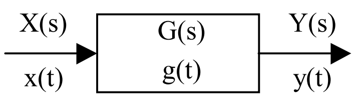
Tabla de Transformadas de Laplace

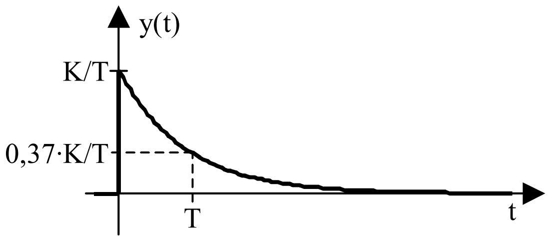
	$F(s)$	$f(t) \quad t \geq 0 \quad (f(t)=0 \text{ para } t<0)$	Observaciones
1	1	$\delta(t)$	Impulso de Dirac
2	e^{-Ts}	$\delta(t-T)$	Impulso de Dirac retrasado T segundos
3	$\frac{1}{s}$	$u_0(t)$	Escalón unitario
4	$\frac{1}{s}e^{-Ts}$	$u_0(t-T)$	Escalón unitario retrasado T segundos
5	$\frac{1}{s^2}$	t	Rampa unidad $tu_0(t)$
6	$\frac{1}{s^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	n = 1, 2, 3, … 0! = 1
7	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$e^{-at}u_0(t)$
8	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$te^{-at}u_0(t)$
9	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-at}$	n = 1, 2, 3, … 0! = 1
10	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{b-a}(e^{-at}-e^{-bt})$	Polos reales
11	$\frac{1}{s(s+a)}$	$\frac{1}{a}(1-e^{-at})$	(Como 10 con b=0)
12	$\frac{s+z}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{b-a}\left[(z-a)e^{-at}-(z-b)e^{-bt}\right]$	Polos reales
13	$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{a-b}\left[ae^{-at}-be^{-bt}\right]$	(Como 12 con z=0)
14	$\frac{1}{(s+a)(s+b)(s+c)}$	$\frac{e^{-at}}{(b-a)(c-a)}+\frac{e^{-bt}}{(c-b)(a-b)}+\frac{e^{-ct}}{(a-c)(b-c)}$	(Particularizable para c=0)
15	$\frac{(s+z)}{(s+a)(s+b)(s+c)}$	$\frac{(z-a)e^{-at}}{(b-a)(c-a)}+\frac{(z-b)e^{-bt}}{(c-b)(a-b)}+\frac{(z-c)e^{-ct}}{(a-c)(b-c)}$	(Particularizable para c=0 ó z=0)

	$F(s)$	$f(t) \quad t \geq 0 \quad (f(t)=0 \text{ para } t<0)$	Observaciones
16	$\frac{1}{s^2(s+a)}$	$\frac{1}{a^2}(at-1+e^{-at})$	
17	$\frac{1}{s(s+a)^2}$	$\frac{1}{a^2}(1-e^{-at}-ate^{-at})$	
18	$\frac{s+z}{s(s+a)^2}$	$\frac{1}{a^2}(z-ze^{-at}+a(a-z)te^{-at})$	
19	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$sen(\omega t)$	Polos imaginarios puros
20	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos(\omega t)$	Polos imaginarios puros
21	$\frac{s+z}{s^2+\omega^2}$	$\sqrt{\frac{z^2+\omega^2}{\omega^2}}sen(\omega t+\phi) \quad \phi=\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{z}\right)$	Polos imaginarios puros
22	$\frac{1}{s(s^2+\omega^2)}$	$\frac{1}{\omega^2}(1-\cos(\omega t))$	
23	$\frac{s+z}{s(s^2+\omega^2)}$	$\frac{z}{\omega^2}-\sqrt{\frac{z^2+\omega^2}{\omega^4}}\cos(\omega t+\phi) \quad \phi=\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{z}\right)$	
24	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}sen(\omega t)$	Polos complejos
25	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos(\omega t)$	Polos complejos
26	$\frac{s+z}{(s+a)^2+\omega^2}$	$\sqrt{\frac{(z-a)^2+\omega^2}{\omega^2}}e^{-at}sen(\omega t+\phi) \quad \phi=\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{z-a}\right)$	Polos complejos
27	$\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$	$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_n t}sen\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t\right)$	Polos complejos (equivalente a 24)
28	$\frac{s}{(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)}$	$-\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_n t}sen\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t+\phi\right) \quad \phi=\cos^{-1}\xi$	Polos complejos
29	$\frac{\omega_n^2}{s(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)}$	$1-\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_n t}sen\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t+\phi\right) \quad \phi=\cos^{-1}\xi$	

