2s + 5 + 6\xi s} = \frac{2s-4}{s^2 + 2s + 5} \cdot \frac{1}{1 + \xi \frac{6s}{s^2 + 2s + 5}}$$

por lo que podremos poner ahora

-12- La técnica del Lugar de las Raíces

$$GH = \xi \frac{6s}{s^2 + 2s + 5}$$

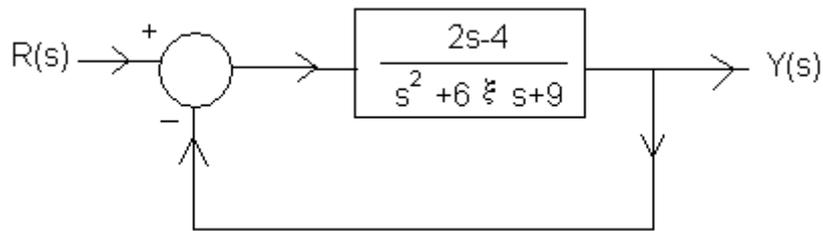


Figura 14

cuyo contorno de raíces es

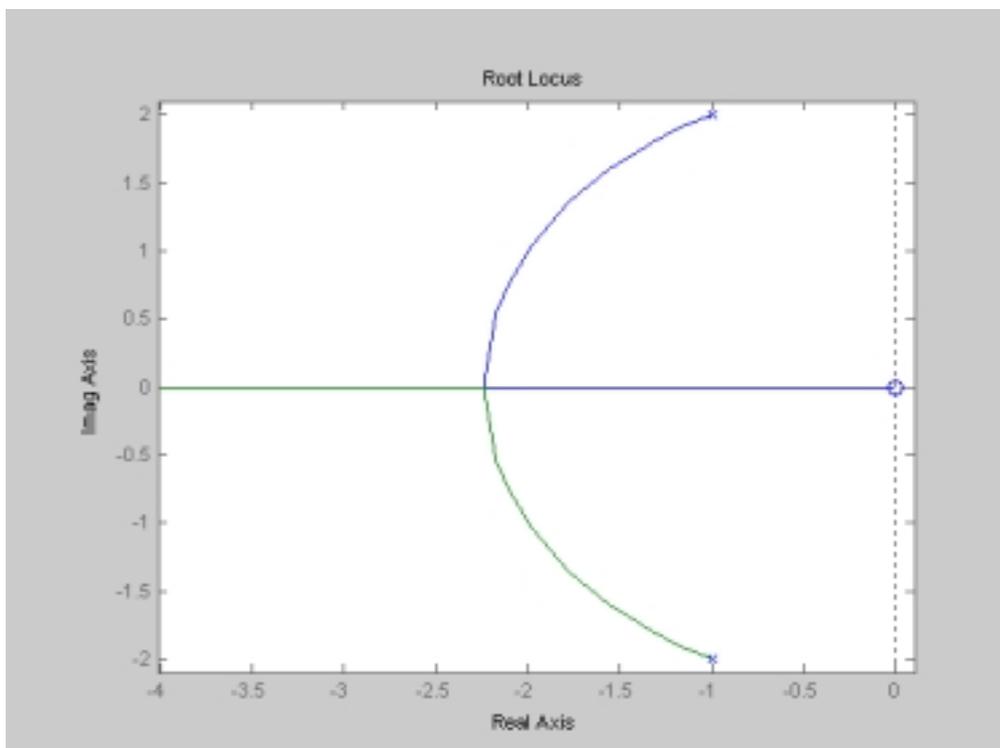


Figura 15

5.-Variación de parámetros negativos.

Cuando se desea determinar el lugar geométrico de las raíces de un parámetro K, que varía desde 0 hasta $-\infty$, las relaciones geométricas son:

$$\angle G(s)H(s) = 0^\circ \pm r \cdot 360^\circ = 2r\pi \quad ; \quad r = 0,1,2,\dots \quad ; \quad |G(s)H(s)| = |1/k|$$

Así pues, los puntos del lugar de las raíces son los valores de s para los cuales el ángulo del producto GH es 0° (en lugar de 180° , como se tiene para valores positivos de k).

La construcción del lugar geométrico es similar al procedimiento de 180°, pero variando algunas de las reglas, concretamente la R4, la R5 y la R8, que quedarían de la forma:

R4': El lugar de las raíces restringido al eje real únicamente existe en los puntos tales que a su derecha se tenga un número **par** de polos y ceros de la función de transferencia en lazo abierto.

