## Tema 7

# Análisis Frecuencial de los Sistemas Realimentados

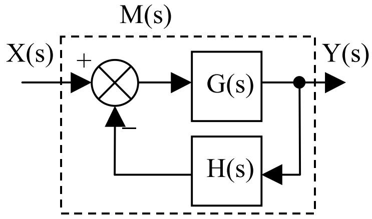




## Indice

## Análisis de la Estabilidad de un Sistema Realimentado

Se trata de analizar la estabilidad del sistema realimentado negativamente, M(s), a partir de la respuesta en frecuencia del sistema en bucle abierto, G(s)·H(s).




• **Margen de fase y de ganancia**: Permite determinar el grado de estabilidad de un sistema realimentado M(s), sobre los diagramas de Bode, Magnitud-Fase o Polar de G(s)·H(s). La FdT G(s)·H(s) tiene que ser de **Fase Mínima** (sistemas con todos sus polos y ceros con parte real negativa y, como máximo, un único polo en el origen).

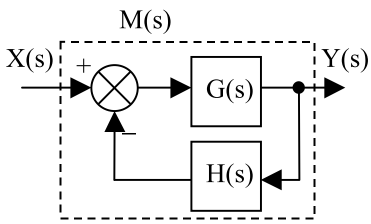
• **Criterio de Nyquist**: Es un estudio de la estabilidad de un sistema realimentado M(s), realizado a partir de las raíces de la ecuación característica 1+G(s)·H(s)=0 y de la respuesta en frecuencia de G(s)·H(s).





## Margen de Fase y de Ganancia

Para sistemas de **fase mínima** en bucle abierto, si la respuesta en frecuencia de la función de transferencia G(s)·H(s) presenta frecuencias en las que la ganancia es positiva a la vez que la fase tiene un valor inferior a -180º (entre -180º y -360º) el sistema realimentado negativamente, M(s), será inestable.




• **Margen de fase**: Es el ángulo (en grados) que habría que restarle a la fase de G(s)·H(s) para volver inestable a M(s). Sobre las representaciones gráficas de la respuesta en frecuencia de G(s)·H(s), es el ángulo que le falta a la fase para llegar a -180º cuando la ganancia es 1 (0 dB). (Si la ganancia es siempre inferior a 0 dB el margen de fase será infinito)

• **Margen de ganancia**: Es el valor por el que habría que multiplicar (o los dB que habría que sumar a) la ganancia de G(s)·H(s), para que M(s) se vuelva inestable. Es decir, para que cuando la fase sea -180º la ganancia fuese 1 (0 dB). (Si $\psi(\omega)$ no corta nunca -180º el margen de ganancia será infinito)

# Cálculo Matemático del Margen de Fase y de Ganancia

$$\text{Sistema 1: } G(s)\cdot H(s) = \frac{5}{s\cdot(s^2+2\cdot s+4)}; \quad G(j\omega)\cdot H(j\omega) = \frac{1.25}{j\omega\cdot(0.25\cdot(j\omega)^2+0.5\cdot j\omega+1)}$$

$$\text{Sistema 2: } G(s)\cdot H(s) = \frac{15}{s\cdot(s^2+2\cdot s+4)}; \quad G(j\omega)\cdot H(j\omega) = \frac{3.75}{j\omega\cdot(0.25\cdot(j\omega)^2+0.5\cdot j\omega+1)}$$

• **Margen de fase**: Es el ángulo que le falta a $\underline{|G(j\omega)\cdot H(j\omega)}$ para llegar a -180º cuando $|G(j\omega)\cdot H(j\omega)|$ es 1 (0 dB).

