Tema 5

Análisis de los Sistemas Realimentados

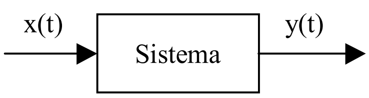
Indice

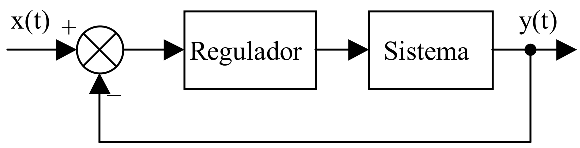
Análisis de los Sistemas Realimentados

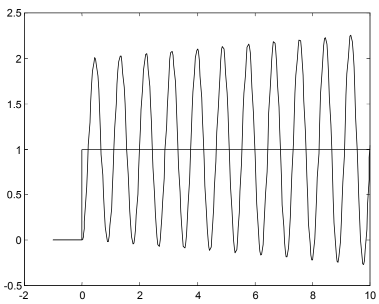
¿Para qué realimentamos un sistema?

- Mejorar la Estabilidad (Criterio de Routh):
  - Conseguir un sistema estable a partir de uno inestable.
  - Mejorar la estabilidad de un sistema estable.
- Precisión en Régimen Permanente (Calculo de Errores):
  - Seguimiento, sin error en régimen permanente, de una señal de referencia.
  - Eliminar el efecto de perturbaciones sobre la salida del sistema.
- Respuesta Transitoria Adecuada (Lugar de las Raíces):
  - Transitorio suficientemente rápido.
  - Amortiguamiento adecuado.

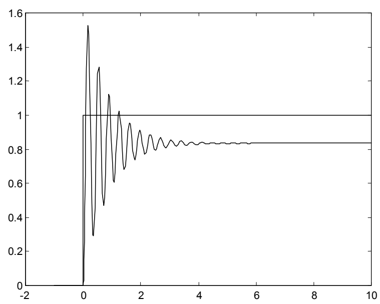
Mejorar la Estabilidad

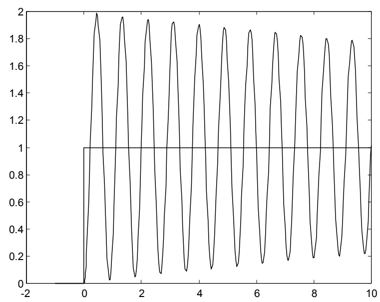




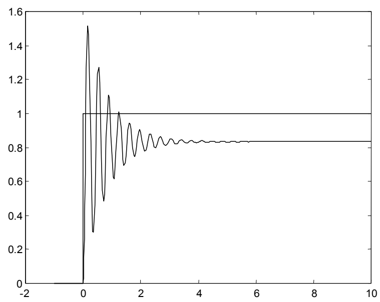


Sistema inestable -> Sistema estable



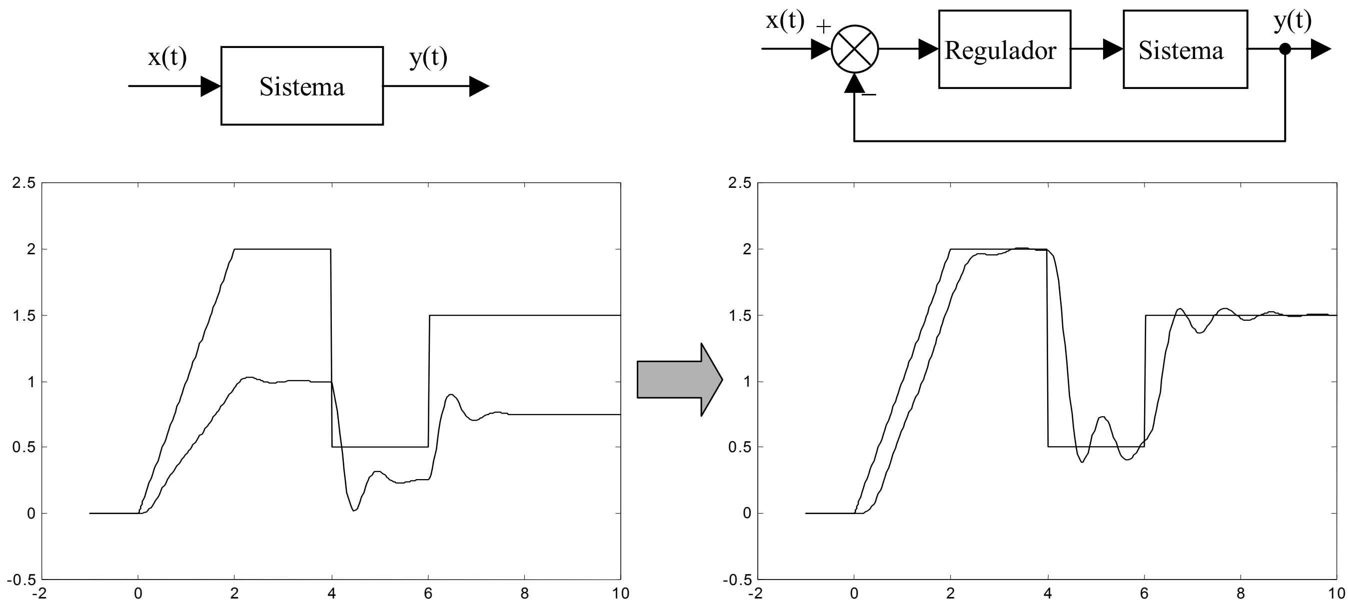


Poco estable -> Más estable



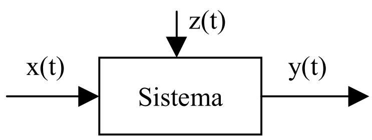
Precisión en Régimen Permanente (I)

