## Tema 3

# Análisis de Sistemas en el Dominio del Tiempo

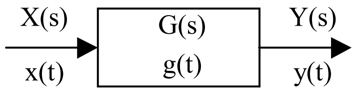




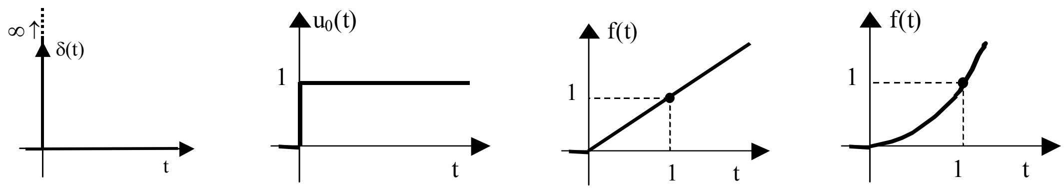
## Indice

## Análisis de los Sistemas

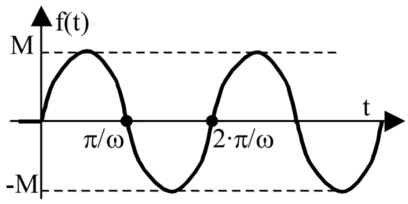
- Conocido el modelo matemático del sistema se realiza el análisis de su comportamiento dinámico.




- Se utilizan señales de excitación sencillas y con transformada de Laplace.



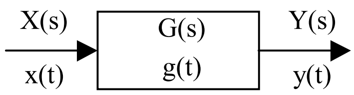

- El análisis se puede realizar en el **dominio del tiempo** o en el **dominio de la frecuencia**.



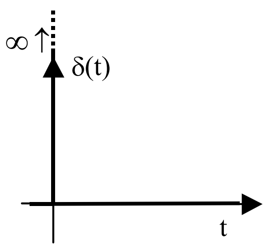





## Respuesta impulsional



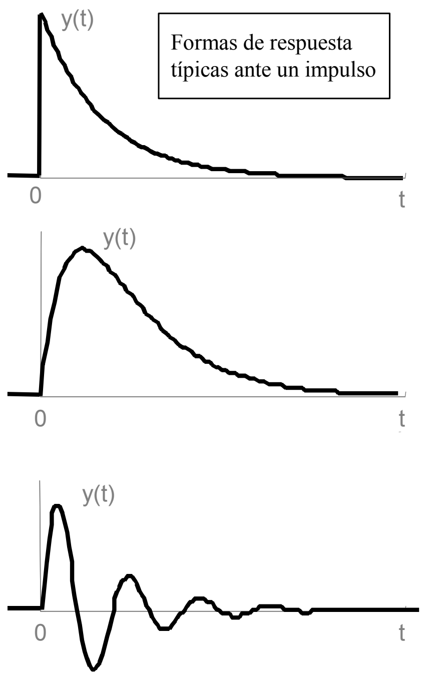

- Señal de excitación: Impulso de Dirac



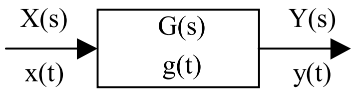

$$x(t) = \delta(t)$$
$$X(s) = 1$$

- Respuesta del sistema: g(t)

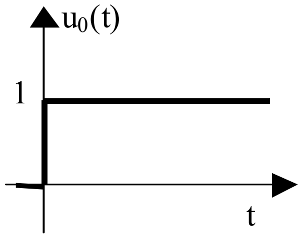
$$Y(s) = X(s)\cdot G(s) = G(s)$$
$$y(t) = L^{-1}[G(s)] = g(t)$$



## Respuesta a un escalón




- Señal de excitación: Escalón unitario




$$x(t) = u_0(t)$$

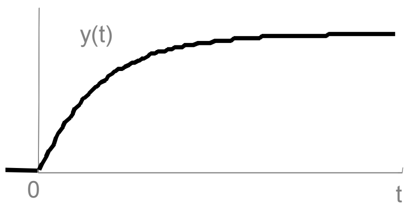
$$X(s) = \frac{1}{s}$$

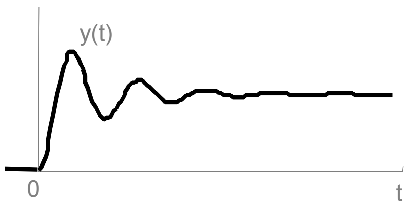
- Respuesta del sistema: Integral de g(t)

$$Y(s) = X(s) \cdot G(s) = \frac{G(s)}{s}$$

$$y(t) = L^{-1}\left[\frac{G(s)}{s}\right] = \int_0^{\tau} g(t)\,d\tau$$

Formas de respuesta típicas ante un escalón

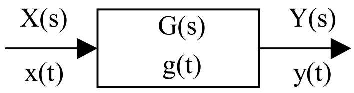







## Respuesta a una señal cualquiera




- Señal de excitación: x(t)
- Respuesta del sistema: $\begin{cases} Y(s) = X(s) \cdot G(s) \\ y(t) = x(t) * g(t) = \int_0^t x(t-\tau) \cdot g(\tau) \cdot d\tau = \int_0^t g(t-\tau) \cdot x(\tau) \cdot d\tau \end{cases}$

1. Se calcula la Transformada de Laplace de la entrada: X(s)=L[x(t)]

2. Se obtiene la Función de Transferencia que sirve de modelo del sistema: G(s)

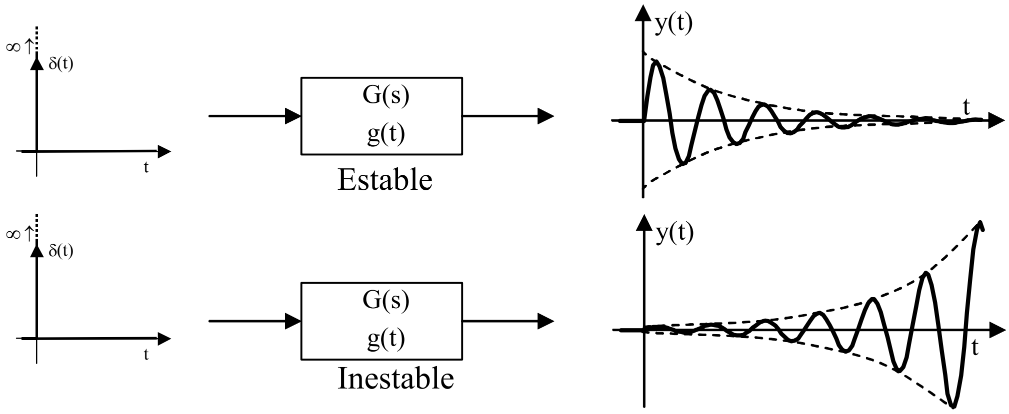
3. Se calcula la Transformada de Laplace de la salida: Y(s)=X(s)·G(s)

4. Se obtiene la Antitransformada de Laplace de Y(s): y(t)=$L^{-1}$[Y(s)]

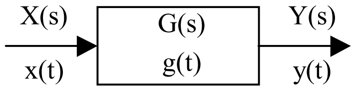
# Estabilidad (I)

Un sistema es **estable** si ante señales de entrada o perturbaciones acotadas produce salidas acotadas y regresa a un estado de equilibrio.

