Regulación y Control de Máquinas Navales (RCMN)

Problemas Resueltos

Módulo 1. Modelado de Sistemas

PROBLEMA 1

Linealizar cada una de las siguientes ecuaciones:
a) $y'^2 + 5.y.y' + y = u'.\cos.u + u^2$
b) $y' + 5.y = 3.u' + u + 1$
en torno al punto de funcionamiento definido por $u_0 = \pi/4$.

La linealización de una ecuación diferencial no lineal, consiste en desarrollar en serie de Taylor cada uno de sus términos alrededor del punto de funcionamiento, y tomar únicamente los términos lineales de dicho desarrollo. Para ello es imprescindible conocer el valor que toman todas las variables en dicho punto de funcionamiento.

1. Cálculo del punto de funcionamiento.

En el punto de funcionamiento, también llamado de equilibrio, las variables que definen el comportamiento del sistema no sufren variaciones por lo que sus derivadas se anulan. Por lo tanto las ecuaciones en el punto de funcionamiento quedan reducidas a:

a) $y_0 = u_0^2$ con $y_0' = 0$; $u_0' = 0$; $u_0 = \pi/4$
b) $5.y_0 = u_0 + 1$ con $y_0' = 0$; $u_0' = 0$; $u_0 = \pi/4$

es decir

a) $y_0 = \pi^2/16$; $y_0' = 0$; $u_0' = 0$; $u_0 = \pi/4$
b) $y_0 = (\pi/4 + 1)/5$; $y_0' = 0$; $u_0' = 0$; $u_0 = \pi/4$

Una vez conocido el valor de todas las variables en el punto de funcionamiento, se puede desarrollar en serie de Taylor cada una de las ecuaciones.

2. Desarrollo en serie de Taylor

Desarrollando cada término de cada una de las ecuaciones y reteniendo únicamente los términos lineales del desarrollo, se obtiene:

a) $y'^{\,2}_0 + [2y']_0.(y' - y'_0) + 5.y_0 y'_0 + [5y']_0.(y - y_0) + [5y]_0(y' - y'_0) + y_0 + [1]_0.(y - y_0) =$
$u'_0 \cos u_0 + [\cos u]_0.(u' - u'_0) - [u' \operatorname{sen} u]_0.(u - u_0) + u_0^2 + [2u]_0.(u - u_0)$

b) $y'_0 + [1]_0.(y' - y'_0) + 5y_0 + [5]_0.(y - y_0) = [3u'_0] + [3]_0.(u' - u'_0) + u_0 + [1]_0.(u - u_0) + 1$

Teniendo en cuenta las ecuaciones del punto de funcionamiento, todos los términos independientes se anulan entre sí. Además haciendo los cambios de variables:

$y' - y'_0 = \Delta y'$

$y - y_0 = \Delta y$

$u' - u'_0 = \Delta u'$

$u - u_0 = \Delta u$

se obtienen las ecuaciones:

a) $2y'_0\,\Delta y' + 5y'_0\,\Delta y + 5y_0 \Delta y' + \Delta y = \cos u_0 .\Delta u' - u'_0 .\operatorname{sen} u_{0.} \Delta u + 2u_0 \Delta u$

b) $\Delta y' + 5\Delta y = 3\Delta u' + \Delta u$

que ya son lineales. Sustituyendo valores se obtiene:

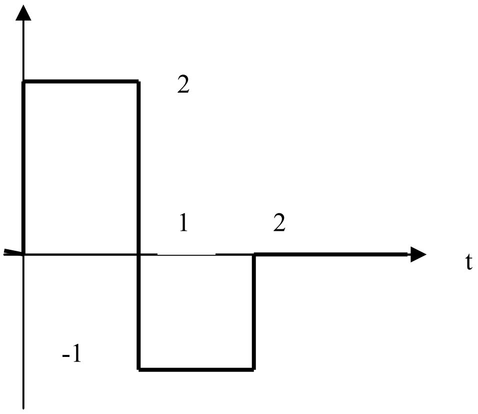
a) $\frac{5\pi^3}{16}\Delta y' + \Delta y = \frac{\sqrt{2}}{2}\Delta u' + \frac{\pi}{2}\Delta u$

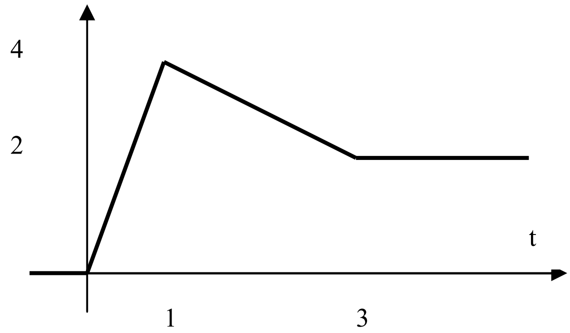
b) $\Delta y' + 5\Delta y = 3\Delta u' + \Delta u$

que son las ecuaciones linealizadas alrededor del punto de funcionamiento definido por $u_0 = \frac{\pi}{4}$.