$$\text{Sistema 1: } |G(j\omega_f)\cdot H(j\omega_f)| = \left|\frac{1.25}{j\omega_f\cdot(0.25\cdot(j\omega_f)^2+0.5\cdot j\omega_f+1)}\right| = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_f = 1.4 \Rightarrow \underline{|G(j1.4)\cdot H(j1.4)} = \underline{\left|\frac{1.25}{j1.4\cdot(0.25\cdot(j1.4)^2+0.5\cdot j1.4+1)}\right.} = -146.4º \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma = 180º - 146.4º = 33.6º \text{ Estable}$$

$$\text{Sistema 2: } |G(j\omega_f)\cdot H(j\omega_f)| = \left|\frac{3.75}{j\omega_f\cdot(0.25\cdot(j\omega_f)^2+0.5\cdot j\omega_f+1)}\right| = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_f = 2.6 \Rightarrow \underline{|G(j2.6)\cdot H(j2.6)} = \underline{\left|\frac{3.75}{j2.6\cdot(0.25\cdot(j2.6)^2+0.5\cdot j2.6+1)}\right.} = -207.3º$$

$$\Rightarrow \gamma = 180º - 207.3º = -27.3º \text{ Inestable}$$

• **Margen de ganancia**: Es el inverso de $|G(j\omega)\cdot H(j\omega)|$ cuando $\underline{|G(j\omega)\cdot H(j\omega)}$ es -180º.

$$\text{Sistema 1: } \underline{|G(j\omega_g)\cdot H(j\omega_g)} = \underline{\left|\frac{1.25}{j\omega_g\cdot(0.25\cdot(j\omega_g)^2+0.5\cdot j\omega_g+1)}\right.} = -180º \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_g = 2 \Rightarrow |G(j2)\cdot H(j2)| = \left|\frac{1.25}{j2\cdot(0.25\cdot(j2)^2+0.5\cdot j2+1)}\right| = 0.625 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_g = 1/0.625 = 1.6 > 1 \text{ Estable}$$

$$\text{Sistema 2: } \underline{|G(j\omega_g)\cdot H(j\omega_g)} = \underline{\left|\frac{3.75}{j\omega_g\cdot(0.25\cdot(j\omega_g)^2+0.5\cdot j\omega_g+1)}\right.} = -180º \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_g = 2 \Rightarrow |G(j2)\cdot H(j2)| = \left|\frac{3.75}{j2\cdot(0.25\cdot(j2)^2+0.5\cdot j2+1)}\right| = 1.88 \Rightarrow$$

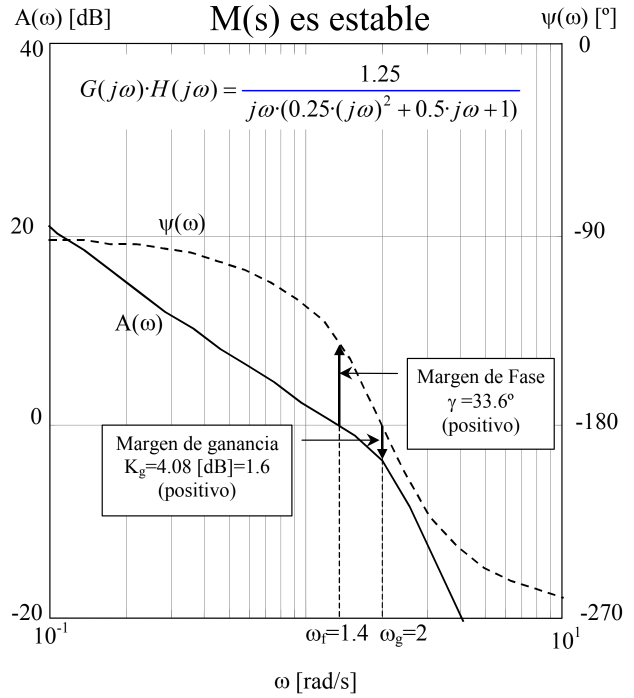
$$\Rightarrow K_g = 1/1.88 = 0.53 < 1 \text{ Inestable}$$