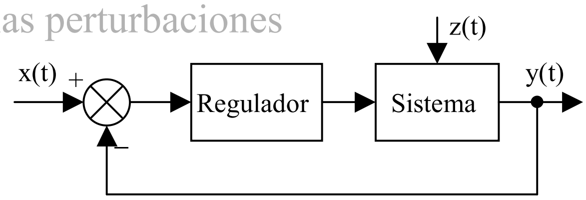
Seguimiento de una señal de referencia

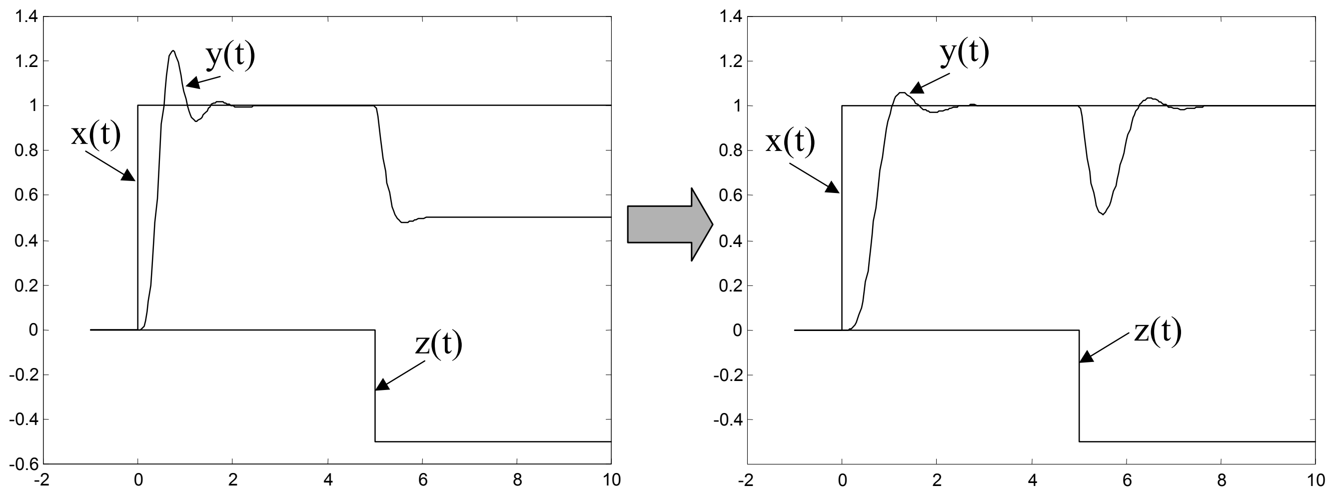


Precisión en Régimen Permanente (II)

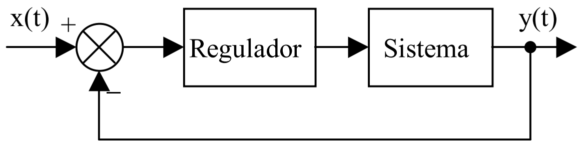
Eliminar el efecto de las perturbaciones