Sistemas de Primer Orden (I)

$$G(s)=\frac{K}{1+T\cdot s}$$



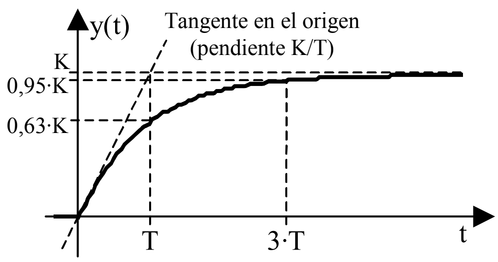


K: ganancia estática o en régimen permanente

T: constante de tiempo

- Respuesta impulsional: X(s)=1

$$y(t)=L^{-1}[Y(s)]=L^{-1}[G(s)]=\frac{K}{T}e^{\frac{-t}{T}}\cdot u_0(t)$$

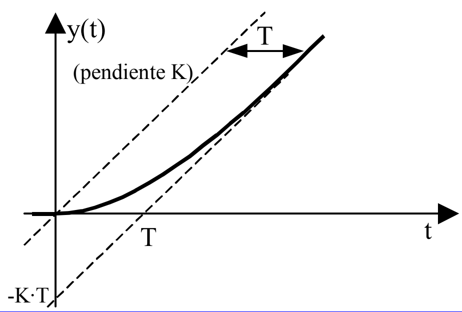


- Respuesta a un escalón: X(s)=1/s

$$y(t)=L^{-1}[Y(s)]=L^{-1}\left[\frac{G(s)}{s}\right]=K\cdot(1-e^{\frac{-t}{T}})\cdot u_0(t)$$

- Respuesta a una rampa: $X(s)=1/s^2$

$$y(t)=L^{-1}[Y(s)]=L^{-1}\left[\frac{G(s)}{s^2}\right]=[K\cdot(t-T)+K\cdot T\cdot e^{\frac{-t}{T}}]\cdot u_0(t)$$



Sistemas de Segundo Orden (I)

$$G(s) = \frac{K \cdot \omega_n^2}{s^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2} = \frac{K}{\frac{1}{\omega_n^2} \cdot s^2 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_n} \cdot s + 1} = \frac{K_s}{s^2 + a \cdot s + b}$$

Si a,b>0, el sistema es estable

$$s^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2 = 0$$

Las raíces del polinomio (polos del sistema) son:

$$s_{1,2} = -\xi \cdot \omega_n \pm \omega_n \cdot \sqrt{\xi^2 - 1}$$

Si $\xi < 1$ las raíces son complejas conjugadas:

$$\sigma = \xi \cdot \omega_n \qquad \omega_d = \omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi^2}$$

$$s_{1,2} = -\sigma \pm j \cdot \omega_d$$

K: ganancia estática

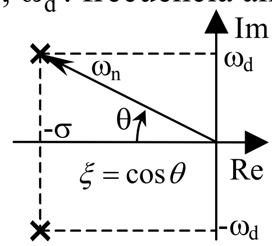
$T = 2 \cdot \xi / \omega_n$: constante de tiempo