PROBLEMA 2

Obtener las Transformadas de Laplace de las siguientes funciones:



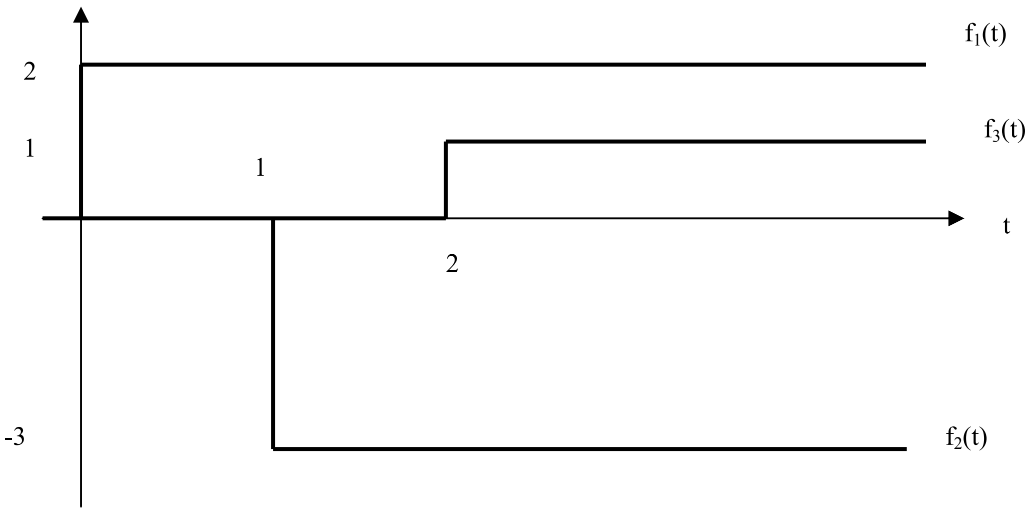


A. Aplicando la definición de la Transformada de Laplace de una función se obtiene para la primera de ellas:

$$F(s) = \int_0^\infty f(t).e^{-st}.dt = \int_0^1 2.e^{-st}.dt + \int_1^2 (-1).e^{-st}.dt + \int_2^\infty 0.e^{-st}.dt =$$

$$= \left[\frac{-2.e^{-st}}{s}\right]_0^1 + \left[\frac{1.e^{-st}}{s}\right]_1^2 = \frac{2}{s} - \frac{3.e^{-s}}{s} + \frac{1.e^{-2s}}{s} = F(s)$$

También se puede resolver el problema, en muchas ocasiones con menos esfuerzo, descomponiendo la función en suma de funciones de transformadas conocidas:

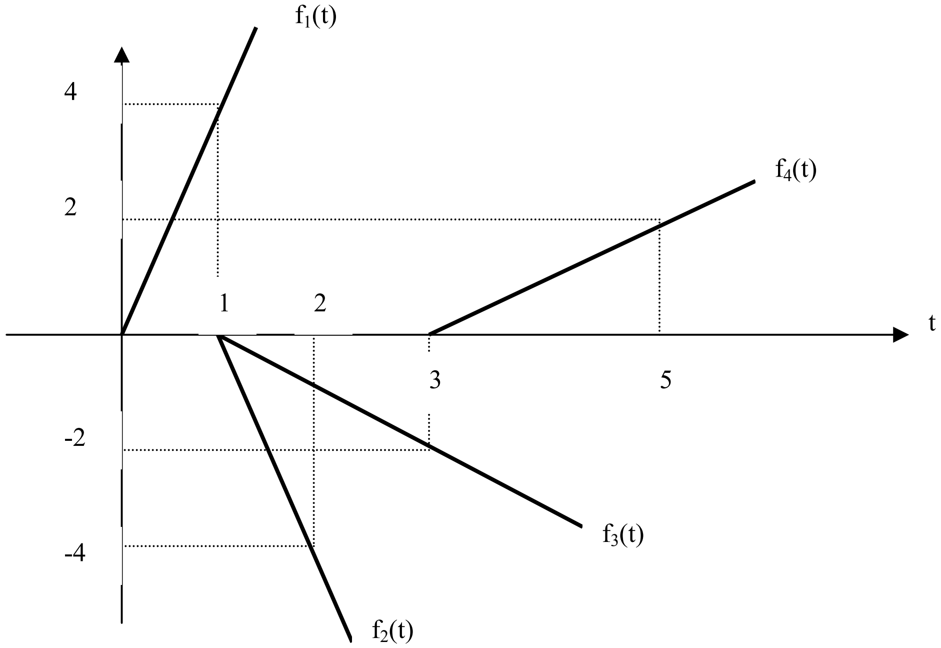


Puesto que $f(t) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t)$, aplicando la propiedad de linealidad se cumplirá que: $F(s) = F_1(s) + F_2(s) + F_3(s)$. Puesto que $f_2(t)$ y $f_3(t)$ son escalones trasladados en el tiempo uno y dos segundos respectivamente, y con amplitudes –3 y 1, sus transformadas de Laplace serán:

$F_1(s) = \frac{2}{s}$; $F_2(s) = - \frac{3.e^{-s}}{s}$; $F_3(s) = \frac{1.e^{-2s}}{s}$

Y por lo tanto $F(s) = \frac{2}{s} - \frac{3.e^{-s}}{s} + \frac{1.e^{-2s}}{s}$

B. En este caso la función puede descomponerse en suma de funciones rampa desplazadas en el tiempo:



Cuyas transformadas de Laplace son:

$F_1(s) = \dfrac{4}{s^2}$; $F_2(s) = \dfrac{-4.e^{-s}}{s^2}$; $F_3(s) = \dfrac{-1.e^{-s}}{s^2}$; $F_4(s) = \dfrac{1.e^{-3s}}{s^2}$

Aplicando la propiedad de linealidad se obtiene la transformada de la función f(t):

$F(s) = \dfrac{4}{s^2} - \dfrac{5.e^{-s}}{s^2} + \dfrac{1.e^{-3s}}{s^2}$

Como puede verse, la utilización de las propiedades de la Transformada de Laplace representa un método de resolución más rápido y seguro que la aplicación directa de la definición

PROBLEMA 3
Calcular las transformadas inversas de Laplace de las siguientes funciones:

a) F(s)= $\dfrac{(s+2)}{(s+3)(s+4)}$

b) F(s) = $\dfrac{(s+1)}{s.(s^2+2s+2)}$

c) F(s) = $\dfrac{(s+2)}{(s+1)^2}$

d) F(s) = $\dfrac{(s+1)}{s^2.(s+2).(s^2+2s+2)}$

El método que se va a utilizar consiste en descomponer la función en fracciones simples y hallar las transformadas inversas de cada una de dichas fracciones. Para ello es necesario calcular las raíces de la ecuación del denominador. En este caso las raíces están una de tipo real en 0 y 2 complejas conjugadas en -1±j. Al hacer la descomposición por fracciones simples las raíces complejas no se descomponen, permanecen juntas.