Un sistema de control está en **estado de equilibrio** si, en ausencia de cualquier perturbación o entrada, la salida permanece en el mismo estado.

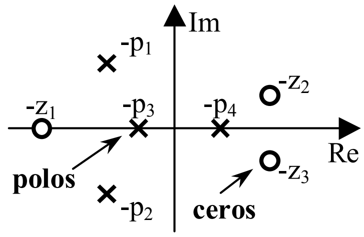


# Estabilidad (II)




$$G(s)=\frac{b_0 s^m+b_1 s^{m-1}+\ldots+b_{m-1}s+b_m}{a_0 s^n+a_1 s^{n-1}+\ldots+a_{n-1}s+a_n}=K_s\frac{\prod_{j=1}^{m}\left(s+z_j\right)}{\prod_{i=1}^{n}\left(s+p_i\right)}$$

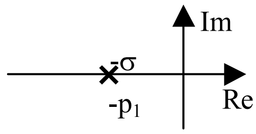
$$\begin{array}{c} n\geq m \\ z_j,p_i\in C \end{array}\begin{cases} -z_j \text{ son las raíces del numerador (ceros)} \\ -p_i \text{ son las raíces del denominador (polos)} \end{cases}$$




Ejemplo de un Sistema de Primer Orden

$$G(s)=\frac{1}{s+\sigma}\xrightarrow{L^{-1}}g(t)=e^{-\sigma\cdot t}\cdot u_0(t)$$

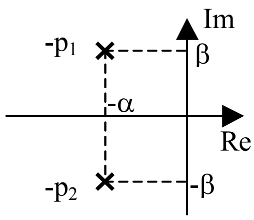
La raíz es $s_1=-p_1=-\sigma$ un polo real




Ejemplo de un Sistema de Segundo Orden con polos complejos

$$G(s)=\frac{1}{s^2+a\cdot s+b}=\frac{1}{(s+\alpha)^2+\beta^2}\xrightarrow{L^{-1}}g(t)=\frac{1}{\beta}e^{-\alpha\cdot t}\cdot \mathrm{sen}(\beta\cdot t)\cdot u_0(t)$$

Las raíces son $s_{1,2}=-p_{1,2}=-\alpha\pm\beta\cdot j$ dos polos complejos conjugados

