Regulación y Control de Máquinas Navales (RCMN)

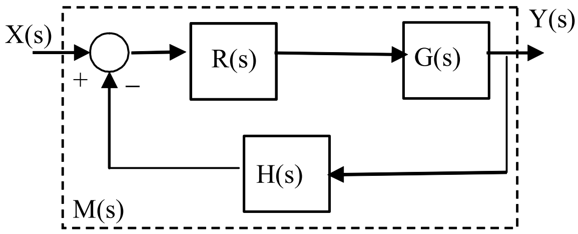
Problemas Resueltos

Módulo 3. Análisis y Control de Sistemas en Cadena Cerrada

PROBLEMA 1:

En el sistema de la figura las funciones de transferencia representadas tienen las siguientes características:

- R(s) es una función de transferencia con un único polo y ningún cero.
- G(s) es un sistema de primer orden, sin ceros, con constante de tiempo T=10 segundos y ganancia estática K=36
- H(s) es un sistema de primer orden sin ceros.
- M(s) tiene entre otros elementos un cero en s=-20.



Construya uno de los posibles ejemplos para las funciones R(s), G(s) y H(s) que bajo las condiciones anteriores cumpla con las siguientes especificaciones del sistema:

- El sistema tiene error de posición cero: $e_p=0$
- El sistema tiene ganancia estática 5 (la señal de entrada x(t) varía entre ±10V para que y(t) varíe entre ±50rad/s, es decir, cuando la entrada es 5V la salida es 25rad/s)
- El sistema es estable.

SOLUCIÓN:

$$G(s) = \frac{K_G}{1+T\cdot s} \qquad T = 10 \qquad K_G = 1+$$

(D

$$\boxed{G(s) = \frac{36}{1+10\cdot s}}$$

$$H(s) = \frac{K_H}{s+20} \leftarrow \text{único cero de: } M(s) = \frac{\text{polos } H(s) + \text{ceros } G(s)}{\text{polos de } M(s)}$$

para que se cumpla la relación entre la señal de entrada y salida (ganancia 5)

$$\lim_{s \to 0} H(s) = \frac{1}{5} = \frac{K_H}{20} \Rightarrow K_H = 4$$

$$\boxed{H(s) = \frac{4}{s+20}}$$

$R(s) = \frac{K_R}{\text{polo}}$ → el sistema $R(s)\cdot G(s)$ ha de ser de tipo 1 ⇒ R(s) tiene que tener un polo en el origen (integrador) ya que G(s) no lo tiene.

$$R(s) = \frac{K_R}{s}$$

Como el sistema ha de ser estable:

$$\text{Ec. Caracter.} \Rightarrow 1 + G(s)R(s)H(s) = 0 \Rightarrow 1 + \frac{K_R}{s}\cdot\frac{36}{(1+10s)}\cdot\frac{4}{s+20} = 0$$

$$10s^3 + 201s^2 + 20s + 144\cdot K_R = 0 \leftarrow \text{Routh}$$

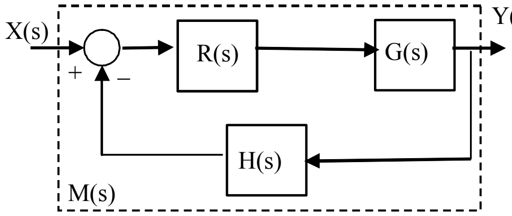
1) $K_R > 0$

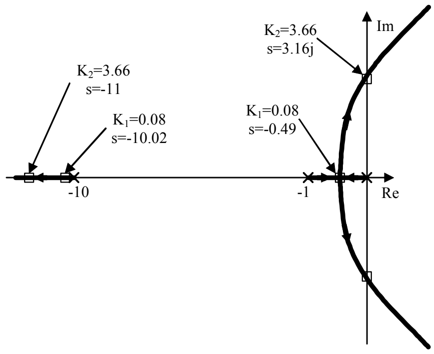
2)