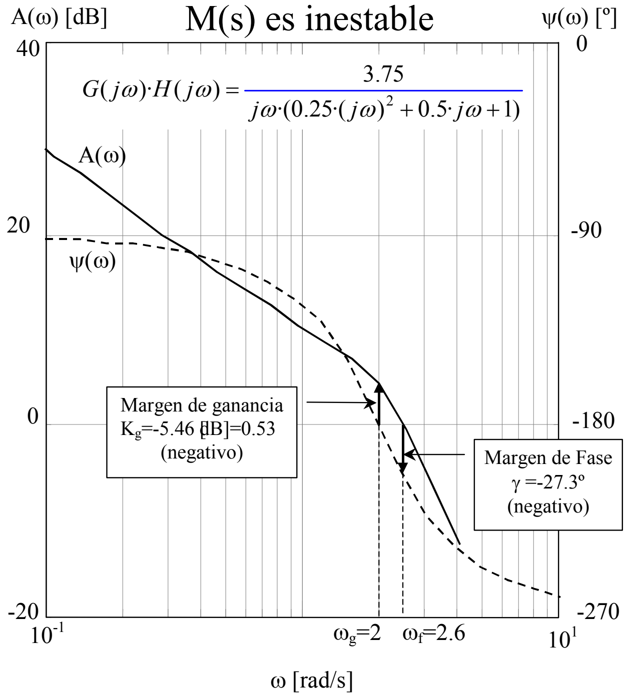


# Margen de Fase y de Ganancia sobre el Diagrama de Bode

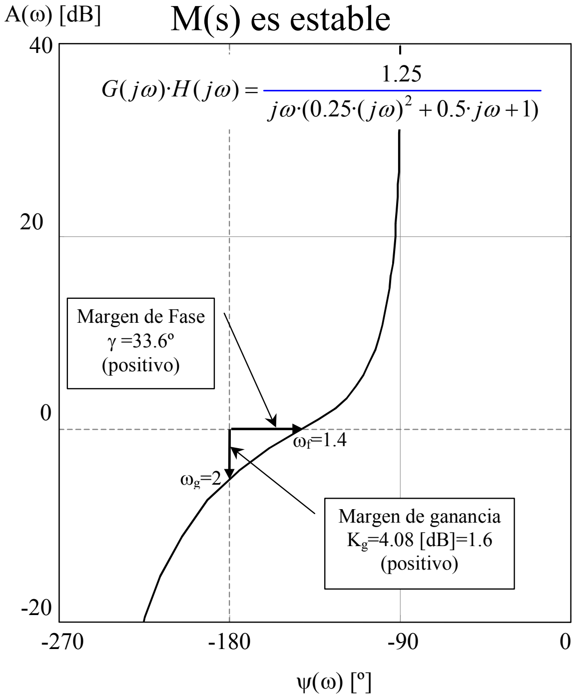
M(s) es estable

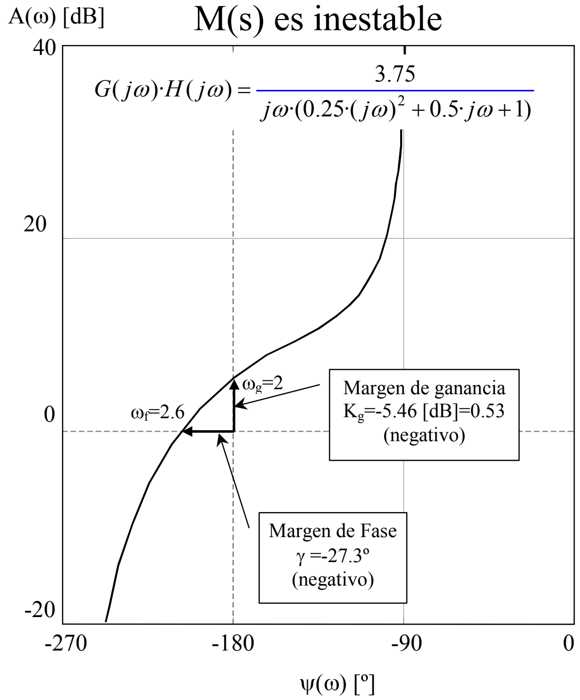



M(s) es inestable



# Margen de Fase y de Ganancia sobre el Diagrama Magnitud-Fase



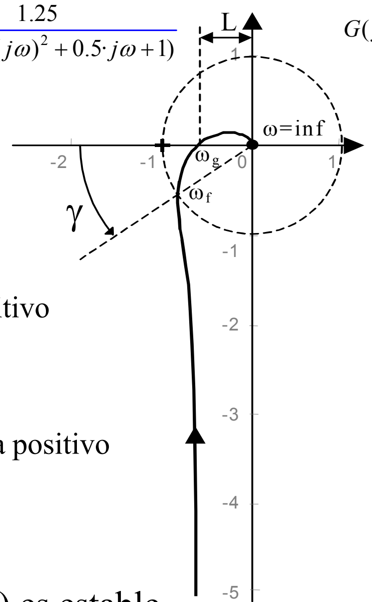



Universidad de Oviedo

REGULACIÓN AUTOMÁTICA

INGENIERÍA DE SISTEMAS Y AUTOMÁTICA

$$G(j\omega)\cdot H(j\omega)=\frac{1.25}{j\omega\cdot(0.25\cdot(j\omega)^2+0.5\cdot j\omega+1)}$$




Margen de fase positivo

$\gamma = 33.6^{o}$

Margen de ganancia positivo

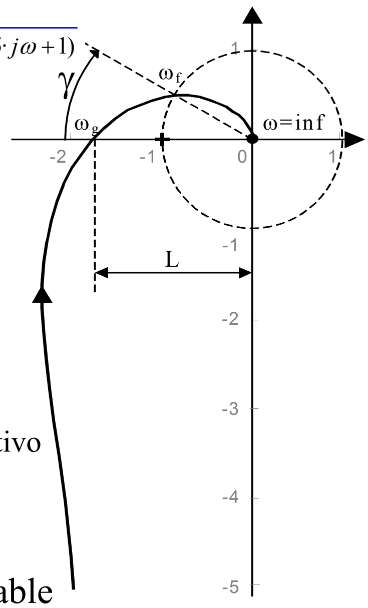
$L = 0.625$

$K_g = 1/L = 1.6 > 1$

M(s) es estable

La curva NO envuelve al punto -1+0·j

$$G(j\omega)\cdot H(j\omega)=\frac{3.75}{j\omega\cdot(0.25\cdot(j\omega)^2+0.5\cdot j\omega+1)}$$




Margen de fase negativo

$\gamma = -27.3^{o}$

Margen de ganancia negativo

$L = 1.88 > 1$

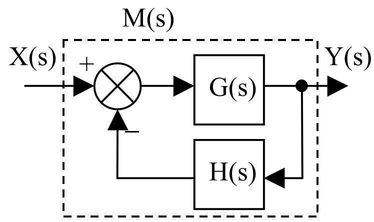
$K_g = 1/L = 0.53 < 1$

M(s) es inestable

La curva envuelve al punto -1+0·j

## Criterio de Nyquist (I)

Basándose en el Principio del Argumento de Cauchy, Nyquist desarrollo un método para estudiar la estabilidad de un sistema realimentado M(s), a partir de las raíces y la respuesta en frecuencia de G(s)·H(s).