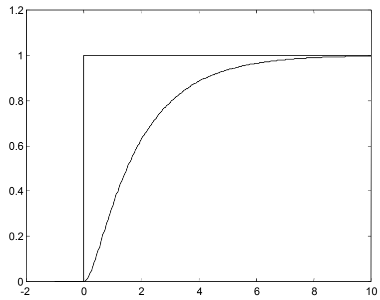




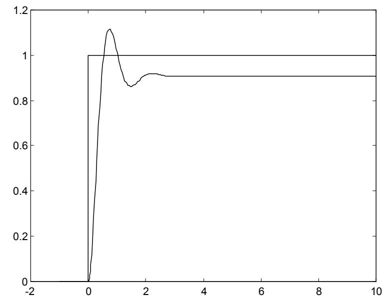


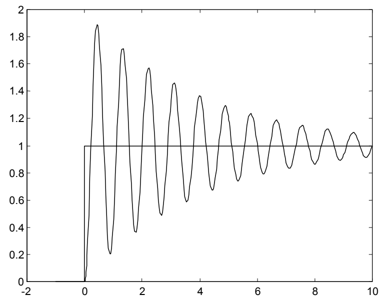
Respuesta Transitoria Adecuada



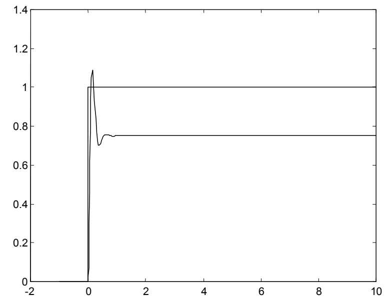


Transitorio suficientemente rápido

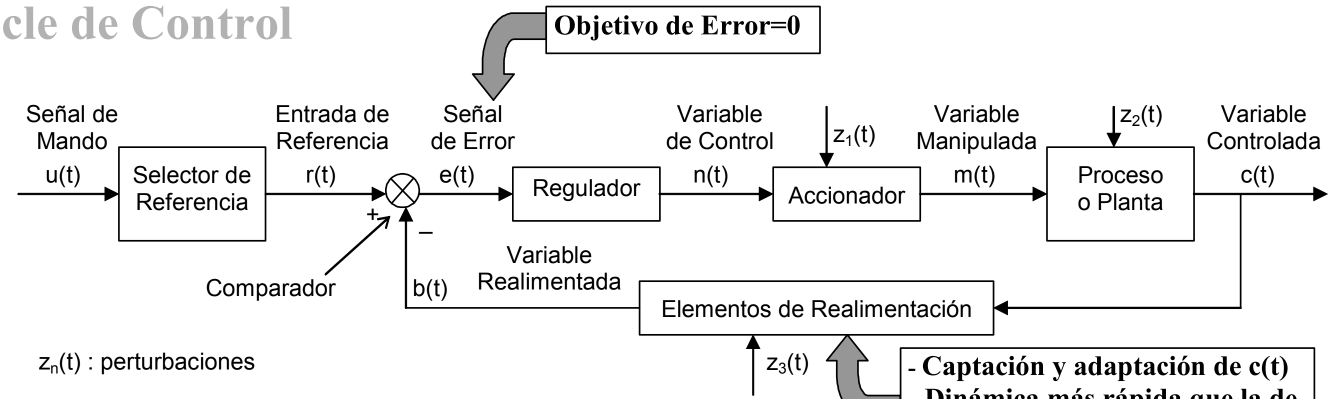




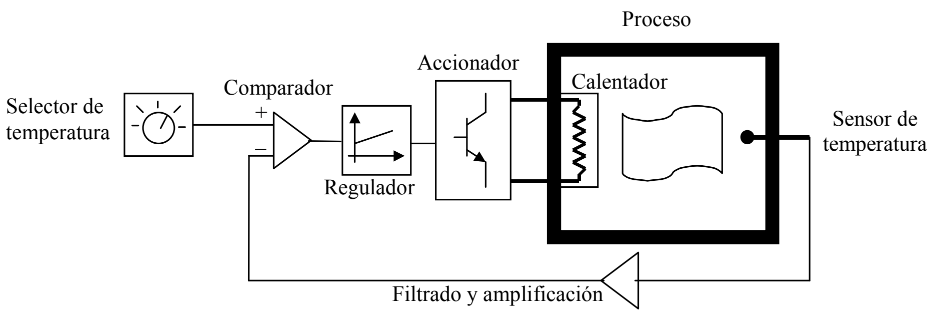
Amortiguamiento adecuado



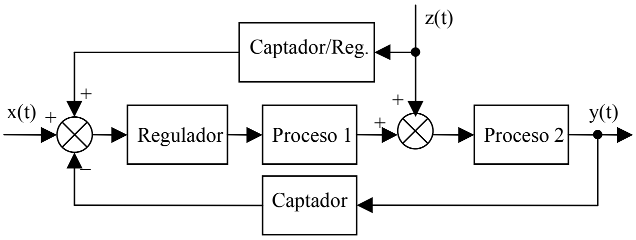
Bucle de Control

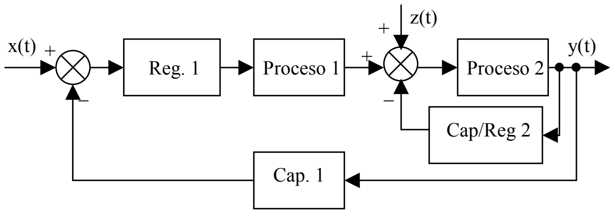


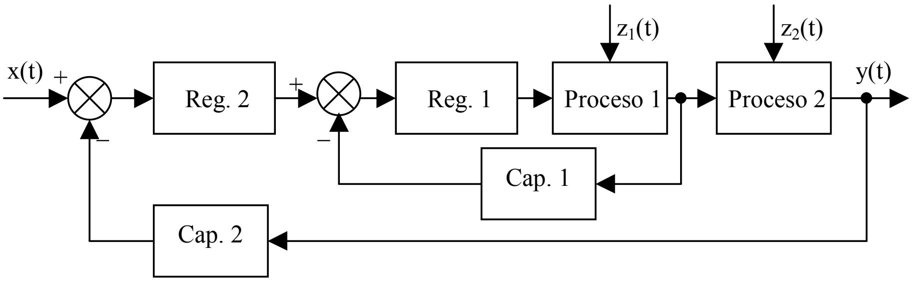
- **Captación y adaptación de c(t)**
- **Dinámica más rápida que la de la variable controlada**
- **Adecuar la relación de escala entre las magnitudes r(t) y c(t) y, si es necesario, convertir la magnitud de c(t) en otra b(t) de naturaleza comparable con r(t)**



Otras Estructuras de Control

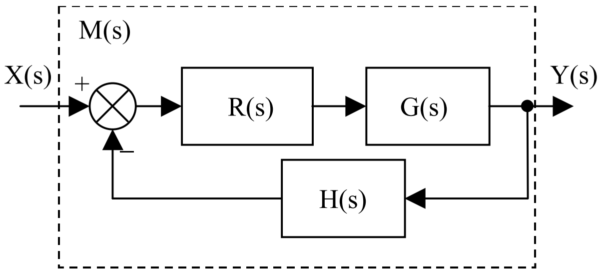






Universidad de Oviedo
REGULACIÓN AUTOMÁTICA
INGENIERÍA DE SISTEMAS Y AUTOMÁTICA

Función de Transferencia en Bucle Cerrado



$$R(s) = K_R \frac{\Pi\{\text{ceros de R(s)}\}}{\Pi\{\text{polos de R(s)}\}} \quad G(s) = K_G \frac{\Pi\{\text{ceros de G(s)}\}}{\Pi\{\text{polos de G(s)}\}} \quad H(s) = K_H \frac{\Pi\{\text{ceros de H(s)}\}}{\Pi\{\text{polos de H(s)}\}} \quad M(s) = \frac{R(s)\cdot G(s)}{1 + R(s)\cdot G(s)\cdot H(s)}$$

$$M(s) = \frac{K_R \cdot K_G \cdot K_H \cdot \Pi\{\text{ceros de R(s)}\}\cdot\Pi\{\text{ceros de G(s)}\}\cdot\Pi\{\text{polos de H(s)}\}}{\Pi\{\text{polos de R(s)}\}\cdot\Pi\{\text{polos de G(s)}\}\cdot\Pi\{\text{polos de H(s)}\} + K_R \cdot K_G \cdot K_H \cdot \Pi\{\text{ceros de R(s)}\}\cdot\Pi\{\text{ceros de G(s)}\}\cdot\Pi\{\text{ceros de H(s)}\}}$$

- Los ceros de M(s) son los ceros de R(s) y G(s) más los polos de H(s).
- Los polos de M(s) se obtienen resolviendo la Ecuación Característica del sistema, que es el denominador de M(S) igualado a cero: 1+R(s)·G(s)·H(s)=0