$\xi > 0$: coeficiente de amortiguamiento

$\omega_n > 0$: frecuencia natural del sistema

$\sigma > 0$: constante de amortiguamiento o factor de decrecimiento

Si $\xi < 1$, ω_d: frecuencia amortiguada



Universidad de Oviedo
REGULACIÓN AUTOMÁTICA
INGENIERÍA DE SISTEMAS Y AUTOMÁTICA

Sistemas de Segundo Orden (II)

$$si \quad 0 < \xi < 0.707 \begin{cases} M_r = \dfrac{1}{2 \cdot \xi \cdot \sqrt{1 - \xi^2}} & \leftarrow \text{Pico de Resonancia} \\ \omega_r = \omega_n \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot \xi^2} & \leftarrow \text{Frecuencia de Resonancia} \end{cases}$$

Sobreoscilación:

$$M_p = e^{\frac{-\pi \cdot \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \cdot 100[\%] = e^{\frac{-\pi \cdot \sigma}{\omega_d}} \cdot 100[\%] = e^{-\pi \cdot \mathrm{cotg}\,\theta} \cdot 100[\%] = \frac{B - A}{A} \cdot 100[\%]$$

Tiempo de subida:

$$t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{\pi - \theta}{\omega_d}$$

Tiempo de pico:

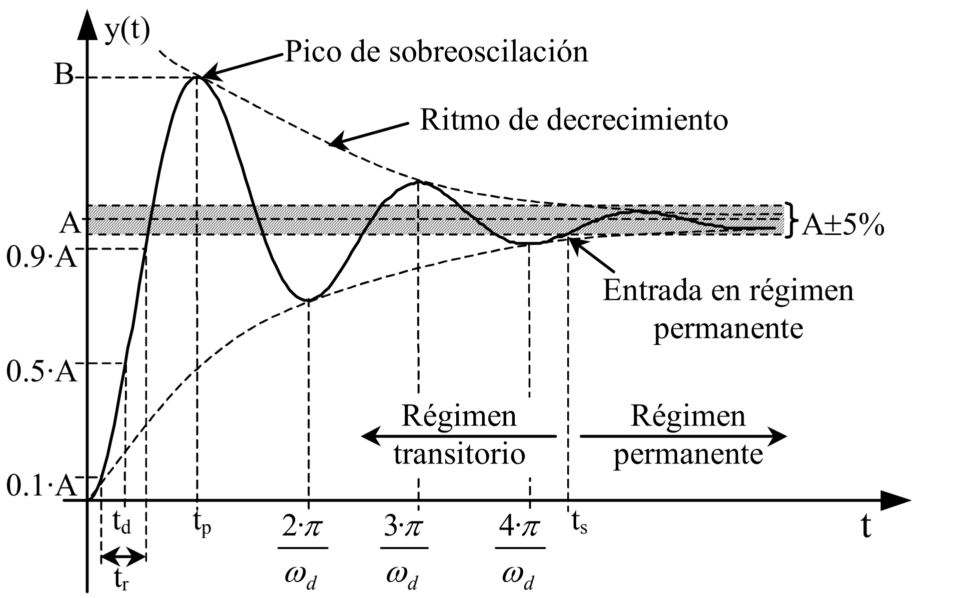
$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{\pi}{\omega_d}$$

Tiempo de establecimiento:

$$t_s = \frac{\pi}{\xi \cdot \omega_n} = \frac{\pi}{\sigma} \quad \text{(aprox.)}$$

Tiempo de retardo:

$$t_d = \frac{1 + \frac{\xi}{\sqrt{2}}}{\omega_n} \quad \text{(aprox.)}$$



Criterio de Estabilidad de Routh

Indica si existen raíces con parte real positiva en un polinomio:

$$a_0 \cdot s^n + a_1 \cdot s^{n-1} + a_2 \cdot s^{n-2} + \ldots + a_{n-2} \cdot s^2 + a_{n-1} \cdot s + a_n = 0$$

1) $\forall a_i$, $a_i>0$ (es decir, todos con el mismo signo y sin nulos)