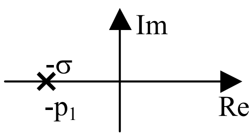


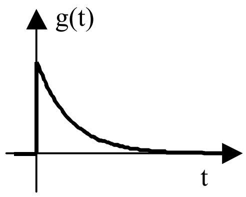




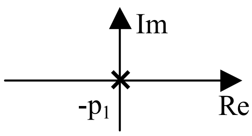

# Estabilidad (III)

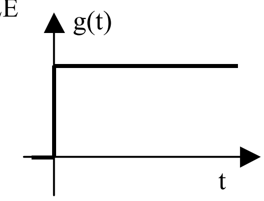
ESTABLE



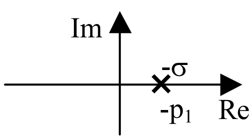



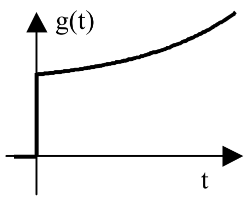

LIMITADAMENTE ESTABLE

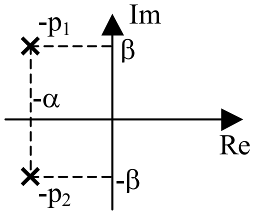


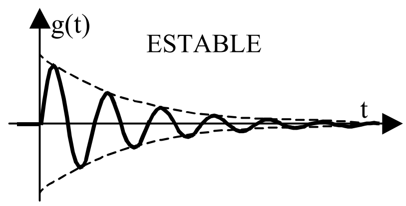




INESTABLE

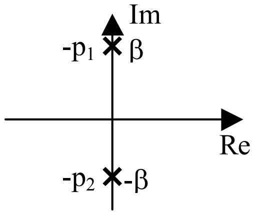


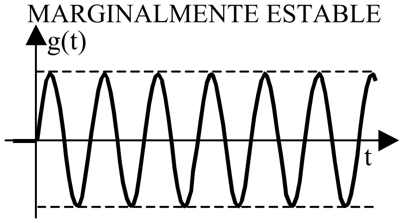



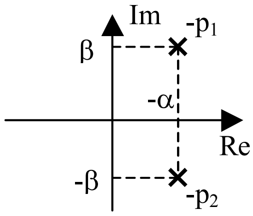



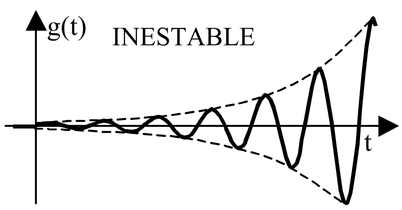




MARGINALMENTE ESTABLE

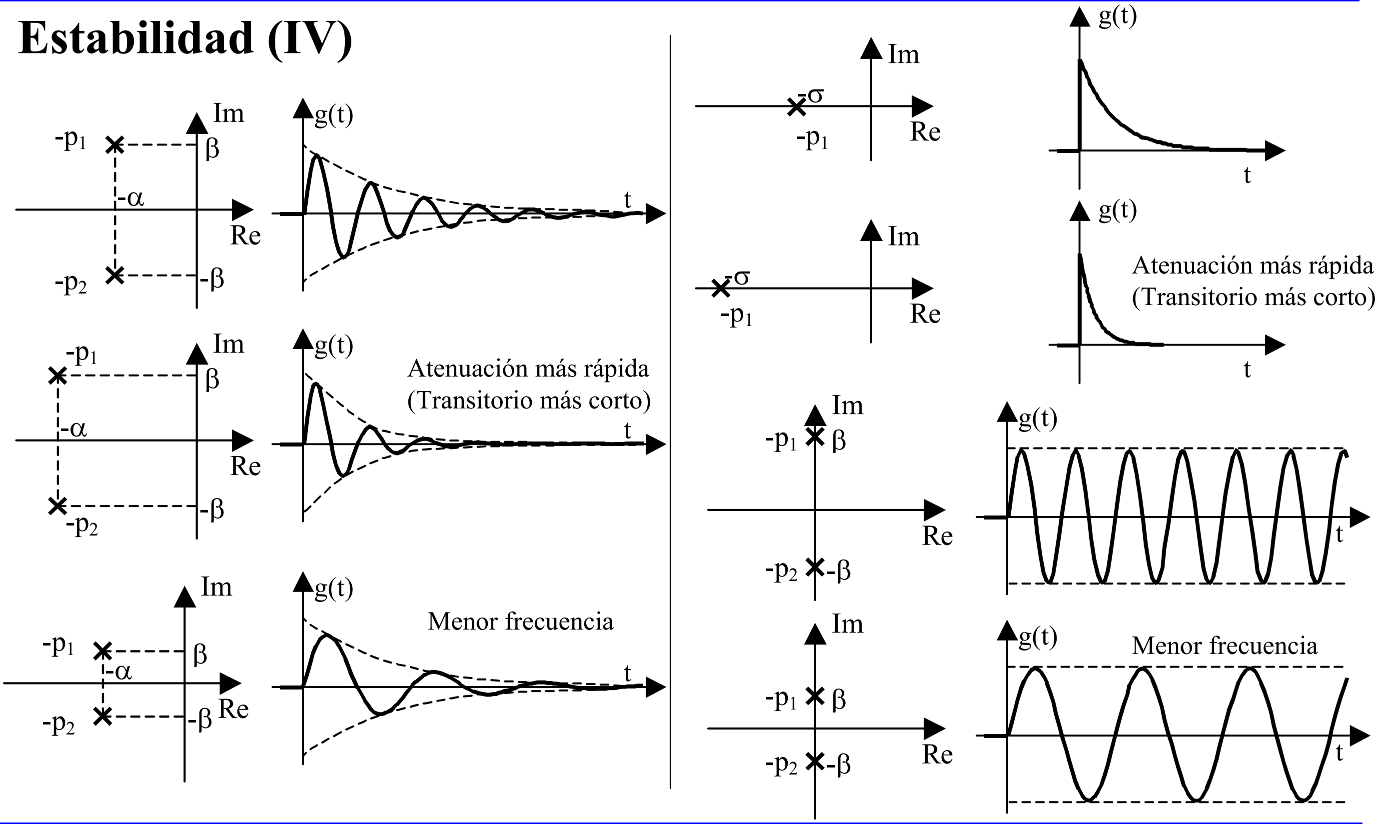


## Estabilidad (IV)





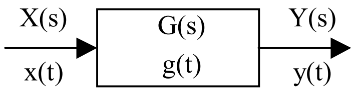



## Estabilidad (V)

- Un sistema es **estable** si todos sus polos están situados en el semiplano complejo negativo.
- Un sistema es **inestable** si algún polo está situado en el semiplano complejo positivo o si existen polos múltiples en el eje imaginario o en el origen.
- Un sistema es **limitadamente estable** si existe un solo polo en el origen, estando los demás situados en el semiplano negativo.
- Un sistema es **marginalmente estable** si existe una pareja simple (no múltiples) de polos complejos conjugados sobre el eje imaginario, estando los restantes polos situados en el semiplano negativo.
- Los polos situados en el semiplano negativo originan respuestas que se atenúan tanto más rápidamente, cuanto más alejados estén del eje imaginario. Se denominan en general “**polos dominantes**” aquellos que están más cerca del mencionado eje.
- Los polos complejos conjugados dan lugar a respuestas cuyas oscilaciones son de frecuencia tanto más elevada cuanto mayor sea su distancia al eje real.

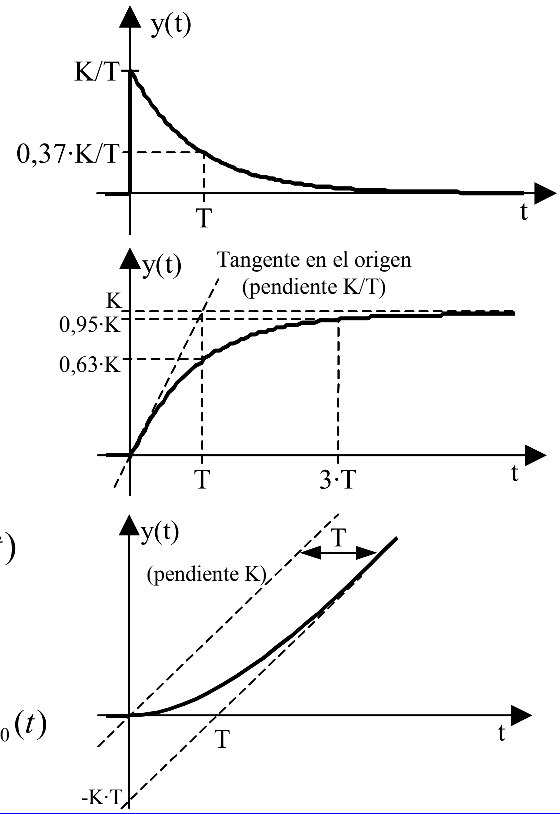
# Sistemas de Primer Orden (I)

$$G(s) = \frac{K}{1 + T \cdot s}$$




K: ganancia estática o en régimen permanente

T: constante de tiempo




- Respuesta impulsional: X(s)=1

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = L^{-1}[G(s)] = \frac{K}{T} e^{\frac{-t}{T}} \cdot u_0(t)$$

- Respuesta a un escalón: X(s)=1/s

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = L^{-1}\left[\frac{G(s)}{s}\right] = K \cdot (1 - e^{\frac{-t}{T}}) \cdot u_0(t)$$

- Respuesta a una rampa: X(s)=1/s²

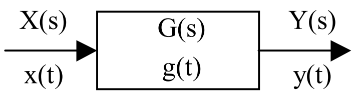
$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = L^{-1}\left[\frac{G(s)}{s^2}\right] = [K \cdot (t - T) + K \cdot T \cdot e^{\frac{-t}{T}}] \cdot u_0(t)$$





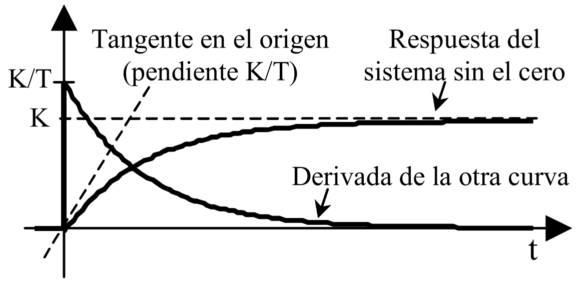
# Sistemas de Primer Orden (II)

$$G(s) = \frac{K \cdot (1 + T_N \cdot s)}{1 + T \cdot s}$$



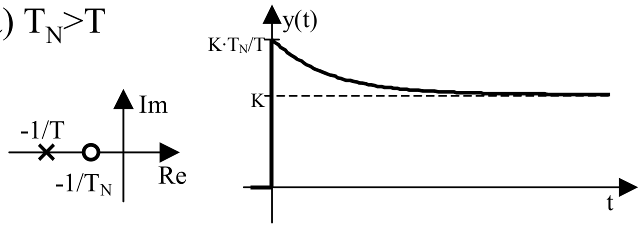

$$G(s) = \frac{K \cdot (1 + T_N \cdot s)}{1 + T \cdot s} = \frac{K}{1 + T \cdot s} + T_N \cdot s \cdot \frac{K}{1 + T \cdot s}$$