Error en Régimen Permanente de un Sistema Realimentado

- Error en Régimen Permanente:

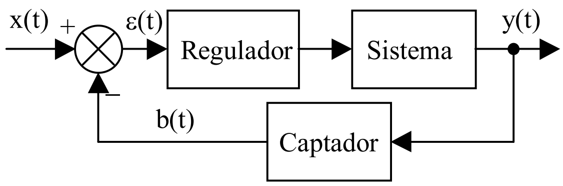
$$e_{RP} = lim_{t\to\infty} e(t) = e(\infty) = lim_{t\to\infty}(x(t) - h_0 \cdot y(t))$$

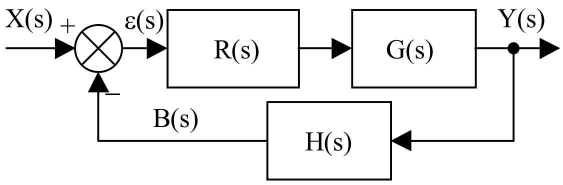
$$e_{RP} = lim_{s\to 0} s\cdot E(s) = lim_{s\to 0} s\cdot (X(s) - h_0 \cdot Y(s))$$

$$Y(s) = M(s)\cdot X(s) = \frac{R(s)\cdot G(s)}{1 + R(s)\cdot G(s)\cdot H(s)} X(s)$$

$$e_{RP} = lim_{s\to 0} s\cdot X(s)\cdot (1 - h_0 \cdot M(s))$$

$$e_{RP} = lim_{s\to 0} s\cdot X(s) \frac{1 + R(s)\cdot G(s)\cdot (H(s) - h_0)}{1 + R(s)\cdot G(s)\cdot H(s)}$$





$h_0 = lim_{s\to 0} H(s)$ Ganancia estática de H(s)

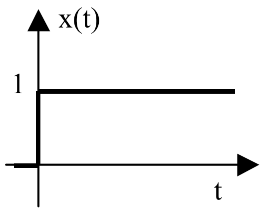
El error en régimen permanente dependerá de la señal de entrada utilizada y de las funciones de transferencia del bucle.

Señales de Entrada para la Medida del Error

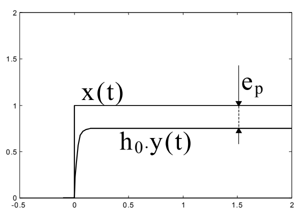
- Escalón unitario:

$$x(t) = u_0(t)$$

$$X(s) = \frac{1}{s}$$



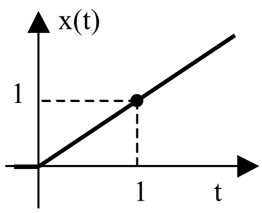
Error de posición:
Medido en tanto por uno o tanto por ciento [%]



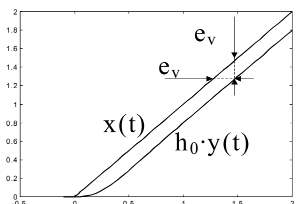
- Rampa unitaria:

$$x(t) = t\cdot u_0(t)$$

$$X(s) = \frac{1}{s^2}$$



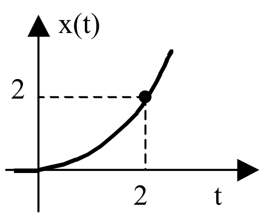
Error de velocidad:
Medido en segundos [s]



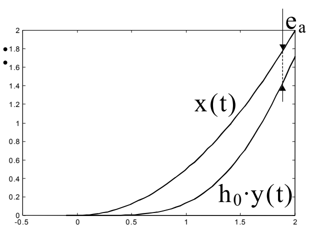
- Parábola:

$$x(t) = \frac{t^2}{2} u_0(t)$$

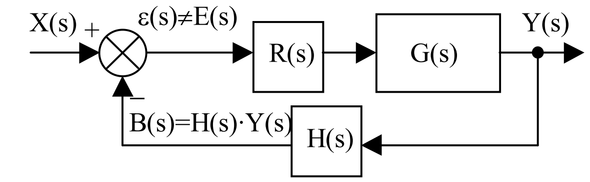
$$X(s) = \frac{1}{s^3}$$

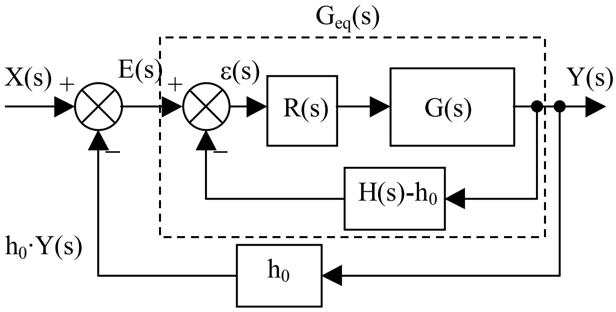


Error de aceleración:
Medido en valor absoluto frente a la parábola de prueba



Calculo de los Errores





$$G_{eq}(s)=\frac{R(s)\cdot G(s)}{1+R(s)\cdot G(s)\cdot(H(s)-h_0)}$$

$$e_{RP}=lim_{s\to 0}s\cdot E(s)=lim_{s\to 0}s\cdot X(s)\frac{1}{1+h_0\cdot G_{eq}(s)}$$

- Error de posición: X(s)=1/s

$$e_p=lim_{s\to 0}\frac{1}{1+h_0\cdot G_{eq}(s)}=\frac{1}{1+K_p}$$

$$K_p=lim_{s\to 0}h_0\cdot G_{eq}(s)$$

- Error de velocidad: X(s)=1/s²

$$e_v=lim_{s\to 0}\frac{1}{s\cdot h_0\cdot G_{eq}(s)}=\frac{1}{K_v}$$

$$K_v=lim_{s\to 0}s\cdot h_0\cdot G_{eq}(s)$$

- Error de aceleración: X(s)=1/s³

$$e_a=lim_{s\to 0}\frac{1}{s^2\cdot h_0\cdot G_{eq}(s)}=\frac{1}{K_a}$$

$$K_a=lim_{s\to 0}s^2\cdot h_0\cdot G_{eq}(s)$$

Tipo de un Sistema

Es el número de polos en el origen que tiene el sistema.