a) F(s) = $\dfrac{(s+2)}{(s+3)(s+4)} = \dfrac{A}{s+3} + \dfrac{B}{s+4}$

Identificando ambos numeradores:

s + 2 = As +4A+Bs + 3B

Igualando por potencias de s y resolviendo el sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} 1 = A + B \\ 2 = 4A + 3B \end{cases} \qquad \begin{matrix} A = -1 \\ B = 2 \end{matrix}$$

Por lo tanto la descomposición queda:

F(s) = $\dfrac{-1}{s+3} + \dfrac{2.s}{s+4}$

Cálculo de las transformadas inversas

$L^{-1}\left[\dfrac{-1}{s+3}\right]$ = $-u_0(t)\, e^{-3t}.+2\, u_0(t)\, e^{-4t}$ donde $u_0(t)$ es el escalón unitario

b) F(s) = $\dfrac{(s+1)}{s.(s^2+2s+2)} = \dfrac{A}{s} + \dfrac{Bs+C}{s^2+2.s+2}$

En este caso las raíces son una de tipo real en 0 y 2 complejas conjugadas en -1±j. Al hacer la descomposición por fracciones simples las raíces complejas no se descomponen, permanecen juntas.

Identificando ambos numeradores:

s + 1 = A.(s^2 + 2.s + 2) +s.(B.s + C)

Igualando por potencias de s y resolviendo el sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} 0 = A + B & B = -1/2 \\ 1 = 2.A + C & C = 0 \\ 1 = 2.A & A = 1/2 \end{cases}$$

Por lo tanto la descomposición queda:

$$F(s) = \frac{1/2}{s} - \frac{1/2.s}{s^2+2s+2}$$

Cálculo de las transformadas inversas

$$L^{-1}\left[\frac{1/2}{s}\right] = u_0(t).1/2$$ donde $u_0(t)$ es el escalón unitario

Para calcular la transformada inversa de una fracción con polos complejos, se realizarán las siguientes transformaciones:

$$\frac{1/2.s}{s^2+2s++2} = \frac{1/2.s}{(s+1)^2+1^2}$$ es decir se pone el denominador en forma de $(s+a)^2 + b^2$

A continuación se efectúa el cambio de variable S = s+1, es decir S = s+a, con lo que se obtiene:

$$\frac{1/2.S-1/2}{S^2+1}$$

De acuerdo con la propiedad de traslación de la transformada de Laplace:

$$L^{-1}\left[\frac{1/2.s}{(s+1)^2+1}\right] = e^{-t}.L^{-1}\left[\frac{1/2.S-1/2}{S^2+1}\right]$$

$$L^{-1}\left[\frac{1/2.S-1/2}{S^2+1}\right] = L^{-1}\left[\frac{1/2.S}{S^2+1}\right] - 1/2.\ L^{-1}\left[\frac{1}{S^2+1}\right] = \frac{1}{2}.\cos.t - \frac{1}{2}.\text{sen}.t$$

Por lo tanto:

$$L^{-1}\left[\frac{1/2.s}{(s+1)^2+1}\right] = \frac{1}{2}e^{-t}.[\cos.t - \text{sen}.t]$$

$$\text{Y } f(t) = \frac{1}{2}(1 - e^{-t}.[\cos.t - \text{sen}.t]) \qquad \text{para } t > 0$$

c) $F(s) = \dfrac{(s+2)}{(s+1)^2}$

Haciendo el cambio s+1 = S se obtiene:

$$F(S) = \frac{S+1}{S^2} = \frac{1}{S} + \frac{1}{S^2}$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{S} + \frac{1}{S^2}\right] = 1 + t \qquad \text{para } t > 0$$

Por lo tanto

$$L^{-1}[F(s)] = e^{-t}.(1+t) \qquad \text{para } t > 0$$

d) $F(s) = \dfrac{(s+1)}{s^2.(s+2).(s^2+2s+2)}$

Descomponiendo en fracciones simples:

$$F(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+2} + \frac{Ds+E}{s^2+2s+2}$$

Identificando coeficientes se obtiene:

$$F(s) = \frac{-1/8}{s} + \frac{1/4}{s^2} + \frac{-1/8}{s+2} + \frac{1/4s}{s^2+2s+2}$$

Y teniendo en cuenta los resultados anteriores:

$f(t) = L^{-1}[F(s)] = -1/8 + 1/4t - 1/8.e^{-2t} + 1/4(\cos.t - \text{sen}.t).e^{-t}$ para $t>0$

PROBLEMA 4

Las siguientes ecuaciones constituyen el modelo de un sistema con entradas x(t), p(t) y salida y(t):

$\frac{dy(t)}{dt}$ = m(t) – p(t)

m(t) + 3. $\frac{dm(t)}{dt}$ = 4.sen(x(t)-c(t))

c(t) = $\sqrt{y(t)}$

Linealizar dicho modelo en torno al punto de funcionamiento definido por x_0=1, p_0=2.

De las tres ecuaciones que forman el modelo, solo las dos últimas presentan no linealidades. Sin embargo el proceso a seguir es idéntico para las tres ecuaciones.