- Respuesta a un escalón: X(s)=1/s

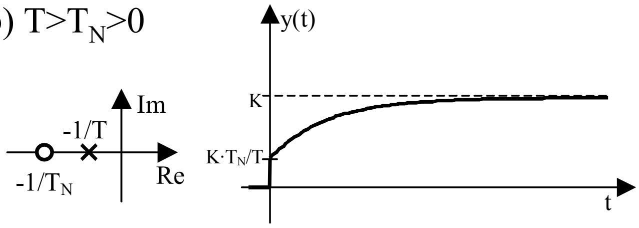



NOTA: Si el cero está próximo al origen el factor $|K \cdot T_N/T|$ aumenta peligrosamente

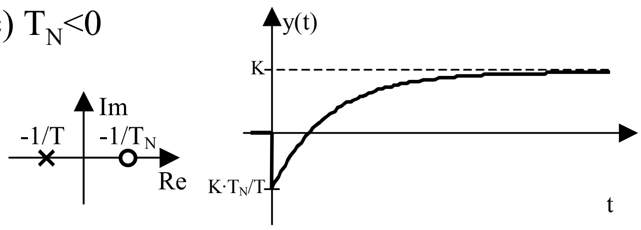
a) $T_N > T$




b) $T > T_N > 0$




c) $T_N < 0$



## Sistemas de Segundo Orden (I)

$$G(s)=\frac{K\cdot\omega_n^2}{s^2+2\cdot\xi\cdot\omega_n\cdot s+\omega_n^2}=\frac{K}{\frac{1}{\omega_n^2}\cdot s^2+\frac{2\cdot\xi}{\omega_n}\cdot s+1}=\frac{K_s}{s^2+a\cdot s+b}$$

Si a,b>0, el sistema es estable

$$s^2+2\cdot\xi\cdot\omega_n\cdot s+\omega_n^2=0$$

Las raíces del polinomio (polos del sistema) son :

$$s_{1,2}=-\xi\cdot\omega_n\pm\omega_n\cdot\sqrt{\xi^2-1}$$

Si $\xi<1$ las raíces son complejas conjugadas :

$$\sigma=\xi\cdot\omega_n \qquad \omega_d=\omega_n\cdot\sqrt{1-\xi^2}$$

$$s_{1,2}=-\sigma\pm j\cdot\omega_d$$

K: ganancia estática

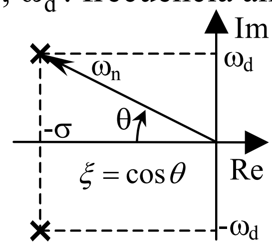
$T=2\cdot\xi/\omega_n$: constante de tiempo

$\xi>0$: coeficiente de amortiguamiento

$\omega_n>0$: frecuencia natural del sistema

$\sigma>0$: constante de amortiguamiento o factor de decrecimiento

Si $\xi<1$, $\omega_d$ : frecuencia amortiguada

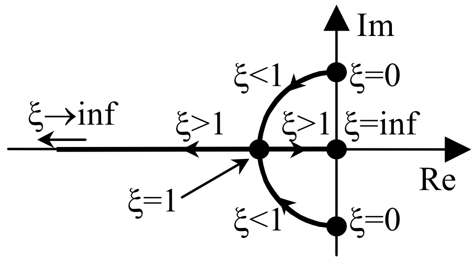







## Sistemas de Segundo Orden (II)

$$G(s)=\frac{K\cdot\omega_n^2}{s^2+2\cdot\xi\cdot\omega_n\cdot s+\omega_n^2} \qquad \begin{cases} s^2+2\cdot\xi\cdot\omega_n\cdot s+\omega_n^2=0 \\ s_{1,2}=-\xi\cdot\omega_n\pm\omega_n\cdot\sqrt{\xi^2-1} \end{cases}$$




a) Si $\xi>1$: dos raíces reales

$$s_{1,2}=-\sigma\pm\omega_n\cdot\sqrt{\xi^2-1}$$

b) Si $\xi=1$: una raíz doble

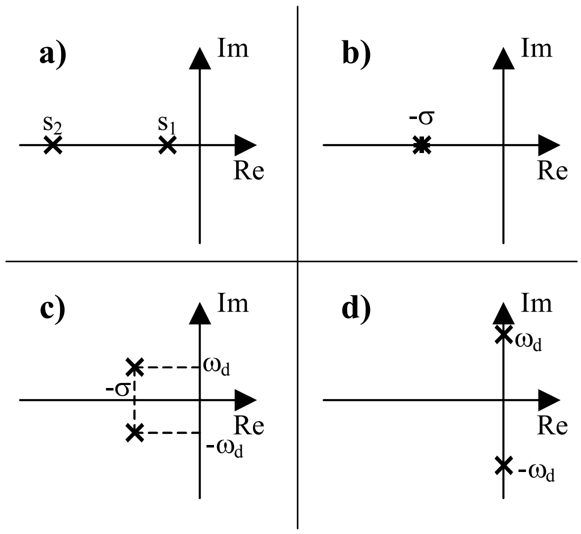
$$s_{1,2}=-\sigma=-\omega_n$$

c) Si $0<\xi<1$: dos raíces complejas conjugadas

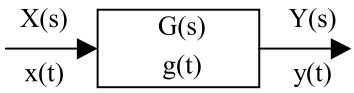
$$s_{1,2}=-\sigma\pm j\cdot\omega_d$$

d) Si $\xi=0$: dos raíces imaginarias puras

$$s_{1,2}=\pm j\cdot\omega_d=\pm j\cdot\omega_n$$



# Sistemas de Segundo Orden (III): respuesta impulsional




a) Si ξ>1: sistema sobreamortiguado

$$G(s)=\frac{K\cdot\omega_n^2}{s^2+2\cdot\xi\cdot\omega_n\cdot s+\omega_n^2}=\frac{A}{s-s_1}+\frac{B}{s-s_2}\qquad A=-B=\frac{K\cdot\omega_n}{2\cdot\sqrt{\xi^2-1}}$$