(número de integradores) $R(s)\cdot G(s)=\dfrac{N(s)}{s^n\cdot P(s)}$ $n=$ tipo del sistema

- Si R(s)·G(s) es de tipo cero:

K_p=cte., K_v=K_a=0 ⇒ e_p=cte., e_v=e_a=inf.

- Si R(s)·G(s) es de tipo uno:

K_p=inf., K_v=cte., K_a=0 ⇒ e_p=0, e_v=cte., e_a=inf.

- Si R(s)·G(s) es de tipo dos(1):

K_p=inf., K_v=inf., K_a=cte. ⇒ e_p=e_v=0, e_a=cte.

- Si R(s)·G(s) es de tipo tres o superior todos los errores son nulos(1).

TIPO	0	1	2	3
e_p	1/(1+K_p)	0	0	0
e_v	inf.	1/K_v	0 (1)	0 (1)
e_a	inf.	inf.	1/K_a (1)	0 (1)

$$K_p=lim_{s\to 0}h_0\cdot G_{eq}(s)$$

$$K_v=lim_{s\to 0}s\cdot h_0\cdot G_{eq}(s)$$

$$K_a=lim_{s\to 0}s^2\cdot h_0\cdot G_{eq}(s)$$

Nota: Si H(s) es una constante, H(s)=h_0, entonces G_{eq}(s)=R(s)·G(s)

(1) Expresiones y afirmaciones válidas sólo si H(s)=cte.

El Lugar de las Raíces (I): W.R. Evans (1948)

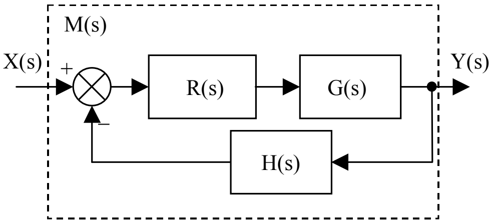
- W.R. Evans desarrolló un método matemático mediante el cual es posible ver gráficamente el valor de los polos de un sistema en bucle cerrado (polos de M(s)) cuando se varía un parámetro del sistema (K) desde cero hasta infinito.

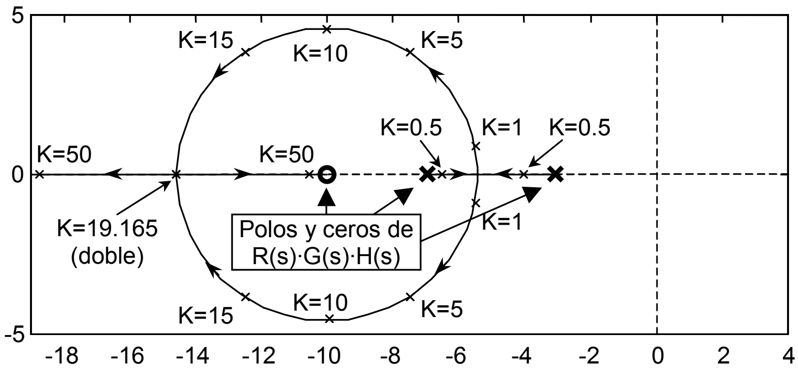
$$R(s)=K \quad G(s)=\frac{(s+10)}{(s+3)} \quad H(s)=\frac{1}{(s+7)}$$

$$M(s)=\frac{R(s)\cdot G(s)}{1+R(s)\cdot G(s)\cdot H(s)}=\frac{K\cdot(s+10)\cdot(s+7)}{(s+3)\cdot(s+7)+K\cdot(s+10)}$$

$$1+R(s)\cdot G(s)\cdot H(s)=1+K\cdot\frac{(s+10)}{(s+3)\cdot(s+7)}=0$$

$$s^2+(10+K)\cdot s+(10\cdot K+21)=0 \qquad K:0\rightarrow\infty$$





El Lugar de las Raíces (II):

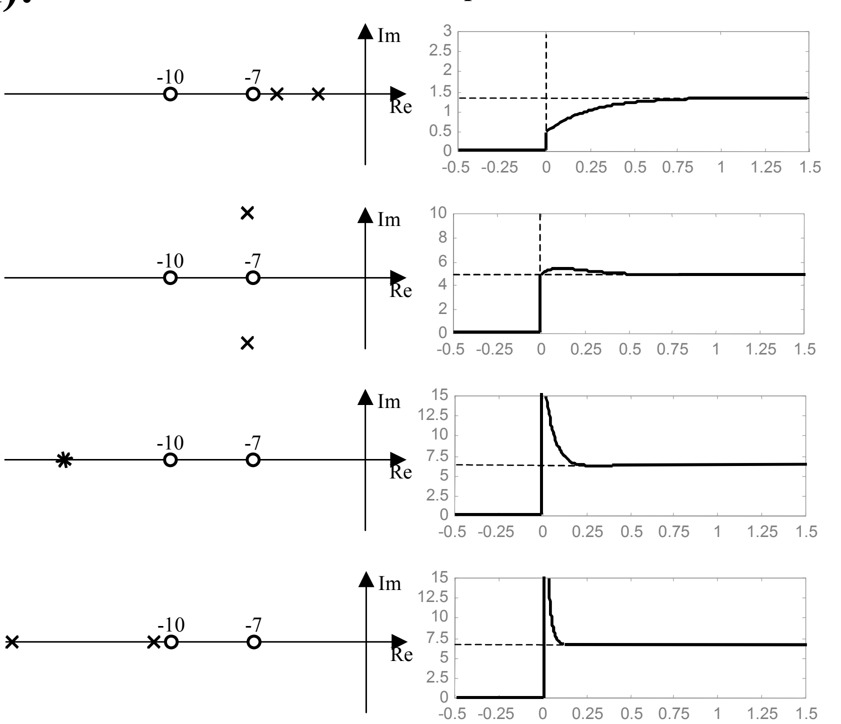
Respuesta ante un escalón unitario

$$K=0.5 \quad M(s)=\frac{0.5\cdot(s+10)\cdot(s+7)}{s^2+10.5\cdot s+26}$$

$$K=5 \quad M(s)=\frac{5\cdot(s+10)\cdot(s+7)}{s^2+15\cdot s+71}$$

$$K=19.165 \quad M(s)=\frac{19.165\cdot(s+10)\cdot(s+7)}{s^2+29.165\cdot s+212.65}$$