1. Cálculo del punto de equilibrio

Teniendo en cuenta que en dicho punto las derivadas se anulan, las ecuaciones de equilibrio serán:

$0 = m_0 - p_0$

$m_0 = 4.\mathrm{sen}(x_0 - c_0)$

$c_0 = \sqrt{y_0}$

junto con $x_0 = 1$ y $p_0 = 2$

Resolviendo este sistema se obtiene

$m_0 = 2$

$$\mathrm{sen}(x_0 - c_0) = \frac{1}{2} \Rightarrow x_0 - c_0 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x_0 - c_0 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

De entre todas las soluciones posibles para c_0 habrá que tomar la que tenga más sentido físico. En este caso se supondrá $c_0 = 1 - \frac{\pi}{6}$

$$y_0 = c_o^2 = (1 - \frac{\pi}{6})^2$$

2. Linealización

Una vez obtenidos los valores de todas las variables en el punto de equilibrio se puede proceder a linealizar el modelo. Desarrollando en serie de Taylor alrededor del punto de equilibrio y despreciando los términos no lineales se obtiene:

$$\frac{d\Delta y}{dt} = \Delta m - \Delta p$$

$$\Delta m + \frac{3d\Delta m}{dt} = 4\cos(x_0 - c_0)\Delta x - 4\cos(x_0 - c_0)\Delta c$$

$$\Delta c = \frac{1}{2\sqrt{y_0}}\Delta y$$

Como puede observarse, en el caso de la primera ecuación que ya era lineal, el proceso de linealización se reduce a un cambio de variables, sustituyendo las originales por sus incrementos respecto de los valores de equilibrio.
Sustituyendo valores el modelo linealizado queda:

$$\frac{d\Delta y}{dt} = \Delta m - \Delta p$$

$$\Delta m + \frac{3d\Delta m}{dt} = 2\sqrt{3}\Delta x - 2\sqrt{3}\Delta c$$

$$\Delta c = \frac{1}{2.(1-\pi/6)}\Delta y$$

PROBLEMA 5

Dado el sistema
y' + x.y +y = x^2 + 2
obtener el modelo lineal y la función de transferencia Y(s)/X(s) correspondiente al punto de funcionamiento definido por x_0=3.
Si la entrada x(t) pasa bruscamente de valer 3 a valer:

a) 3,2
b) 5

dibujar en cada caso la evolución de la señal y(t), comparando los valores finales obtenidos con el modelo linealizado, con los valores finales que se deducen del sistema original, comentando las diferencias.

Para el cálculo del modelo lineal es necesario conocer el valor de todas las variables en el punto de equilibrio. En el equilibrio se cumple:

$$x_0 y_0 + y_0 = x_0^2 + 2$$

$$y_0 = \frac{x_0^2 + 2}{x_0 + 1} \qquad \text{si } x_0 = 3 \qquad y_0 = \frac{9+2}{3+1} = \frac{11}{4}$$

Por lo tanto el modelo linealizado alrededor de dicho punto será:

$$\Delta y' + x_0 \Delta y + y_0 \Delta x + \Delta y = 2 x_0 \Delta x$$

es decir

$$\Delta y' + 3\Delta y + \frac{11}{4}\Delta x + \Delta y = 6\Delta x$$

La transformada de Laplace de esta ecuación es:

$$SY(s) + 4Y(s) = \frac{13}{4} X(s)$$

Y por lo tanto la función de transferencia Y(s)/X(s) es:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{13/4}{s+4}$$

Las variaciones indicadas para x(t) suponen para Δx(t) la siguiente evolución:

a) Δx(t) varía bruscamente de 0 a 0,2 unidades
b) Δx(t) varía bruscamente de 0 a 2 unidades

y por lo tanto X(s) valdrá en cada uno de los casos

a) X(s) = 0,2/s
b) X(s) = 2/s

si se toma como origen de tiempos el instante de la variación. Por lo tanto se cumplirá:

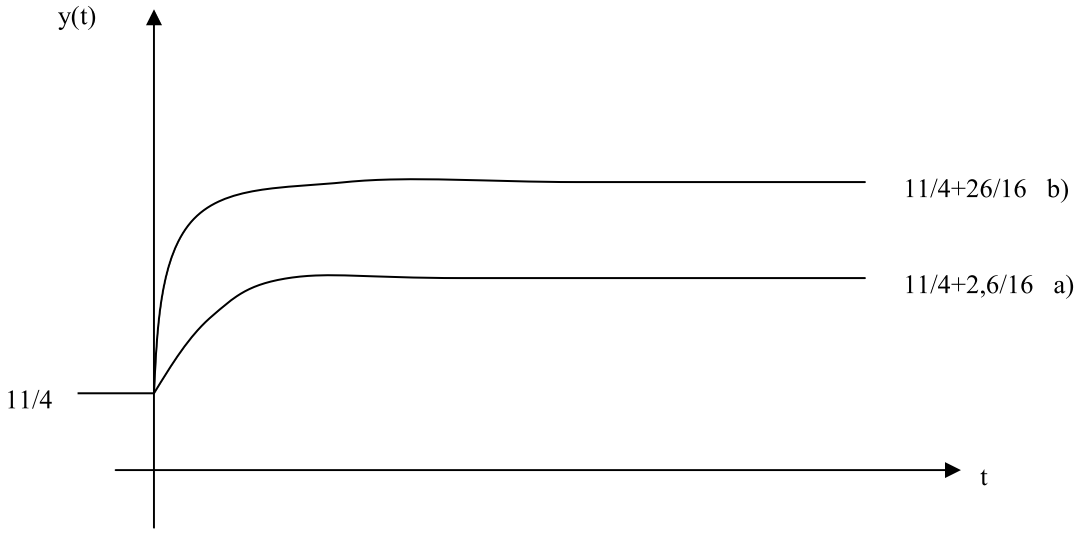
a) $Y(s) = \frac{0,2}{s} \cdot \frac{13/4}{s+4}$

b) $Y(s) = \frac{2}{s} \cdot \frac{13/4}{s+4}$

y calculando las antitransformadas

a) Δy(t) = 2,6/16[1-e^{-4t}]
b) Δy(t) = 26/16[1-e^{-4t}]

La representación de estas señales es la siguiente:



Los valores finales obtenidos con el modelo linealizado se deducen aplicando el teorema del valor final:

$\Delta y(\infty) = \lim_{s \to 0} .s.Y(s)$ $\qquad y(\infty) = 11/4 + \Delta y(\infty)$

a) $y(\infty) = 11/4 + 2{,}6/16 = 2{,}9125$

b) $y(\infty) = 11/4 + 26/16 = 4{,}375$

Los valores finales del sistema no lineal se deducen calculando los nuevos valores de equilibrio para u_0=3,2 y para u_0=5

$y_0 = \dfrac{x_0^2 + 2}{x_0 + 1}$ a) y_0= 2,9143 b) y_0 = 4,5

La diferencia entre los valores finales del sistema original y del linealizado es mayor en el segundo caso que en el primero: Esto es debido a que la señal de entrada u(t) está sometida a una mayor variación respecto del punto de funcionamiento en este segundo caso y a que el modelo linealizado solo es preciso en un entorno de dicho punto de funcionamiento.
Por lo tanto cunato mayor es la variación de la señal de entrada alrededor del punto de funcionamiento, tanto menor es la precisión del modelo linealizado.

PROBLEMA 6

Dado el sistema

$$\frac{dy(t)}{dt} + u(t).y(t) = u^2(t) + 5$$

se pide linealizarlo en torno a los puntos de funcionamiento a) u_0=10

b) u_0=2

Dibujar con detalle la señal y(t) cuando u(t) varía bruscamente

a) de 10 a 11 unidades
b) de 2 a 3 unidades

¿En cual de los puntos de funcionamiento se aproxima mejor el sistema linealizado al real?

- Cálculo del punto de equilibrio

En el equilibrio la ecuación que caracteriza al sistema es

$u_0 y_0 = u_0^2 + 5$ es decir $y_0 = \dfrac{u_0^2 + 5}{u_0}$

a) $y_0 = 10{,}5$ $u_0 = 10$

b) $y_0 = 4{,}5$ $u_0 = 2$

-

- Linealización

$$\frac{d\Delta y(t)}{dt} + u_0 \Delta y(t) + y_0 \Delta u(t) = 2u_0 \Delta u(t)$$

a) $\dfrac{d\Delta y(t)}{dt} + 10\Delta y(t) + 10{,}5\Delta u(t) = 20\Delta u(t)$

b) $\dfrac{d\Delta y(t)}{dt} + 2\Delta y(t) + 4{,}5\Delta u(t) = 4\Delta u(t)$

Para calcular el valor de y(t) ante variaciones de la señal u(t) vamos a calcular las transformadas de Laplace Y(s) de Δy(t). Para ello es necesario calcular la función de transferencia Y(s)/U(s) del sistema así como el valor de U(s).

La transformada de Laplace de la ecuación del sistema es:

a) sY(s)+10Y(s)+10,5U(s) = 20 U(s)
b) sY(s)+2Y(s) = -0,5U(s)

con lo que la función de transferencia es la siguiente:

a) $\dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{9{,}5}{s+10}$ b) $\dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{-0{,}5}{s+2}$

Cálculo de U(s)

U(s) es la transformada de Laplace de la señal Δu(t) que varía en el primer caso de 0 a 1 y en el segundo también de 0 a 1 unidad. Por lo tanto en ambos casos U(s)=1/s al ser la variación brusca.

Por lo tanto el valor de Y(s) es en cada caso:

a) $Y(s) = \frac{1}{s}.\frac{9,5}{s+10}$ b) $Y(s) = \frac{1}{s}.\frac{-0,5}{s+2}$

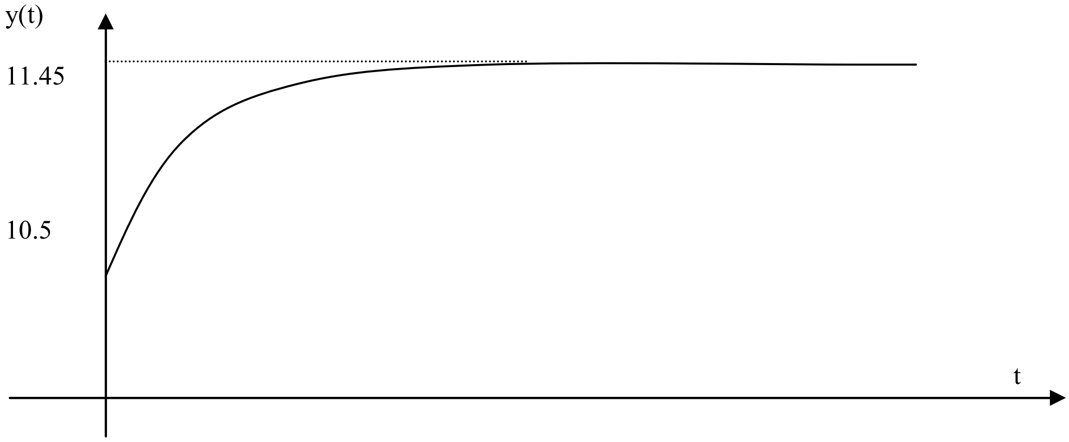
- Cálculo de la señal de salida

a) $Y(s) = \frac{9,5}{s(s+10)} = \frac{0,95}{s} + \frac{-0,95}{s+10}$

$\Delta y(t) = 0,95 - 0,95.e^{-10t} = 0,95\left[1 - e^{-10t}\right]$ para t>0

El origen de tiempos de esta señal coincide con el instante de variación de la señal u(t)