R5': Si el número de polos (n) es mayor que el de ceros (m), hay más puntos de arranque que de llegada; la diferencia (n-m) son las asíntotas que tienden al infinito, las cuales forman un ángulo con el eje real dado por:

$$\alpha_k = \frac{(2r+0)\pi}{n-m} \quad ; \quad r = 0,1,\dots,n-m-1$$

R8': Para un polo o cero con orden de multiplicidad λ :

a) El ángulo de salida del lugar geométrico desde un polo complejo (para los polos reales siempre son $\pm 90^\circ$) viene dado por:

$$l \cdot \phi_p = +(2r+0) \cdot \pi + \phi \quad ; \quad r = 0,1,2,\dots$$

donde ϕ es la "contribución" neta, en ese polo, debido a todos los polos y ceros ($\phi = \sum \theta_z - \sum \theta_p$).

b) El ángulo de llegada, en el lugar geométrico, de un cero complejo es:

$$l \cdot \phi_z = +(2r+0) \cdot \pi - \phi \quad ; \quad r = 0,1,2,\dots$$

donde ϕ es la "contribución" neta, en ese cero, debido a todos los polos y ceros ($\phi = \sum \theta_z - \sum \theta_p$).

Nótese que se ha dejado explícitamente ese cero (0), para observar claramente donde está la variación respecto al lugar habitual.

Como ejemplo, el lugar de las raíces para la siguiente función de lazo abierto

$$G(s)H(s) = K \frac{s+3}{s(s-2)((s+1)^2 + 2^2)}$$

para valores de K desde 0 hacia $-\infty$, se muestra en la figura 16

-14- La técnica del Lugar de las Raíces

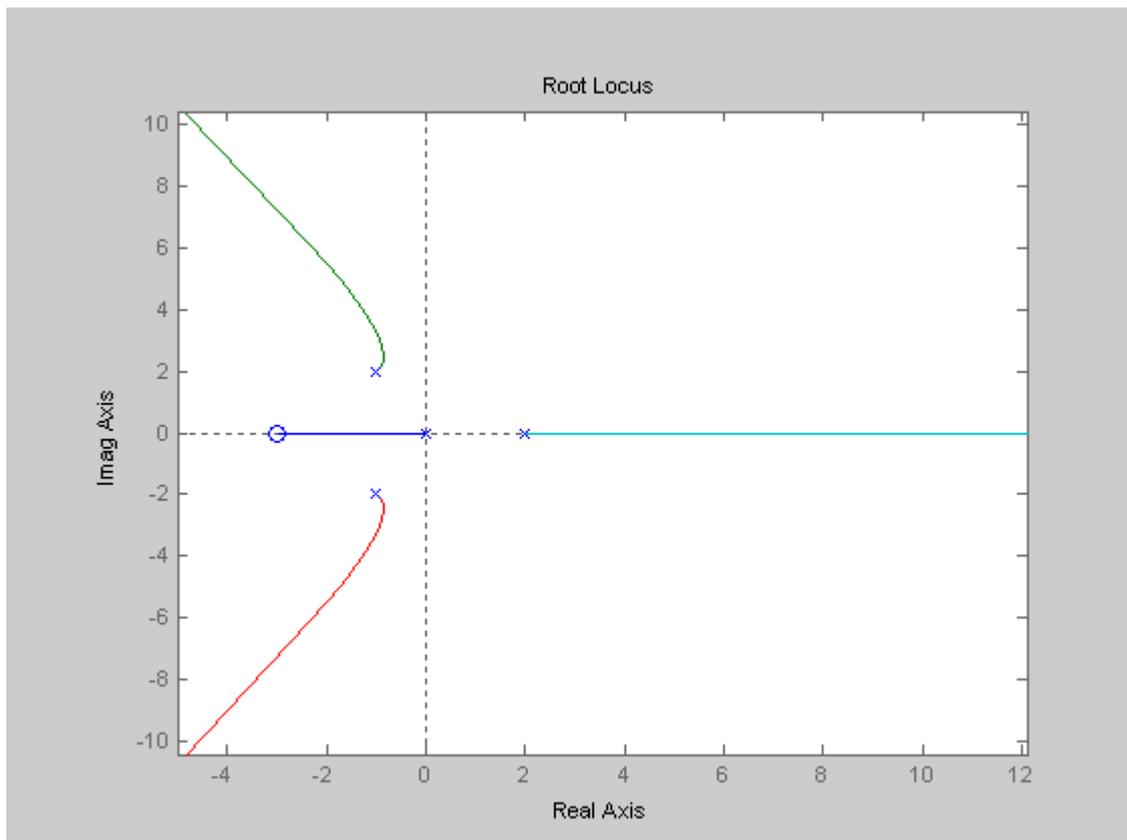


Figura 16