$$K=50 \quad M(s)=\frac{50\cdot(s+10)\cdot(s+7)}{s^2+60\cdot s+521}$$



El Lugar de las Raíces (III):

$$1+R(s)\cdot G(s)\cdot H(s)=0 \Rightarrow R(s)\cdot G(s)\cdot H(s)=-1 \Rightarrow \begin{cases} \left|R(s)\cdot G(s)\cdot H(s)\right|=1 \\ \angle R(s)\cdot G(s)\cdot H(s)=(2\cdot q+1)\cdot\pi \end{cases} \qquad q=\{0,1,2,3,\ldots\}$$

$$K_s=K_R\cdot K_G\cdot K_H$$

$$Si \quad R(s)\cdot G(s)\cdot H(s)=K_s\frac{\prod_{j=1}^{m}(s+z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s+p_i)} \Rightarrow \begin{cases} |K_s|\dfrac{\prod_{j=1}^{m}|s+z_j|}{\prod_{i=1}^{n}|s+p_i|}=1 \quad \text{CRITERIO DEL MÓDULO} \\ \angle K_s\dfrac{\prod_{j=1}^{m}(s+z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s+p_i)}=(2\cdot q+1)\cdot\pi \quad \text{CRITERIO DEL ARGUMENTO} \end{cases}$$

- Los puntos "s" del plano complejo que cumplan el "Criterio del Argumento", pertenecerán al Lugar de las Raíces del sistema para un determinado valor de K_s, que se obtiene del "Criterio del Módulo".

El Lugar de las Raíces (IV):

- Criterio del Argumento:

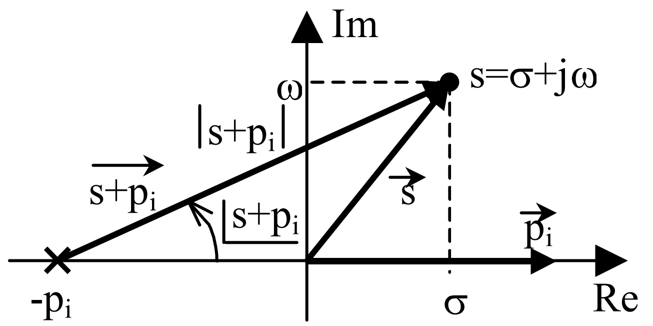
$$Si\ K_s>0 \quad \sum_{j=1}^{m}\angle s+z_j-\sum_{i=1}^{n}\angle s+p_i=(2\cdot q+1)\cdot\pi \qquad K_s:0\rightarrow\infty \quad \text{Lugar de las Raíces}$$

$$Si\ K_s<0 \quad \sum_{j=1}^{m}\angle s+z_j-\sum_{i=1}^{n}\angle s+p_i=2\cdot q\cdot\pi \qquad K_s:0\rightarrow-\infty \quad \text{Lugar Inverso de las Raíces}$$

$$q=\{0,1,2,3,\ldots\}$$

- Criterio del Módulo:

$$|K_s|=\frac{\prod_{i=1}^{n}|s+p_i|}{\prod_{j=1}^{m}|s+z_j|}$$



Reglas para el Trazado del Lugar de las Raíces (I)

Se inicia el trazado situando sobre el plano complejo los polos y ceros de la función de transferencia del sistema (FdT) en bucle abierto (B.A.): R(s)·G(s)·H(s)

1) El número de ramas es igual al número de polos (n) de la FdT en B.A.: R(s)·G(s)·H(s)

2) Cada rama comienza en un polo (K_s=0) y termina en un cero (K_s=inf.). Si el número de ceros (m) es inferior al de polos, existirán n-m ceros en el infinito hacia los que irán n-m ramas siguiendo n-m asíntotas

3) Los puntos del eje real con un número impar de polos y ceros a su derecha pertenecen al lugar de las raíces (K_s>0), y si es par, pertenecen al lugar inverso de las raíces (K_s<0)

4) El lugar de las raíces y el lugar inverso de las raíces son simétricos respecto al eje real

5) Las n-m asíntotas se cortan en el punto:

$$\sigma_0 = \frac{\sum \text{polos de R(s)·G(s)·H(s)} - \sum \text{ceros de R(s)·G(s)·H(s)}}{n-m}$$

6) Los ángulos de las asíntotas con el eje real son:

$$Si \quad K_s > 0 \quad \theta_a = \frac{(2\cdot q+1)\cdot\pi}{n-m} \quad ; \quad Si \quad K_s < 0 \quad \theta_a = \frac{2\cdot q\cdot\pi}{n-m} \quad ; \quad siendo \; q = \{0,1,2,\ldots,n-m-1\}$$

Reglas para el Trazado del Lugar de las Raíces (II)

7) Los ángulos de salida de los polos y de llegada a los ceros, se obtienen aplicando el criterio del argumento:

$$Si\; K_s > 0 \quad \theta_{sp} = \sum_{j=1}^{m} \angle s+z_j - \sum_{i=1}^{n} \angle s+p_i - (2\cdot q+1)\cdot\pi \qquad \theta_{ec} = \sum_{i=1}^{n} \angle s+p_i - \sum_{j=1}^{m} \angle s+z_j + (2\cdot q+1)\cdot\pi$$

$$Si\; K_s < 0 \quad \theta_{sp} = \sum_{j=1}^{m} \angle s+z_j - \sum_{i=1}^{n} \angle s+p_i - 2\cdot q\cdot\pi \qquad \theta_{ec} = \sum_{i=1}^{n} \angle s+p_i - \sum_{j=1}^{m} \angle s+z_j + 2\cdot q\cdot\pi \qquad q = \{0,1,2,3,\ldots\}$$