2) Se construye la siguiente tabla:

$$\begin{array}{c|ccccc}
s^n & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \ldots \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \ldots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \ldots \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & \\
s^2 & u_1 & u_2 & & & \\
s^1 & v_1 & & & & \\
s^0 & w_1 & & & &
\end{array}$$

$$b_1 = \frac{a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3}{a_1} = -\frac{1}{a_1}\begin{bmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{bmatrix}$$

$$b_2 = \frac{a_1 \cdot a_4 - a_0 \cdot a_5}{a_1} = -\frac{1}{a_1}\begin{bmatrix} a_0 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{bmatrix}$$

$$b_3 = \frac{a_1 \cdot a_6 - a_0 \cdot a_7}{a_1} = -\frac{1}{a_1}\begin{bmatrix} a_0 & a_6 \\ a_1 & a_7 \end{bmatrix}$$

$\ldots$

$$c_1 = \frac{b_1 \cdot a_3 - a_1 \cdot b_2}{b_1} = -\frac{1}{b_1}\begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}$$

$$c_2 = \frac{b_1 \cdot a_5 - a_1 \cdot b_3}{a_1} = -\frac{1}{b_1}\begin{bmatrix} a_1 & a_5 \\ b_1 & b_3 \end{bmatrix}$$

El sistema que tenga como denominador ese polinomio, será estable si todos los $a_i>0$ y todos los coeficientes de la primera columna de la tabla son también estrictamente positivos.

El polinomio tiene tantos polos con parte real positiva como cambios de signo se producen en la primera columna de la tabla

Tipo de un Sistema

Es el número de polos en el origen que tiene el sistema.

(número de integradores)

$$G(s) = \frac{N(s)}{s^n \cdot P(s)} \qquad n = \text{tipo del sistema}$$

• Si R(s)·G(s) es de tipo cero:

K_p=cte., $K_v=K_a=0 \Rightarrow e_p$=cte., $e_v=e_a$=inf.

• Si R(s)·G(s) es de tipo uno:

K_p=inf., K_v=cte., $K_a=0 \Rightarrow e_p=0$, e_v=cte., e_a=inf.

• Si R(s)·G(s) es de tipo dos(1):

K_p=inf., K_v=inf., K_a=cte. $\Rightarrow e_p=e_v=0$, e_a=cte.

• Si R(s)·G(s) es de tipo tres o superior todos los errores son nulos(1).

TIPO	0	1	2	3
e_p	$1/(1+K_p)$	0	0	0
e_v	inf.	$1/K_v$	0 (1)	0 (1)
e_a	inf.	inf.	$1/K_a$ (1)	0 (1)

$$K_p = lim_{s\to 0} h_0 \cdot G_{eq}(s)$$

$$K_v = lim_{s\to 0} s \cdot h_0 \cdot G_{eq}(s)$$

$$K_a = lim_{s\to 0} s^2 \cdot h_0 \cdot G_{eq}(s)$$

Nota: Si H(s) es una constante, H(s)=h_0, entonces $G_{eq}(s)$=R(s)·G(s)

(1) Expresiones y afirmaciones válidas sólo si H(s)=cte.

Reglas para el Trazado del Lugar de las Raíces (I)

Se inicia el trazado situando sobre el plano complejo los polos y ceros de la función de transferencia del sistema (FdT) en bucle abierto (B.A.): R(s)·G(s)·H(s)

1) El número de ramas es igual al número de polos (n) de la FdT en B.A.: R(s)·G(s)·H(s)

2) Cada rama comienza en un polo (K_s=0) y termina en un cero (K_s=inf.). Si el número de ceros (m) es inferior al de polos, existirán n-m ceros en el infinito hacia los que irán n-m ramas siguiendo n-m asíntotas

3) Los puntos del eje real con un número impar de polos y ceros a su derecha pertenecen al lugar de las raíces (K_s>0), y si es par, pertenecen al lugar inverso de las raíces (K_s<0)

4) El lugar de las raíces y el lugar inverso de las raíces son simétricos respecto al eje real

5) Las n-m asíntotas se cortan en el punto:

$$\sigma_0 = \frac{\sum \text{polos de R(s)·G(s)·H(s)} - \sum \text{ceros de R(s)·G(s)·H(s)}}{n-m}$$