$y(t) = 10,5 + 0,95\left[1 - e^{-10t}\right]$

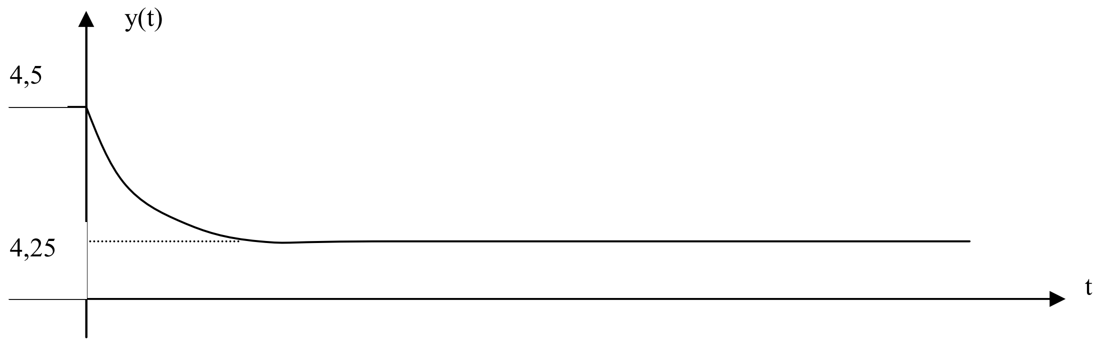


b) $Y(s) = \frac{-0,5}{s(s+2)} = \frac{-0,25}{s} + \frac{0,25}{s+2}$

$\Delta y(t) = -0,25 + 0,25.e^{-2t} = -0,25\left[1 - e^{-2t}\right]$ para t>0

El origen de tiempos de esta señal coincide con el instante de variación de la señal u(t)

$y(t) = 4,5 - 0,25\left[1 - e^{-2t}\right]$



Para comparar el comportamiento del sistema linealizado y el del sistema real, vamos a comparar los valores finales de la respuesta y(t) de ambos sistemas.

- Cálculo de los valores finales

- *Sistema linealizado*

Aplicando el teorema del valor final a Y(s) se obtiene el valor final de la señal Δy(t) en cada uno de los dos casos:

a) $\Delta y(\infty) = \lim_{s\to 0} s.\frac{1}{s}.\frac{9{,}5}{s+10} = 0{,}95$

$y(\infty) = 10{,}5+0{,}95 = 11{,}45$

b) $\Delta y(\infty) = \lim_{s\to 0} s.\frac{1}{s}.\frac{-0{,}5}{s+2} = -0{,}25$

$y(\infty) = 4{,}5-0{,}25 = 4{,}25$

- *Sistema real*

Calculando, en la ecuación no lineal, el valor de y(t) en el equilibrio cuando u_0=11 y cuando u_0 =3, obtenemos los valores finales del sistema real

$y_0 = \frac{u_0^2+5}{u_0}$ a) u_0 =11 y_0 = 11,4545

b) u_0= 3 y_0 = 4,6667

Estos valores muestran que el modelo linealizado se aproxima más al modelo no lineal en el primer punto de funcionamiento, donde la curva y su tangente se aproximan más.

PROBLEMA 7

Dado el sistema definido por las ecuaciones:

$$E(t) = X(t) - 4Y(t)$$

$$\frac{dA(t)}{dt} + 3A(t) = 4E(t)$$

$$4\frac{dB(t)}{dt} + 5B(t) = 4A(t) + 5E(t)$$

$$\frac{dY(t)}{dt} = 5B(t)$$

en las que X(t) representa la variable de entrada, representar el diagrama de bloques del sistema y calcular la función de transferencia Y(s)/X(s).

Dado que las cuatro ecuaciones del modelo del sistema son lineales, se obtendrán en primer lugar las ecuaciones transformadas de Laplace del sistema. Para ello se supondrá, como de costumbre, condiciones iniciales nulas, con lo que resulta:

$$E(s) = X(s) - 4Y(s)$$

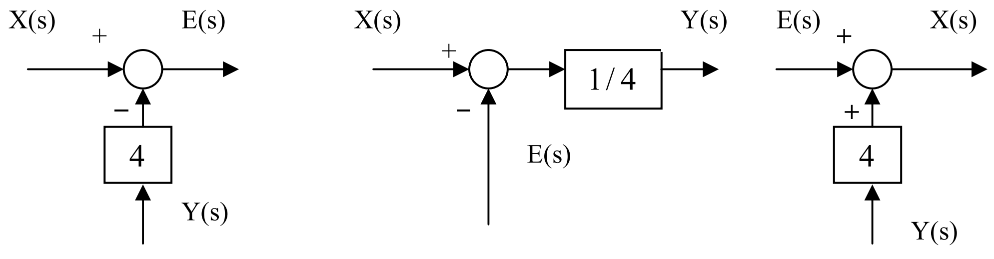
$$sA(s) + 3A(s) = 4E(s)$$

$$4sB(s) + 5B(s) = 4A(s) + 5E(s)$$

$$sY(s) = 5B(s)$$

Una vez puestas las ecuaciones en forma de transformadas de Laplace, puede iniciarse la construcción del diagrama de bloques. Para ello se deberá comenzar por representar cualquiera de las ecuaciones que contenga alguna de las variables de entrada. En este caso la única señal de entrada es X(t) y por lo tanto la representación se iniciará por la primera ecuación.

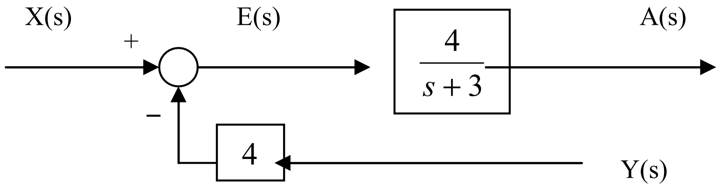
Esta ecuación puede representarse de las tres maneras siguientes:



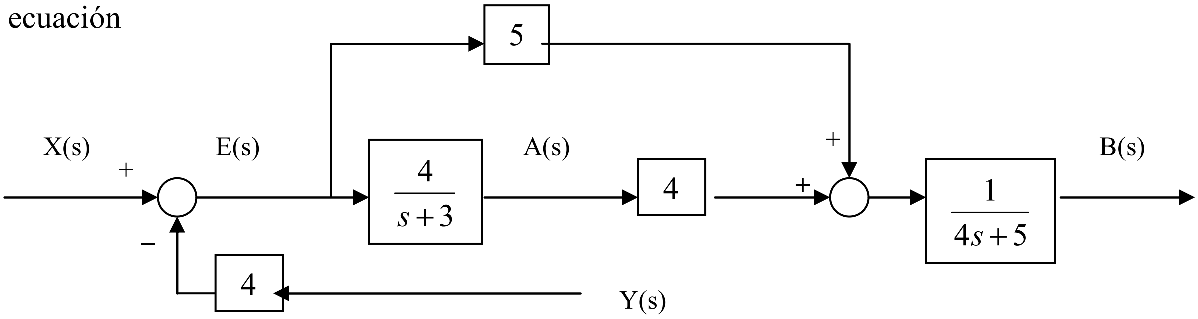
Sin embargo, la última de las representaciones no es válida, puesto que en ella la señal X(s) no aparece como señal de entrada, al ser sus valores consecuencia de los valores que toman las señales E(s) e Y(s). En cuanto a las dos primeras representaciones, cualquiera de ellas es correcta desde un punto de vista matemático, sin embargo sólo la primera de ellas da lugar a que todos los bloques del diagrama sean físicamente realizables por lo que es precisamente esta la elegida.

A partir por lo tanto de la primera representación, las distintas etapas en el dibujo del diagrama de bloques son las siguientes:

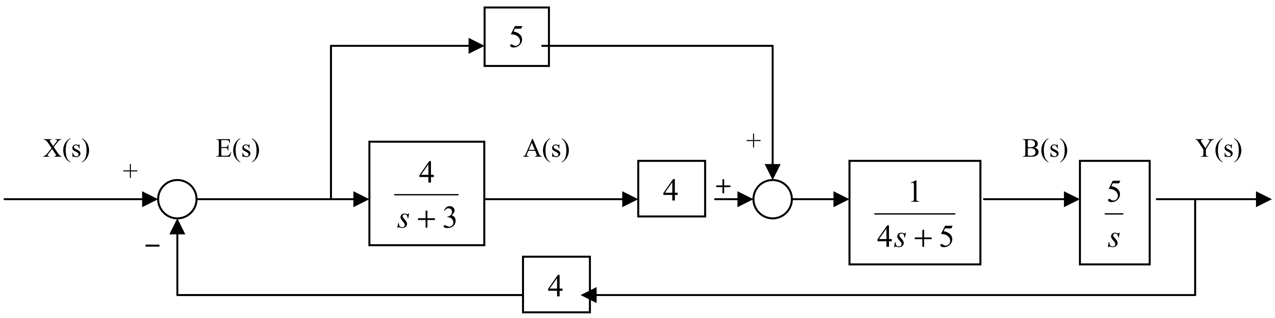
2ª ecuación



- 3ª ecuación

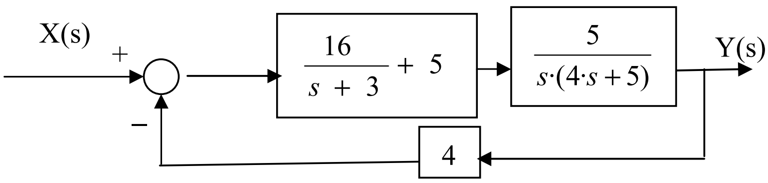


- 4ª ecuación

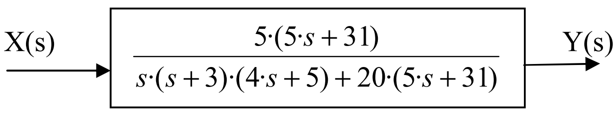


Como puede observarse en esta representación todos los bloques son físicamente realizables, por lo que es preferible a otras representaciones, válidas desde un punto de vista matemático, pero que no representan las relaciones de causalidad en cada uno de los subsistemas del sistema global.

Multiplicando los bloques en serie y sumando las ramas en paralelo:



Y volviendo a multiplicar los bloques en serie y operando el lazo de realimentación:

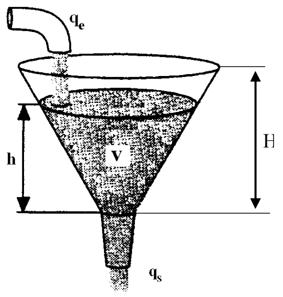


Por lo tanto:

$$\frac{Y(s)}{X(x)} = \frac{25 \cdot s + 155}{4 \cdot s^3 + 17 \cdot s^2 + 115 \cdot s + 620}$$

PROBLEMA 8

Se dispone de un depósito cónico como el de la figura, en el que el volumen v(t) de líquido contenido es proporcional, con constante K, al cubo de la altura h(t) del líquido en el depósito. El depósito se llena con un caudal $q_e(t)$ y se vacía con otro caudal $q_s(t)$. Se pide
:



a) Linealizar las ecuaciones entorno al punto de equilibrio $q_{e0}=1$. Dibujar el diagrama de bloques considerando $q_e(t)$ como entrada y q_s como salida. Obtener la función de transferencia entre $q_s(t)$ y $q_e(t)$ (dejar resultados en función de B y K).
b) Calcular el valor final de $q_s(t)$ si $q_e(t)$ se incrementa en una unidad de manera brusca.
c) Con el mismo incremento en $q_e(t)$ ¿Cuál debe de ser el valor de la altura H para que el líquido llene completamente el depósito sin rebosar?

Como ecuaciones simplificadas se tomarán las siguientes:

Del enunciado se deduce que el volumen será: $v(t) = K\cdot h^3(t)$

La diferencia entre el caudal que entra y el que sale incrementa el volumen de líquido en el depósito:

$$q_e(t) - q_s(t) = \frac{dv(t)}{dt}$$

El caudal de salida puede expresarse como:

$$q_s(t) = B\cdot\sqrt{h(t)}$$

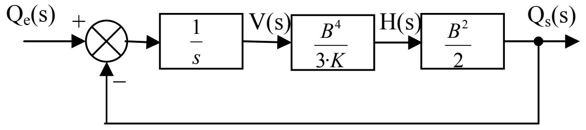
donde B es una constante que depende de g, del área del orificio de salida y del coeficiente de contracción de vena.