8) Los puntos de dispersión y confluencia de las ramas son las raíces de la ecuación (df(s)/ds)=0 donde f(s) se obtiene de poner la ecuación característica en la forma K_s=f(s)

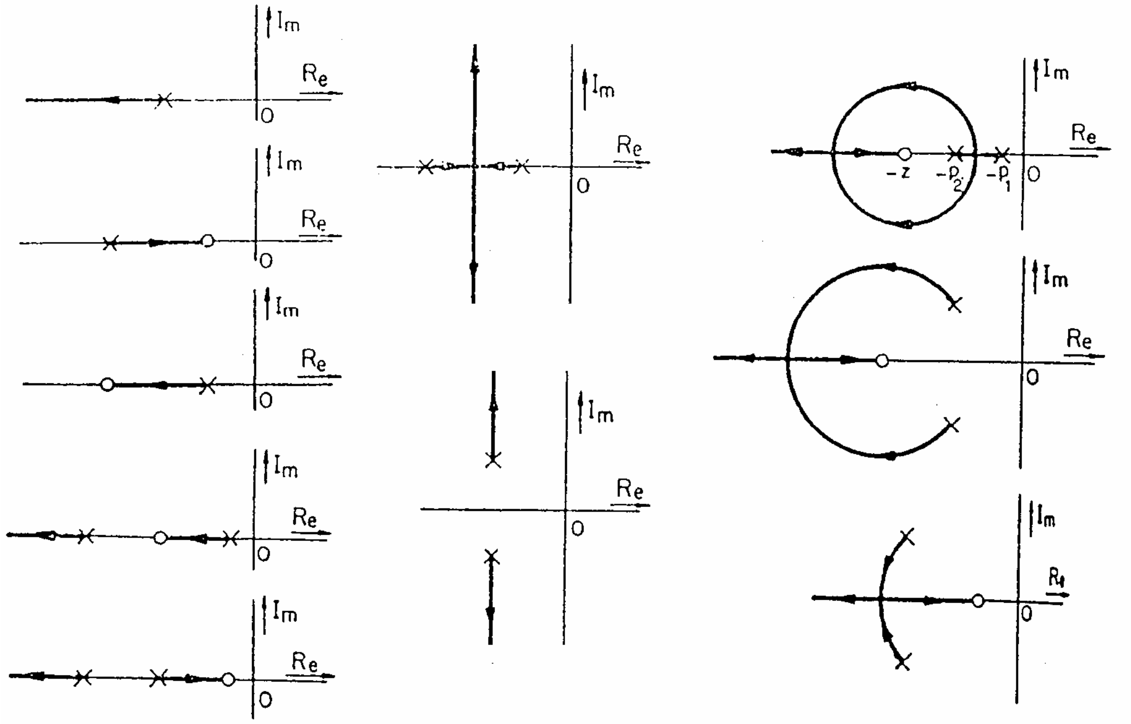
9) Los puntos de intersección del lugar de las raíces con el eje imaginario se pueden hallar aplicando el criterio de Routh para sistemas marginalmente estables

10) El valor de K_s para un determinado punto del lugar de las raíces se puede obtener aplicando el criterio del módulo:

$$|K_s| = \frac{\prod_{i=1}^{n} |s+p_i|}{\prod_{j=1}^{m} |s+z_j|}$$

11) La suma de las raíces de la ecuación característica para cualquier valor de K_s es constante e igual al coeficiente del término en s^{n-1} cambiado de signo, cuando el coeficiente de s^n es la unidad

Ejemplos de Trazado del Lugar de las Raíces (I)