$$y(t)=\left[A\cdot e^{s_1\cdot t}+B\cdot e^{s_2\cdot t}\right]u_0(t)$$

b) Si ξ=1: sistema críticamente amortiguado

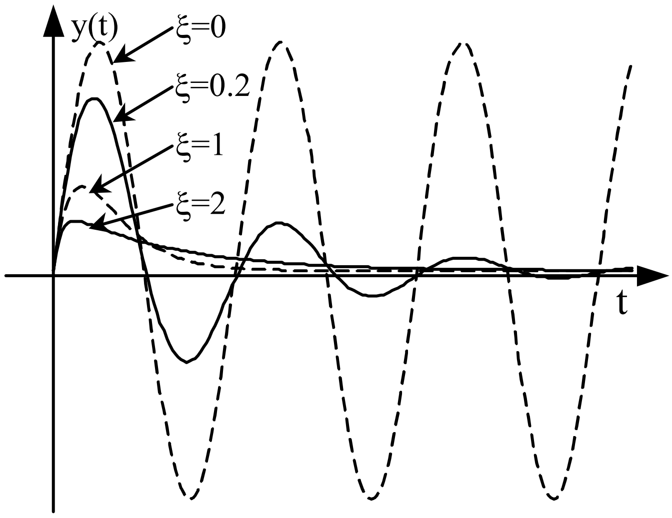
$$y(t)=K\cdot\omega_n^2\cdot t\cdot e^{-\omega_n\cdot t}\cdot u_0(t)$$

c) Si 0<ξ<1: sistema subamortiguado

$$y(t)=\frac{K\cdot\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}}\cdot\mathrm{sen}(\omega_d\cdot t)\cdot e^{-\sigma\cdot t}\cdot u_0(t)$$

d) Si ξ=0: sistema sin amortiguamiento

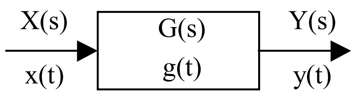
$$y(t)=K\cdot\omega_n\cdot\mathrm{sen}(\omega_n\cdot t)\cdot u_0(t)$$








# Sistemas de Segundo Orden (IV): respuesta a un escalón




a) Si ξ>1: sistema sobreamortiguado

$$y(t)=K\cdot\left[1+\frac{\omega_n}{2\cdot\sqrt{\xi^2-1}}\left[\frac{e^{s_1\cdot t}}{s_1}-\frac{e^{s_2\cdot t}}{s_2}\right]\right]\cdot u_0(t)$$

b) Si ξ=1: sistema críticamente amortiguado

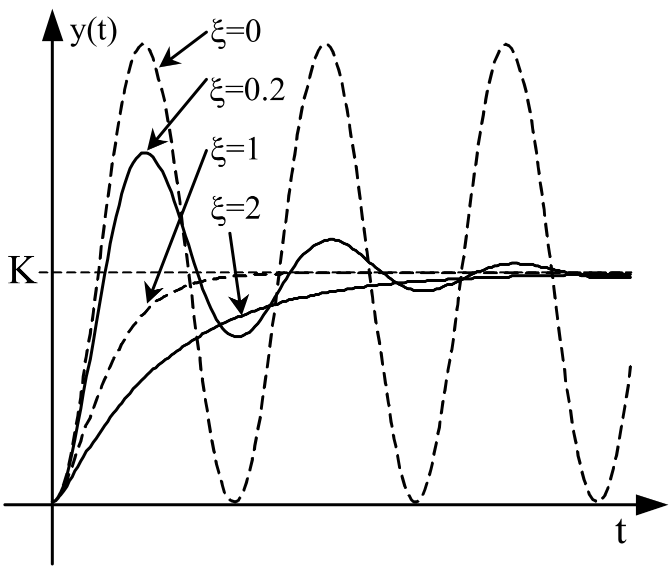
$$y(t)=K\cdot[1-(1+\omega_n\cdot t)\cdot e^{-\omega_n\cdot t}]\cdot u_0(t)$$

c) Si 0<ξ<1: sistema subamortiguado

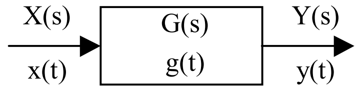
$$y(t)=K\cdot\left[1-\frac{e^{-\sigma\cdot t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\cdot\mathrm{sen}(\omega_d\cdot t+\theta)\right]\cdot u_0(t)$$

d) Si ξ=0: sistema sin amortiguamiento

$$y(t)=K\cdot[1-\cos(\omega_n\cdot t)]\cdot u_0(t)$$



## Sistemas de Segundo Orden (V)




$0 < \xi < 1$

$$\begin{cases} x(t) = M\cdot u_0(t) \\ X(s) = \dfrac{M}{s} \\ A = K\cdot M \end{cases}$$

Sobreoscilación :

$$M_p = e^{\frac{-\pi\cdot\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}\cdot 100[\%] = e^{\frac{-\pi\cdot\sigma}{\omega_d}}\cdot 100[\%] = e^{-\pi\cdot\mathrm{cotg}\theta}\cdot 100[\%] = \frac{B-A}{A}\cdot 100[\%]$$

Tiempo de subida :

$$t_r = \frac{\pi-\theta}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{\pi-\theta}{\omega_d}$$

Tiempo de pico :

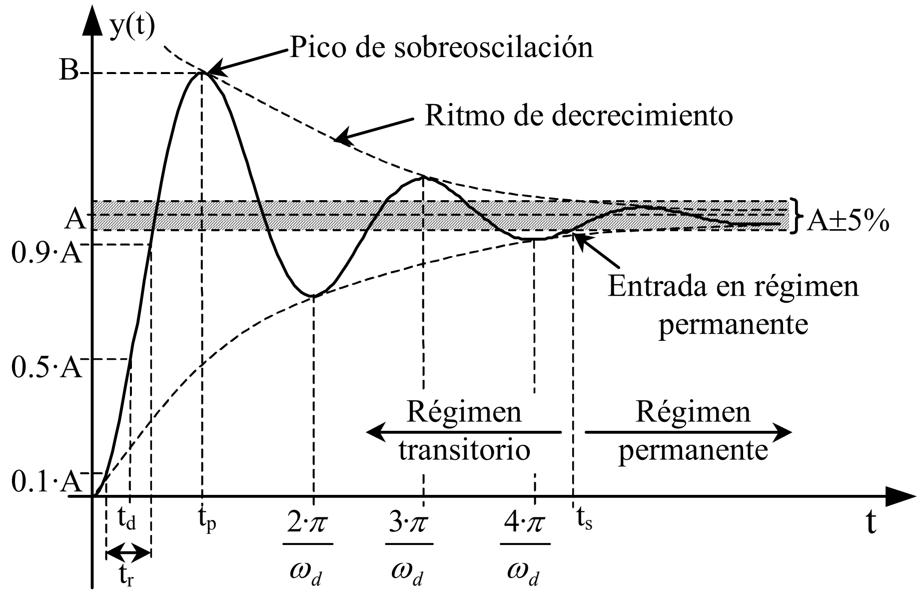
$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{\pi}{\omega_d}$$