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 10 & 20 \\ s^2 & 201 & 144\cdot K_R \\ s^1 & \frac{4020-1440K_R}{201} & \\ s^0 & 144\cdot K_R & \end{array} \Rightarrow \underline{K_R < 2'79} \quad \text{p.ej } \boxed{R(s) = \frac{2}{s}}$$

PROBLEMA 2:
Dado el sistema de la figura:

$$R(s) = K \quad G(s) = \frac{3}{s(s+1)} \quad H(s) = \frac{10}{s+10}$$





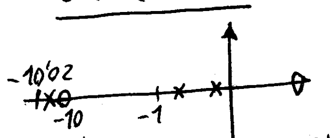
a) ¿Cuántos polos y ceros presenta la función de transferencia de M(s)?
b) ¿Cómo es el transitorio de la respuesta y(t) del sistema, para los distintos valores de K entre 0 e infinito, ante una entrada escalón en x(t)?
c) ¿A qué valor tiende y(t) en régimen permanente cuando K=1 y x(t) es un escalón de 3 unidades?
d) ¿Cuál es el error que presenta el sistema ante la entrada del apartado anterior.

SOLUCIÓN:

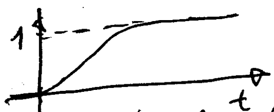
a) $$M(s) = \frac{R(s)G(s)}{1+R(s)G(s)H(s)} = \frac{K\frac{3}{s(s+1)}}{1+K\frac{3}{s(s+1)}\cdot\frac{10}{s+10}} = \frac{K\cdot 3\cdot(s+10)}{s(s+1)(s+10)+30\cdot K}$$

Numerador: Grado 1 ⇒ 1 cero
Denominador: Grado 3 ⇒ 3 polos

b) $0 < K < K_1$



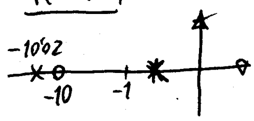
polos y ceros de M(s)



Respuesta al escalón unitario

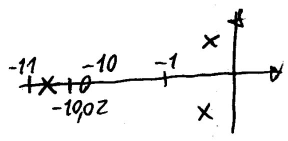
Sistema Sobreamortiguado de segundo orden con una pareja polo-cero muy próximos entre sí y alejados del origen de coordenadas por lo que su efecto sobre el transitorio es prácticamente nulo

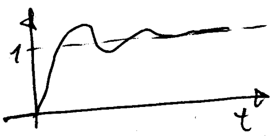
$K = K_1$



Sistema Críticamente amortiguado (Las mismas consideraciones sobre la pareja polo-cero adicional)

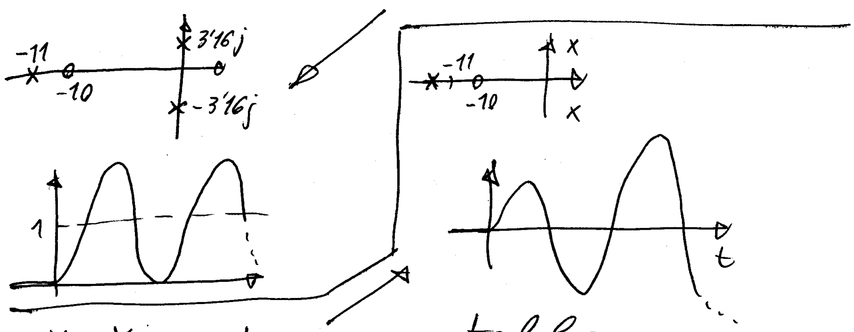
$K_1 < K < K_2$





Sistema Subamortiguado (2º Orden con dos polos complejos conjugados) La pareja polo-cero adicional está más alejada entre sí pero lejos del origen. Su efecto es casi nulo sobre el transitorio. En todo caso el cero (más próximo que el polo) puede hacer la respuesta del sistema más rápida, $t_p\downarrow$, y subamortiguada $M_p\uparrow$.