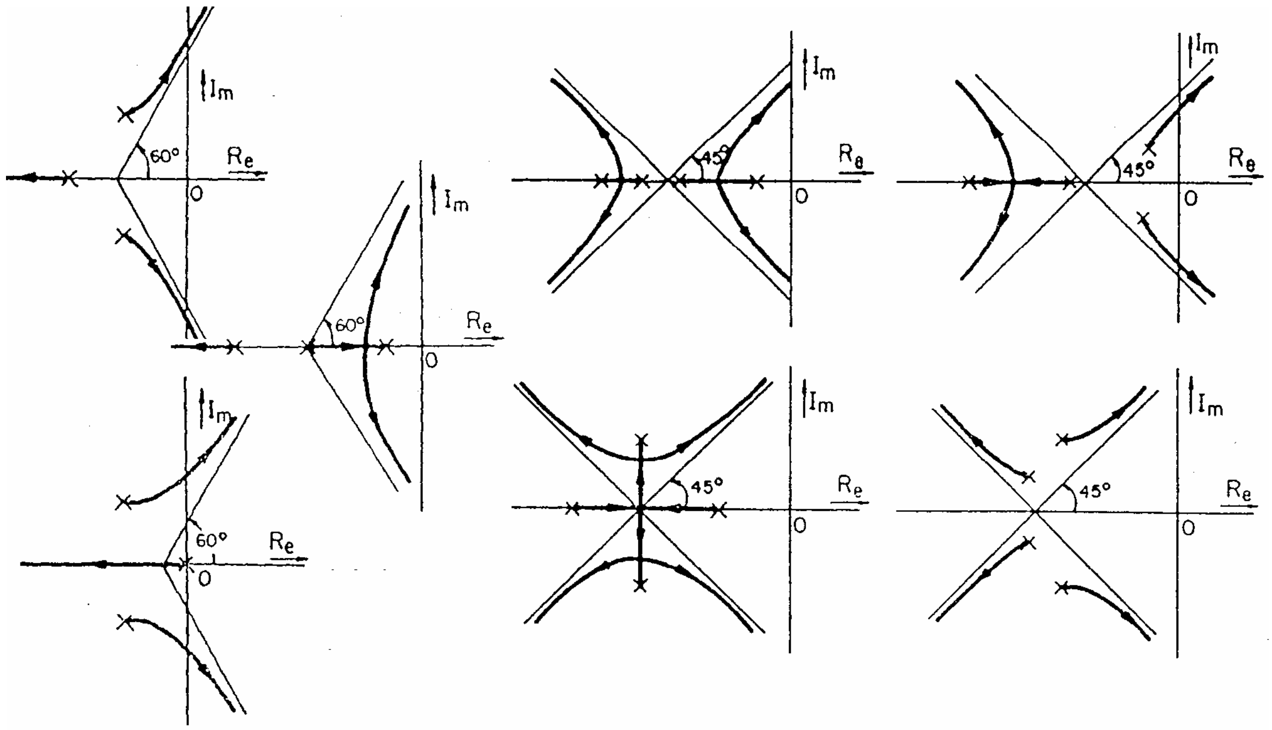


Universidad de Oviedo

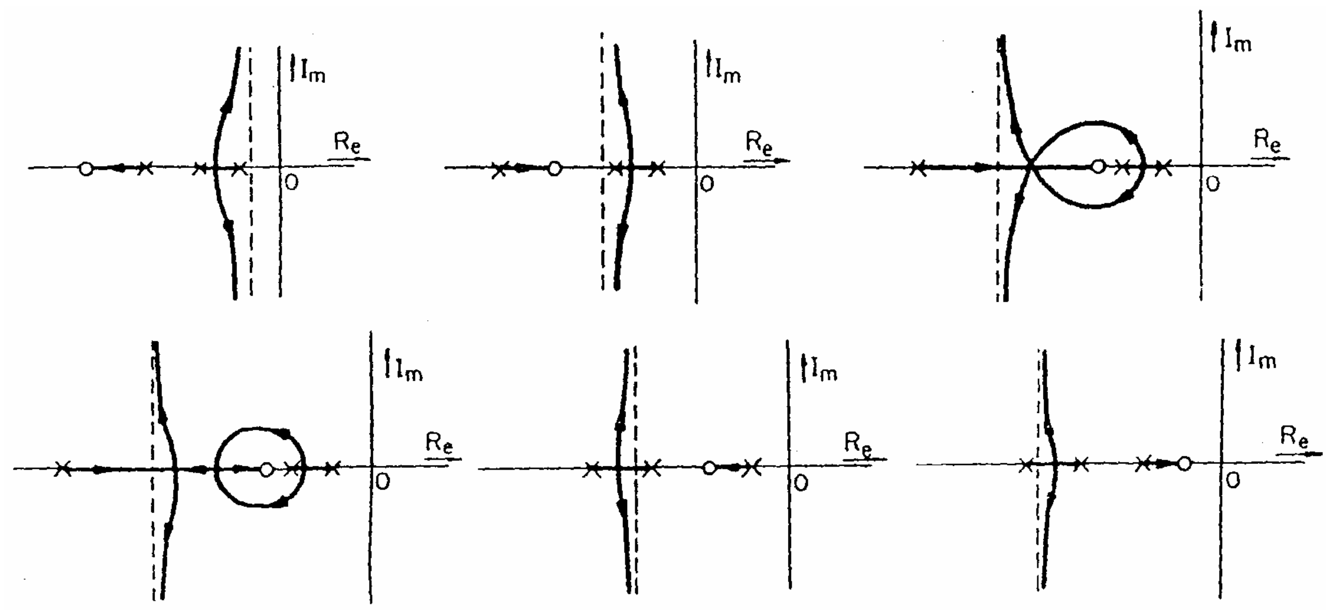
REGULACIÓN AUTOMÁTICA

INGENIERÍA DE SISTEMAS Y AUTOMÁTICA

Ejemplos de Trazado del Lugar de las Raíces (II)



Ejemplos de Trazado del Lugar de las Raíces (III)



El Contorno de las Raíces:

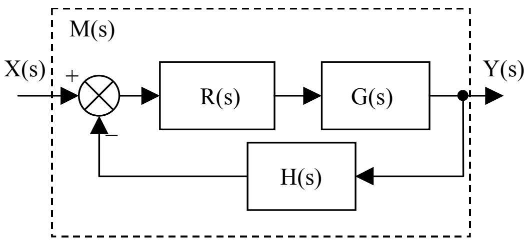
- Permite ver gráficamente la situación de los polos de un sistema en bucle cerrado (polos de M(s)) cuando se varía el valor de un parámetro diferente de la K_s del sistema en bucle abierto (R(s)·G(s)·H(s)).

$$R(s) = 2 \quad G(s) = \frac{(s+10)}{(s+3)} \quad H(s) = \frac{1}{(s+1/T)}$$

$$M(s) = \frac{R(s)\cdot G(s)}{1+R(s)\cdot G(s)\cdot H(s)} = \frac{2\cdot(s+10)\cdot(s+1/T)}{(s+3)\cdot(s+1/T)+2\cdot(s+10)}$$

$$1+R(s)\cdot G(s)\cdot H(s) = 0 \Rightarrow 1+2\cdot\frac{(s+10)}{(s+3)\cdot(s+1/T)} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+T\cdot\frac{s^2+5\cdot s+20}{(s+3)} = 0 \qquad G_c(s) = \frac{s^2+5\cdot s+20}{(s+3)}$$



- Se sitúan los polos y ceros de $G_c(s)$ y se traza el lugar de las raíces (T:0→inf.) o el lugar inverso de las raíces (T:0→-inf.).

NOTA: Puede que $G_c(s)$ tenga más ceros que polos. En ese caso el número de ramas del lugar es igual al de ceros y las ramas que no salen de polos, vienen del infinito siguiendo las asíntotas.