Tiempo de establecimiento :

$$t_s = \frac{\pi}{\xi\cdot\omega_n} = \frac{\pi}{\sigma} \quad \text{(aprox.)}$$

Tiempo de retardo :

$$t_d = \frac{1+\frac{\xi}{\sqrt{2}}}{\omega_n} \quad \text{(aprox.)}$$

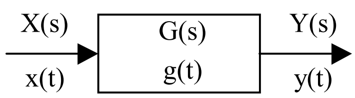


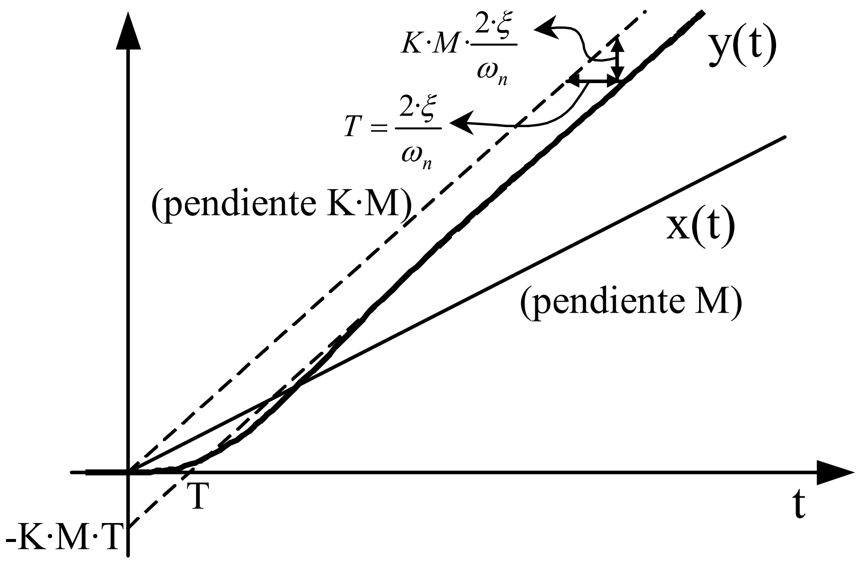





## Sistemas de Segundo Orden (VI): respuesta a una rampa

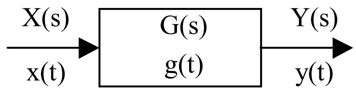
$$x(t) = M\cdot t\cdot u_0(t) \Rightarrow X(s) = \frac{M}{s^2}$$



## Sistemas de Segundo Orden (VII): cero adicional a polos complejos

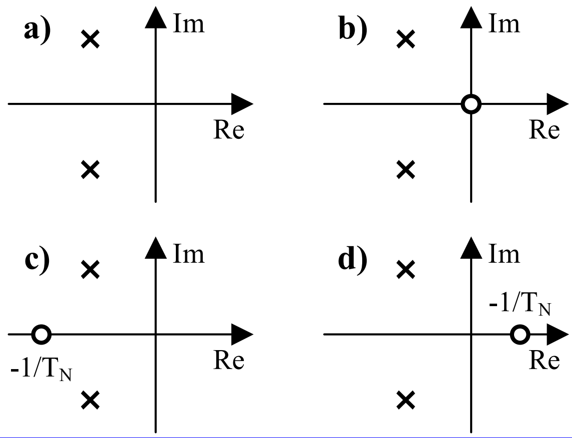
$$G(s)=\frac{K\cdot\omega_n^2(1+T_N\cdot s)}{s^2+2\cdot\xi\cdot\omega_n\cdot s+\omega_n^2}$$

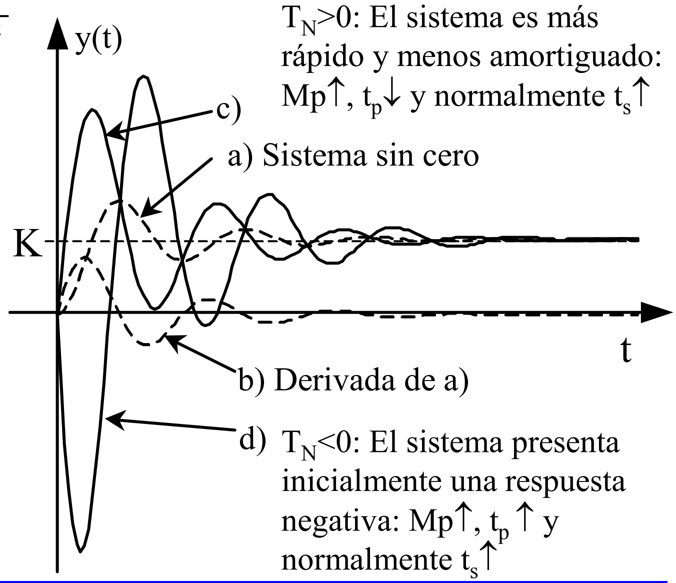



NOTA: Si el cero está próximo al origen el factor $T_N$ aumenta peligrosamente y los efectos del cero son más notables

$$G(s)=\frac{K\cdot\omega_n^2}{s^2+2\cdot\xi\cdot\omega_n\cdot s+\omega_n^2}+T_N\cdot s\cdot\frac{K\cdot\omega_n^2}{s^2+2\cdot\xi\cdot\omega_n\cdot s+\omega_n^2}$$

- Respuesta a un escalón: X(s)=1/s




$T_N>0$: El sistema es más rápido y menos amortiguado: Mp↑, $t_p$↓ y normalmente $t_s$↑

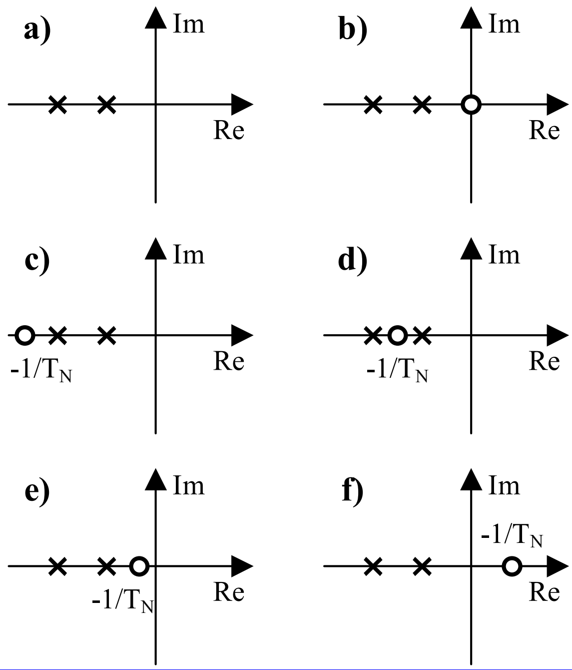
$T_N<0$: El sistema presenta inicialmente una respuesta negativa: Mp↑, $t_p$↑ y normalmente $t_s$↑