$K = K_2$ Sistema marginalmente estable.



$K_2 < K$ Sistema inestable

c) $X(s) = \frac{3}{s}$ $\quad Y(s) = M(s)X(s) = \frac{3}{s} \cdot \frac{K \cdot 3(s+10)}{s(s+1)(s+10)+30K}$

Si existe $y(\infty)$ (sistema estable) entonces:

$$\boxed{y(\infty) = \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} s\,Y(s) = \lim_{s\to 0} \frac{3 \cdot K \cdot 3(s+10)}{s(s+1)(s+10)+30K} = \frac{90K}{30K} = 3}$$

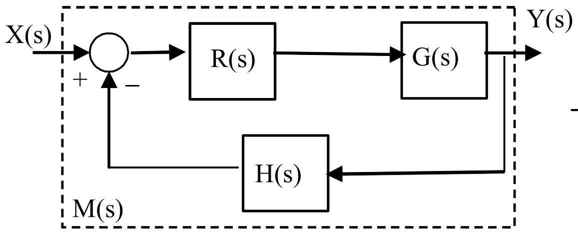
d) $G(s)\cdot R(s)$ es de Tipo 1, luego el error de posición (error ante una entrada escalón) es $\underline{e_p = 0}$.

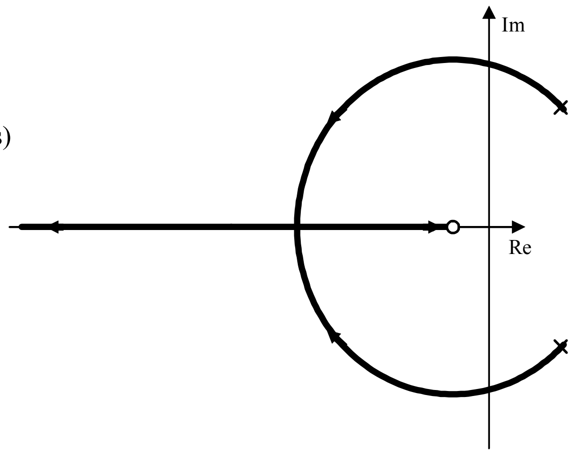
Esto mismo se deduce del apartado anterior, ya que siendo la ganancia de la realimentación $h_0 = \lim_{s\to 0} H(s) = 1$, la salida $y(t)$ tiende en régimen permanente a $y(\infty) = 3$ ante un escalón de 3 unidades.

PROBLEMA 3:

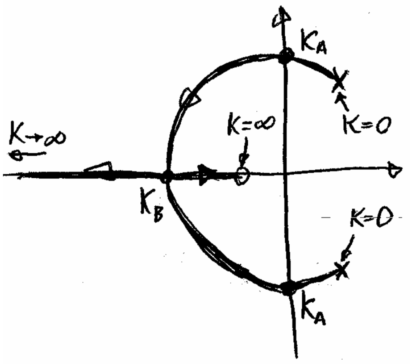
En el sistema de la figura R(s)=K>0. Sabiendo que el sistema en bucle cerrado M(s) presenta sólo dos polos cuya disposición en función de K>0 representan las ramas del lugar de las raíces representado, indicar que pasa con el sistema en bucle cerrado cuando K aumenta bajo el punto de vista de:

- La estabilidad
- El régimen permanente
- El régimen transitorio





SOLUCIÓN:



Estabilidad

El sistema será inestable para valores bajos de K, en concreto: inestable si $0<K<K_A$ y será estable para el resto de valores $K_A<K\leq\infty$

Régimen Permanente:

La precisión en régimen permanente depende generalmente de K. Los errores de regimen permanente que presente el sistema ante entradas escalón, rampa o parábola según el caso y el tipo del sistema, serán tanto menores cuanto mayor sea el valor de K.