SOLUCIÓN:

a) Es preciso linealizar las dos ecuaciones no lineales del sistema y determinar h_0 para el punto de funcionamiento dado. Finalmente, se sustituye el valor de h_0 y se pasa a transformadas de Laplace:

$$\begin{cases} \Delta v(t) = K\cdot 3\cdot h_0^2\cdot\Delta h(t) \\ \Delta q_e(t) - \Delta q_s(t) = \dfrac{d\Delta v(t)}{dt} \\ \Delta q_s(t) = B\cdot\dfrac{1}{2\cdot\sqrt{h_0}}\cdot\Delta h(t) \end{cases} \qquad \begin{array}{l} q_{s0} = q_{e0} = 1 \\ h_0 = \dfrac{q_{s0}^2}{B^2} = \dfrac{1}{B^2} \\ v_0 = K\cdot h_0^3 = \dfrac{K}{B^6} \end{array} \qquad \begin{cases} V(s) = \dfrac{3\cdot K}{B^4}\cdot H(s) \\ Q_e(s) - Q_s(s) = s\cdot V(s) \\ Q_s(s) = \dfrac{B^2}{2}\cdot H(s) \end{cases}$$

El diagrama de bloques dará la función de transferencia:



$$M(s) = \frac{Q_s(s)}{Q_e(s)} = \frac{\dfrac{B^6}{6\cdot K\cdot s}}{1+\dfrac{B^6}{6\cdot K\cdot s}} = \frac{\dfrac{B^6}{6\cdot K}}{s+\dfrac{B^6}{6\cdot K}}$$

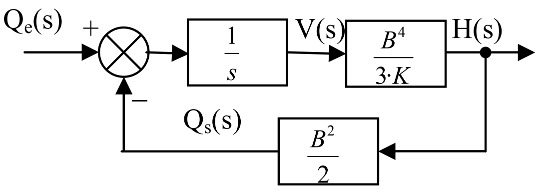
b) Se puede aplicar el teorema del valor final, teniendo en cuenta que el sistema es estable y que $q_e(t)$ es un escalón unitario:

$$\Delta q_s(\infty) = \lim_{t\to\infty} \Delta q_s(t) = \lim_{s\to 0} s\cdot Q_s(s) = \lim_{s\to 0} s\cdot Q_e(s)\cdot M(s) = \lim_{s\to 0} s\cdot\frac{1}{s}\cdot\frac{\frac{B^6}{6\cdot K}}{s+\frac{B^6}{6\cdot K}} = 1$$

Por lo tanto:

$$q_s(\infty) = q_{s0} + \Delta q_s(\infty) = 1 + 1 = 2$$

c) En este caso habrá que buscar la función de transferencia H(s)/Q$_e$(s):



$$M_H(s) = \frac{H(s)}{Q_e(s)} = \frac{\frac{B^4}{3\cdot K\cdot s}}{1+\frac{B^6}{6\cdot K\cdot s}} = \frac{\frac{B^4}{3\cdot K}}{s+\frac{B^6}{6\cdot K}}$$

De nuevo, se puede aplicar el teorema del valor final, teniendo en cuenta que el sistema es estable y que q$_e$(t) es un escalón unitario:

$$\Delta h(\infty) = \lim_{t\to\infty} \Delta h(t) = \lim_{s\to 0} s\cdot H(s) = \lim_{s\to 0} s\cdot Q_e(s)\cdot M_H(s) = \lim_{s\to 0} s\cdot\frac{1}{s}\cdot\frac{\frac{B^4}{3\cdot K}}{s+\frac{B^6}{6\cdot K}} = \frac{2}{B^2}$$

Por lo tanto:

$$h(\infty) = h_0 + \Delta h(\infty) = \frac{1}{B^2} + \frac{2}{B^2} = \frac{3}{B^2}.$$

Para que el deposito no rebose su altura total deberá ser **H=3/B^2**.

PROBLEMA 9

Las siguientes ecuaciones representan el modelo matemático de un sistema. Considerando a u(t) como la variable de entrada y a y(t) como la de salida y sabiendo que inicialmente el sistema está en un punto de equilibrio definido por el valor de $f(t)=f_0$ para $t<0$:

$$u(t) = R\cdot i(t) + L\cdot\frac{di(t)}{dt}$$
$$f(t) = D\cdot i(t)$$
$$\frac{dy(t)}{dt} = K_1\cdot f(t) + K_2\cdot f^2(t)$$

a) Obtenga la forma en transformadas de Laplace de cada una de las tres ecuaciones.
b) Represente en un diagrama de bloques las tres ecuaciones del sistema.
c) Obtenga la función de transferencia del sistema.
d) ¿De que orden es la función de transferencia obtenida?

SOLUCIÓN

a) Sólo la tercera ecuación no es lineal. Por lo tanto, las ecuaciones en transformadas de Laplace son:

$$U(s) = R\cdot I(s) + L\cdot s\cdot I(s)$$
$$F(s) = D\cdot I(s)$$
$$s\cdot Y(s) = K_1\cdot F(s) + 2\cdot K_2\cdot f_0\cdot F(s)$$

b) El diagrama de bloques correspondiente será:

$$\xrightarrow{U(s)} \boxed{\frac{1}{R+L\cdot s}} \xrightarrow{I(s)} \boxed{D} \xrightarrow{F(s)} \boxed{\frac{K_1+2\cdot K_2\cdot f_0}{s}} \xrightarrow{Y(s)}$$

c) La función de transferencia será:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{D\cdot(K_1 + 2\cdot K_2\cdot f_0)}{L\cdot s^2 + R\cdot s}$$

d) Es sistema es por lo tanto de segundo orden.