6) Los ángulos de las asíntotas con el eje real son:

$$Si \quad K_s > 0 \quad \theta_a = \frac{(2\cdot q+1)\cdot\pi}{n-m} \quad ; \quad Si \quad K_s < 0 \quad \theta_a = \frac{2\cdot q\cdot\pi}{n-m} \quad ; \quad siendo \;\; q = \{0,1,2,\ldots,n-m-1\}$$

Reglas para el Trazado del Lugar de las Raíces (II)

7) Los ángulos de salida de los polos y de llegada a los ceros, se obtienen aplicando el criterio del argumento:

$$Si\ K_s > 0 \quad \theta_{sp} = \sum_{j=1}^{m} \angle s+z_j - \sum_{i=1}^{n} \angle s+p_i - (2\cdot q+1)\cdot\pi \quad \theta_{ec} = \sum_{i=1}^{n} \angle s+p_i - \sum_{j=1}^{m} \angle s+z_j + (2\cdot q+1)\cdot\pi$$

$$Si\ K_s < 0 \quad \theta_{sp} = \sum_{j=1}^{m} \angle s+z_j - \sum_{i=1}^{n} \angle s+p_i - 2\cdot q\cdot\pi \quad \theta_{ec} = \sum_{i=1}^{n} \angle s+p_i - \sum_{j=1}^{m} \angle s+z_j + 2\cdot q\cdot\pi \quad q = \{0,1,2,3,\ldots\}$$

8) Los puntos de dispersión y confluencia de las ramas son las raíces de la ecuación (df(s)/ds)=0 donde f(s) se obtiene de poner la ecuación característica en la forma K_s=f(s)

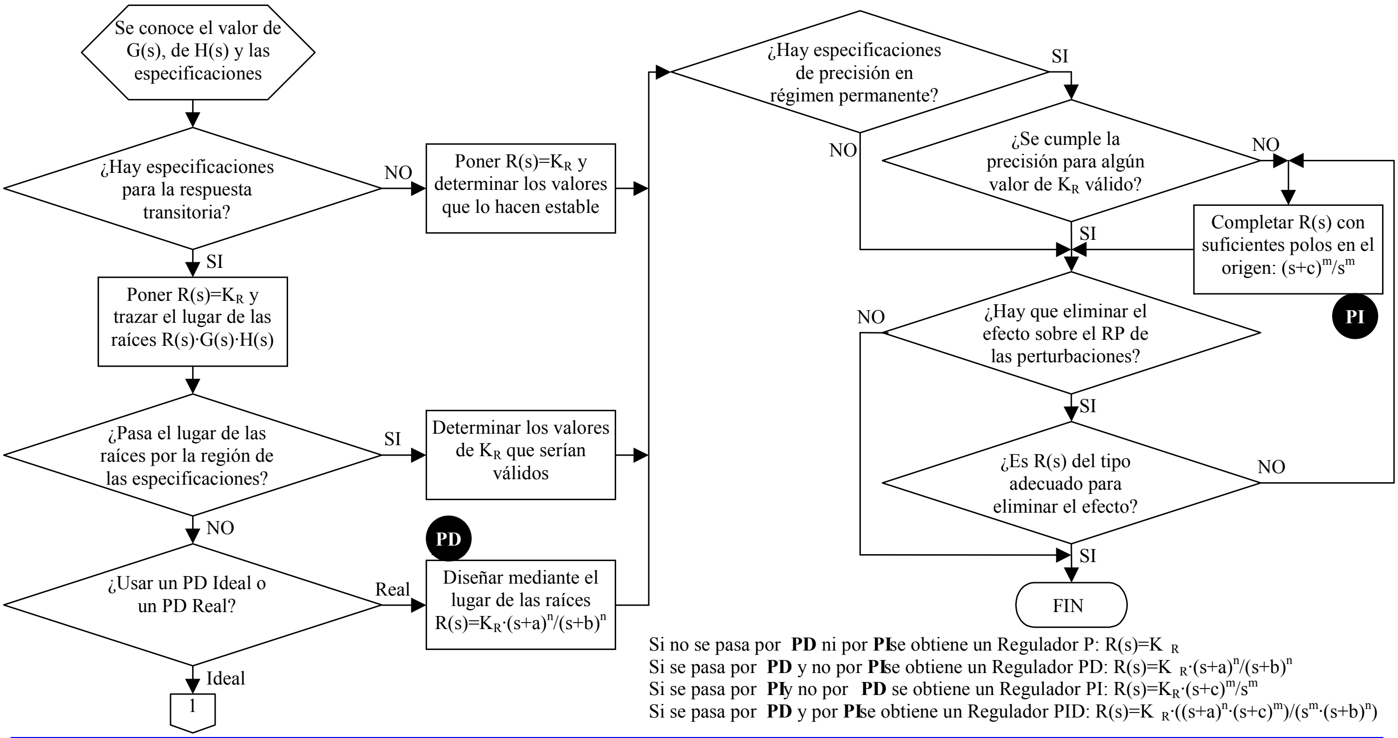
9) Los puntos de intersección del lugar de las raíces con el eje imaginario se pueden hallar aplicando el criterio de Routh para sistemas marginalmente estables