Régimen Transitorio:

Una vez que el sistema es estable, $K_A < K \leq \infty$ el sistema presenta diferentes comportamientos transitorios en función de K.

$K = K_A$ sistema marginalmente estable

$K_A < K < K_B$ sistema subamortiguado

$K = K_B$ sistema críticamente amortiguado

$K_B < K \leq \infty$ sistema sobreamortiguado

En todos los casos, el sistema en lucle cerrado presenta dos polos.

Cuando K↑ aumenta en el tramo $K_A < K < K_B$ la sobreoscilación disminuye, Mpk y el tiempo de establecimiento disminuye, tsk. Mientras el tiempo de pico tp, primero disminuye ligeramente y luego aumenta.

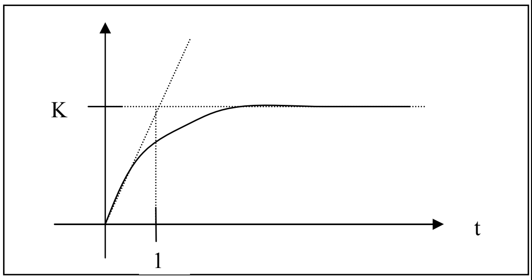
Cuando K↑ aumenta en el tramo $K_B < K \leq \infty$, el sistema tiene cada vez una constante de tiempo mayor, su respuesta transitoria es cada vez más lenta.

PROBLEMA 4:
La respuesta de un sistema G(s) ante impulso unitario (impulso de Dirac, Δ(s)=1) viene representada en la figura, donde K es un parámetro positivo.

Este sistema se realimenta negativamente mediante un captador H(s), de ganancia estática 10 y constante de tiempo 0,1 segundos.

Se pide:

1. Estudiar la estabilidad de G(s)
2. Calcular las funciones de transferencia G(s) y H(s).
3. Dibujar el diagrama de bloques del sistema realimentado
4. Dibujar, aproximadamente el lugar de las raíces del sistema realimentado.
5. Estudiar la estabilidad del sistema realimentado
6. Representar de forma aproximada la respuesta del sistema realimentado ante entrada escalón unitario, cuando
    a. K toma valores pequeños
    b. K toma valores intermedios
    c. K toma valores grandes



Caracterizar sobre dichos dibujos el régimen permanente y el transitorio de la respuesta en cada uno de los casos.

SOLUCIÓN:

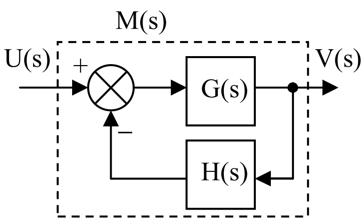
1. El sistema G(s) tiene una respuesta ante impulso similar a la integral de la respuesta que tendría de un sistema de primer orden ante ese impulso. Eso quiere decir que G(s) tiene un integrador (un polo en el origen) por lo que se trata de un sistema **Limitadamente Estable**.

2. La respuesta y(t) es similar a la respuesta al escalón (1/s) de un sistema de primer orden (K/(1+T·s)), cuya transformada de Laplace sería: Y(s) = (1/s)· K/(1+T·s) , siendo T=1. Como en este caso la entrada x(t) es un impulso de transformada X(s)=1:

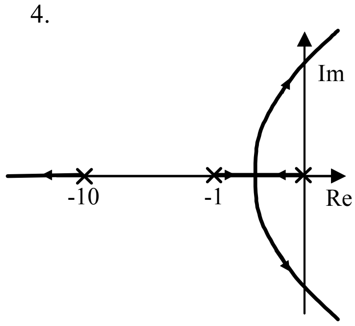
Y(s) = X(s)· G(s) = (1/s)·K/(1+T·s) ⇒ G(s) = K/(s·(1+T·s)) ⇒ **G(s) = K/(s·(1+s))**

Por su parte: **H(s) = 10/(1+0.1·s)**

3.