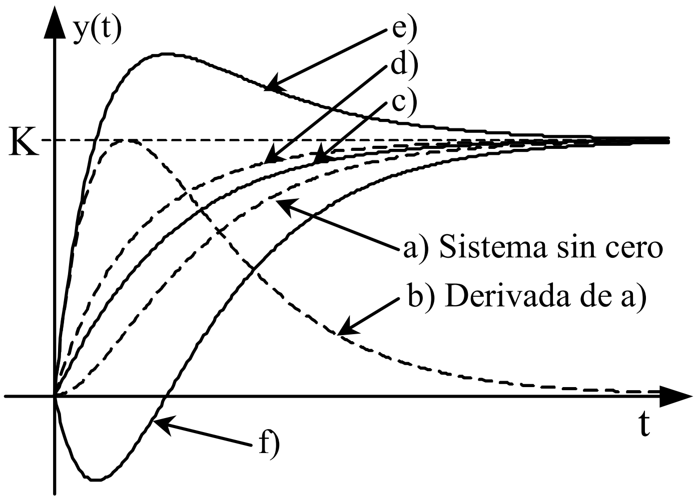
## Sistemas de Segundo Orden (VIII): cero adicional a polos reales

- Respuesta a un escalón: X(s)=1/s



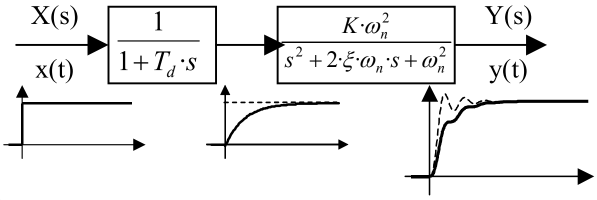

$T_N>0$: El sistema puede presentar un pico de sobreoscilación tanto mayor cuanto mayor es $T_N$

$T_N<0$: El sistema presenta inicialmente una respuesta negativa



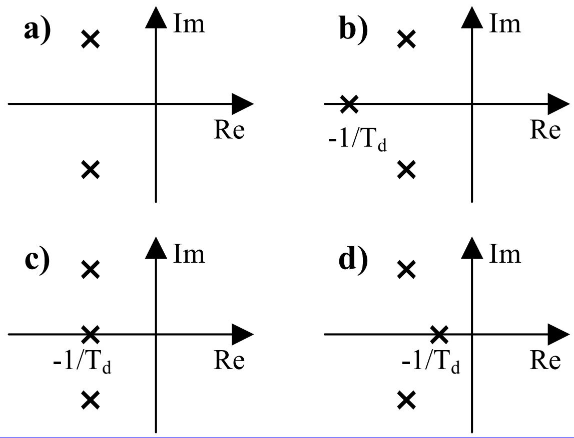
# Sistemas de Segundo Orden (IX): polo adicional

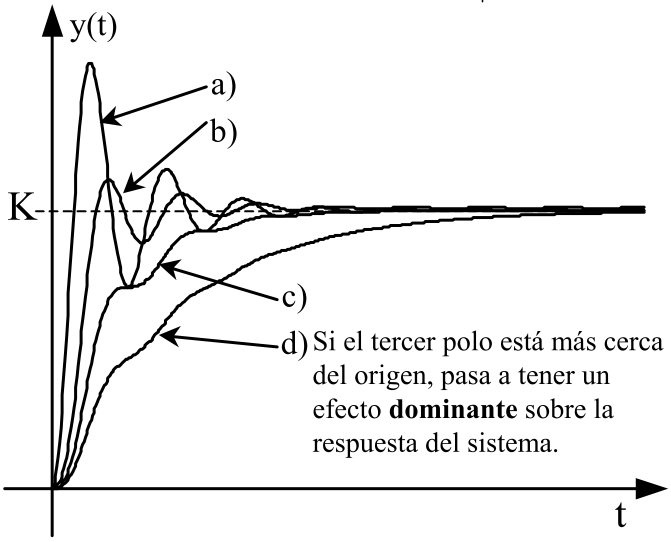
$$G(s) = \frac{K \cdot \omega_n^2}{(1 + T_d \cdot s)(s^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2)}$$




Los efectos son opuestos a los que tendría un cero en la misma posición. El sistema se hace más lento y amortiguado.

- Respuesta a un escalón: X(s)=1/s



## Sistemas de Orden Superior (I)

$$G(s)=\frac{b_0s^m+b_1s^{m-1}+\ldots+b_{m-1}s+b_m}{a_0s^n+a_1s^{n-1}+\ldots+a_{n-1}s+a_n}=\frac{K\cdot\prod_{p=1}^{P}(1+T_p\cdot s)\cdot\prod_{q=1}^{Q}\left[1+\frac{2\cdot\xi_q}{\omega_{nq}}\cdot s+\left(\frac{s}{\omega_{nq}}\right)^2\right]}{s^N\cdot\prod_{l=1}^{L}(1+T_l\cdot s)\cdot\prod_{r=1}^{R}\left[1+\frac{2\cdot\xi_r}{\omega_{nr}}\cdot s+\left(\frac{s}{\omega_{nr}}\right)^2\right]}$$

- Ante una entrada escalón unitario: X(s)=1/s
  - Respuesta en Régimen Permanente: Ganancia estática

$$y(\infty)=lim_{t\to\infty}y(t)=lim_{s\to 0}s\cdot X(s)\cdot G(s)=lim_{s\to 0}G(s)=\frac{b_m}{a_n}=K\qquad(\text{siempre que } N=0)$$

  - Respuesta Transitoria:

  Depende de qué polos y ceros tengan mayor efecto sobre la respuesta del sistema. Los dominantes serán los más cercanos al eje imaginario.

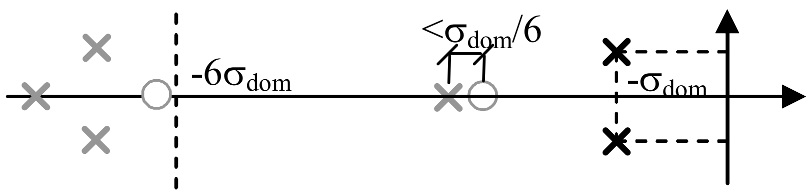
Se tratará de conseguir un sistema que, siendo de un orden inferior, reproduzca sin demasiado error la respuesta del sistema de partida





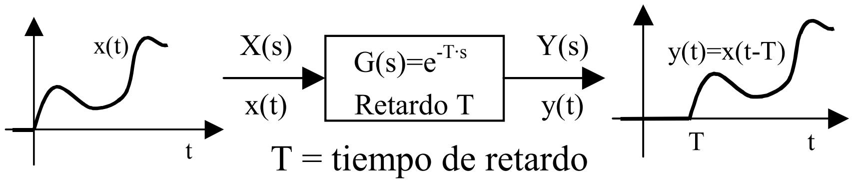
## Sistemas de Orden Superior (II)

- Criterios de Reducción
  - Despreciar el efecto de aquellos polos y ceros que presenten una componente real ($\sigma$) al menos seis veces superior a la componente real de los polos dominantes ($\sigma_{dom}$).
  - Despreciar el efecto de aquellos polos y ceros que cumplan que la distancia de separación entre ellos medida sobre el eje real ($|\sigma_p - \sigma_z|$) sea inferior a 1/6 del valor de la componente real de los polos dominantes ($\sigma_{dom}$).
  - Mantener la ganancia estática.