10) El valor de K_s para un determinado punto del lugar de las raíces se puede obtener aplicando el criterio del módulo:

$$|K_s| = \frac{\prod_{i=1}^{n} |s+p_i|}{\prod_{j=1}^{m} |s+z_j|}$$

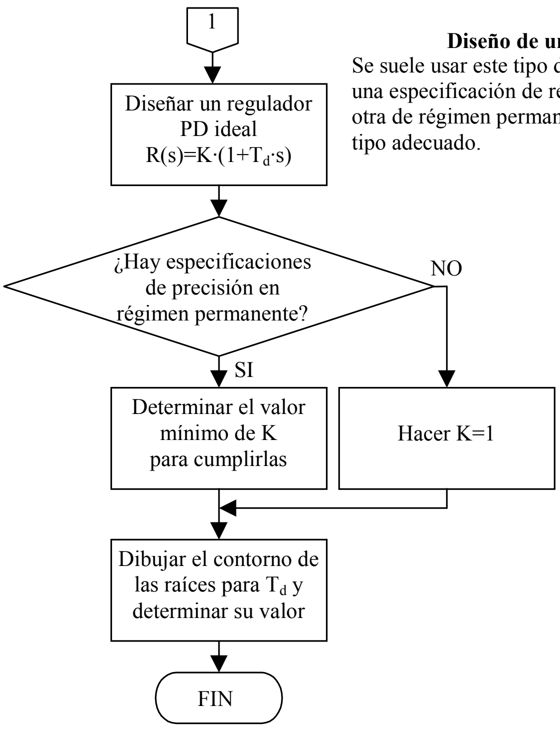
11) La suma de las raíces de la ecuación característica para cualquier valor de K_s es constante e igual al coeficiente del término en s^{n-1} cambiado de signo, cuando el coeficiente de s^n es la unidad

Diseño de Reguladores PID (I)



Si no se pasa por **PD** ni por **PI** se obtiene un Regulador P: R(s)=K_R
Si se pasa por **PD** y no por **PI** se obtiene un Regulador PD: R(s)=K_R·$(s+a)^n/(s+b)^n$
Si se pasa por **PI** y no por **PD** se obtiene un Regulador PI: R(s)=K_R·$(s+c)^m/s^m$
Si se pasa por **PD** y por **PI** se obtiene un Regulador PID: R(s)=K_R·$((s+a)^n·(s+c)^m)/(s^m·(s+b)^n)$

Diseño de Reguladores PID (II)



Diseño de un PD ideal
Se suele usar este tipo de diseño si sólo hay una especificación de régimen transitorio y otra de régimen permanente, siendo G(s) del tipo adecuado.

Los diagramas de flujo presentados son métodos aceptables para el diseño de reguladores PID, aunque existen múltiples alternativas para determinar los parámetros de los mismos que no están recogidas.

Los reguladores obtenidos se basan en el modelo del sistema, por lo que su validez sólo se podrá comprobar experimentalmente sobre el sistema real.

En ese momento, probablemente será necesario reajustar los parámetros del regulador diseñado para obtener los resultados deseados.