4.



5. Visto el lugar de las raíces, el sistema será estable para valores de K>0 pequeños ya que si K aumenta demasiado habrá dos polos inestables en M(s), los polos que siguen las ramas que pasan a la parte real positiva del plano complejo.

6.

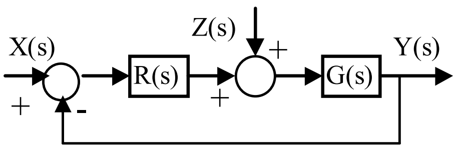
a) M(s) tendrá tres polos reales, uno de ellos más a la izquierda de -10 con poca influencia en el régimen transitorio de la respuesta, por lo que la respuesta será similar a la de un sistema de segundo orden sobreamortiguado.

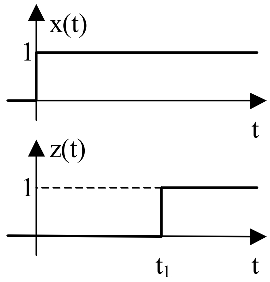
b) M(s) tendrá dos polos complejos conjugados estables (si K es suficientemente pequeña) y uno real más a la izquierda de -10 con poca influencia en el régimen transitorio de la respuesta, por lo que la respuesta será similar a la de un sistema de segundo orden subamortiguado.

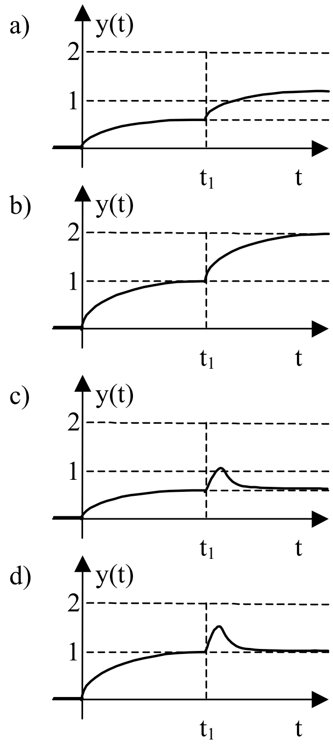
c) M(s) tendrá dos polos complejos conjugados inestables (si K es demasiado grande) y uno real más a la izquierda de -10, por lo que la respuesta del sistema será inestable.

PROBLEMA 5:

Dado el siguiente sistema y las señales de entrada x(t) y z(t) representadas, indique razonadamente a que tipo de respuesta y(t) ("a)", "b)", "c)" y/o "d)") puede corresponder a cada una de las combinaciones de los tipos de G(s) y R(s) indicadas:







a) G(s) es de tipo 1 y R(s) es de tipo 0.
b) G(s) es de tipo 1 y R(s) es de tipo 1.
c) G(s) es de tipo 0 y R(s) es de tipo 0.
d) G(s) es de tipo 0 y R(s) es de tipo 1.

SOLUCIÓN

a) La respuesta de la gráfica "a)" es posible en el caso "3", cuando G(s) y R(s) son de tipo 0 y por lo tanto existirá error de posición en régimen permanente ante ambas entradas.

b) La respuesta de la gráfica "b)" es posible para el caso "1", ya que al ser G(s) de tipo 1 se anulará el error de posición en régimen permanente, pero no se anulará el efecto de la perturbación z(t) sobre el régimen permanente al ser R(s) de tipo 0.

c) La situación de la gráfica "c)" no es posible en ninguno de los casos de tipo de G(s) y R(s) presentados.

d) La respuesta de la gráfica "d)" es posible siempre que R(s) sea de tipo 1, es decir en los casos "2" y "4", ya que de esa manera desaparece el error de posición en régimen permanente, y el sistema no acusa el efecto de la perturbación z(t) una vez que se alcanza de nuevo el régimen permanente.