- Puntualización: Los criterios anteriores no siempre son válidos (sólo aplicable para el análisis en el dominio del tiempo de sistemas estables). Se debe comparar la respuesta del sistema de partida y del sistema de orden reducido para comprobar la fiabilidad de la aproximación.

## Retardo Puro (I)




$$X(s) = \mathrm{L}[x(t)] \Rightarrow Y(s) = \mathrm{L}\big[y(t)\big] = \mathrm{L}\big[x(t-T)\big] = e^{-T\cdot s}\cdot X(s)$$

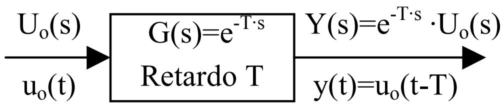
$$\frac{\mathrm{Y(s)}}{\mathrm{X(s)}} = G(s) = e^{-T\cdot s}$$

No es una función racional, lo que imposibilita el estudio de la estabilidad de sistemas que incluyan algún **Retardo Puro** por los métodos vistos en este capítulo. En algunos casos se buscan Funciones de Transferencia racionales como aproximación a su comportamiento y que permitan facilitar su estudio.





## Retardo Puro (II)




$$G(s) = e^{-T\cdot s} = \frac{e^{\frac{-T\cdot s}{2}}}{e^{\frac{T\cdot s}{2}}} = \frac{1 - \frac{T\cdot s}{2} + \frac{1}{2!}\cdot\left(\frac{T\cdot s}{2}\right)^2 - \frac{1}{3!}\cdot\left(\frac{T\cdot s}{2}\right)^3 + \ldots}{1 + \frac{T\cdot s}{2} + \frac{1}{2!}\cdot\left(\frac{T\cdot s}{2}\right)^2 + \frac{1}{3!}\cdot\left(\frac{T\cdot s}{2}\right)^3 + \ldots}$$

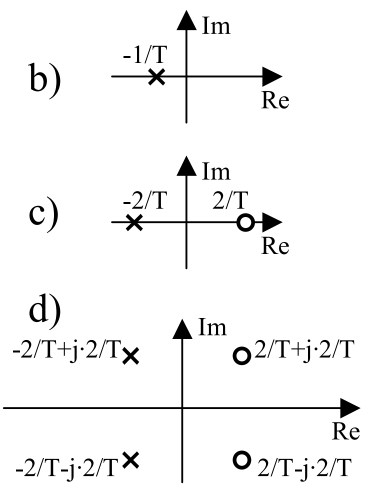
- Respuesta a un escalón:

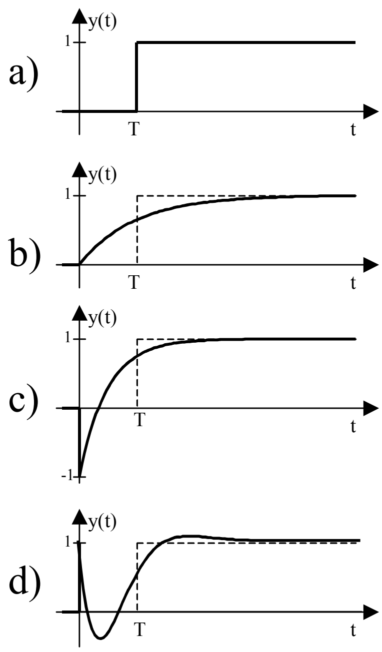
a) $G(s) = e^{-T\cdot s}$

b) $G(s) \approx \dfrac{1}{1+T\cdot s}$

c) $G(s) \approx \dfrac{1-(T/2)\cdot s}{1+(T/2)\cdot s}$

d) $G(s) \approx \dfrac{1-(T/2)\cdot s+(T^2/8)\cdot s^2}{1+(T/2)\cdot s+(T^2/8)\cdot s^2}$



# Criterio de Estabilidad de Routh

Indica si existen raíces con parte real positiva en un polinomio:

$$a_0 \cdot s^n + a_1 \cdot s^{n-1} + a_2 \cdot s^{n-2} + \ldots + a_{n-2} \cdot s^2 + a_{n-1} \cdot s + a_n = 0$$

1) $\forall a_i,\ a_i>0$ (es decir, todos con el mismo signo y sin nulos)

2) Se construye la siguiente tabla:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $s^n$ | $a_0$ | $a_2$ | $a_4$ | $a_6$ | … |
| $s^{n-1}$ | $a_1$ | $a_3$ | $a_5$ | $a_7$ | … |
| $s^{n-2}$ | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | $b_4$ | … |
| $s^{n-3}$ | $c_1$ | $c_2$ | $c_3$ | $c_4$ | … |
| … | … | … | … | | |
| $s^2$ | $u_1$ | $u_2$ | | | |
| $s^1$ | $v_1$ | | | | |
| $s^0$ | $w_1$ | | | | |

$$b_1 = \frac{a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3}{a_1} = -\frac{1}{a_1}\begin{bmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{bmatrix}$$

$$b_2 = \frac{a_1 \cdot a_4 - a_0 \cdot a_5}{a_1} = -\frac{1}{a_1}\begin{bmatrix} a_0 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{bmatrix}$$

$$b_3 = \frac{a_1 \cdot a_6 - a_0 \cdot a_7}{a_1} = -\frac{1}{a_1}\begin{bmatrix} a_0 & a_6 \\ a_1 & a_7 \end{bmatrix}$$

…

$$c_1 = \frac{b_1 \cdot a_3 - a_1 \cdot b_2}{b_1} = -\frac{1}{b_1}\begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}$$

$$c_2 = \frac{b_1 \cdot a_5 - a_1 \cdot b_3}{b_1} = -\frac{1}{b_1}\begin{bmatrix} a_1 & a_5 \\ b_1 & b_3 \end{bmatrix}$$

El sistema que tenga como denominador ese polinomio, será estable si todos los $a_i>0$ y todos los coeficientes de la primera columna de la tabla son también estrictamente positivos.

El polinomio tiene tantos polos con parte real positiva como cambios de signo se producen en la primera columna de la tabla