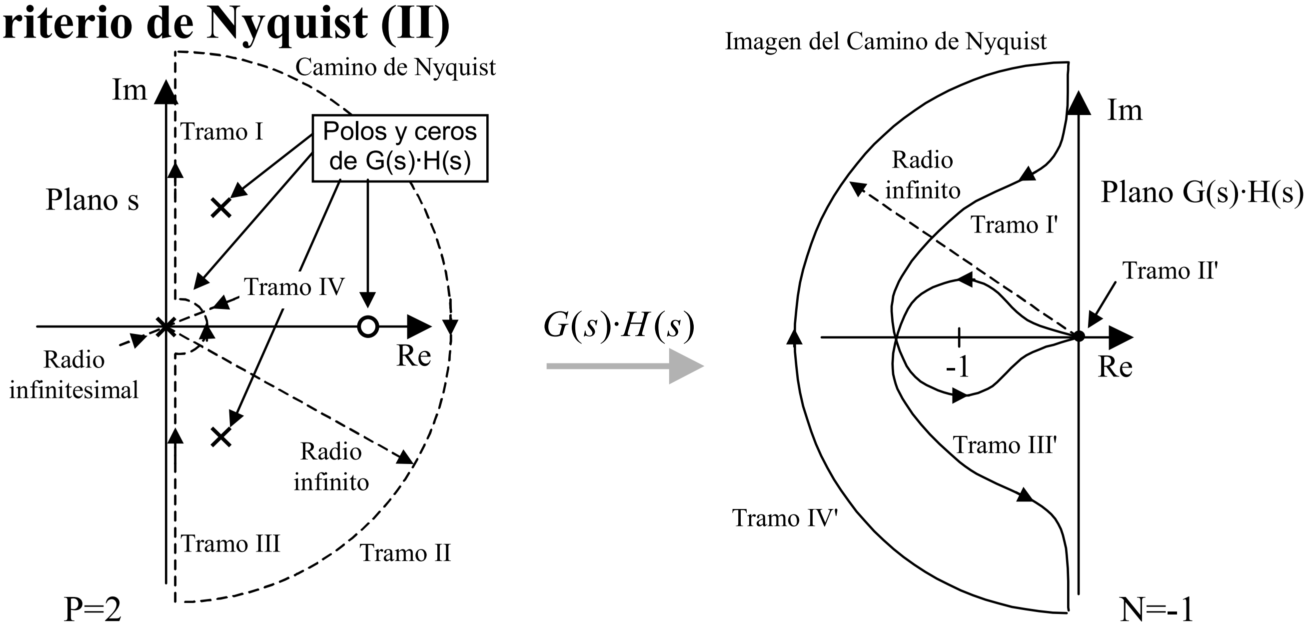



- **Camino de Nyquist**: Es una curva cerrada que envuelve toda la parte real positiva del plano complejo “s” evitando pasar por aquellos puntos donde la función G(s)·H(s) no es analítica (evitando pasar por donde hay polos de G(s)·H(s)).
- **Imagen del Camino de Nyquist**: Es la curva cerrada del plano “G(s)·H(s)” que se obtiene resolviendo G(s)·H(s) cuando *s* recorre el Camino de Nyquist.
- **P**: El número de polos de G(s)·H(s) que hay dentro del Camino de Nyquist.
- **N**: El número de vueltas, contabilizadas en el sentido de las agujas del reloj, de la Imagen del Camino de Nyquist alrededor del punto -1+0·j del plano G(s)·H(s).
- **Z**: El número de polos inestables de M(s). Z=N+P. Si Z>0 => M(s) inestable.





## Criterio de Nyquist (II)



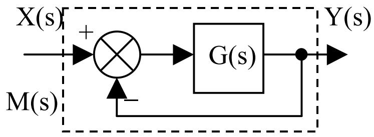

Z=N+P=1 => M(s) tiene un polo inestable, M(s) es inestable

**NOTA: El tramo I’ es el diagrama polar de G(s)·H(s) y el tramo III’ su simétrico respecto al eje real. El tramo II’ es un punto donde finaliza el tramo I’ y comienza el III’. El tramo IV’ (si existe) es un arco de 180º·[nº de polos en el origen de G(s)·H(s)] y radio infinito, que cierra en sentido horario entre el final del tramo III’ y el inicio del I’.**

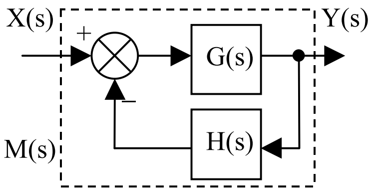
# Obtención de la respuesta en frecuencia: Ábaco de Nichols (I)

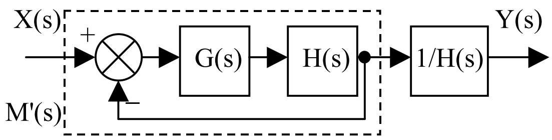
El Ábaco de Nichols se superpone sobre el diagrama Magnitud-Fase y permite obtener la respuesta en frecuencia de un sistema realimentado unitaria y negativamente, M(s), a partir de la respuesta en frecuencia del sistema en bucle abierto, G(s).

$$M(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)}$$




Si la realimentación no es unitaria, se obtiene la respuesta en frecuencia de M'(s) a partir de la de G(s)·H(s) y luego se le suma la respuesta en frecuencia de 1/H(s).




$$M(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)\cdot H(s)}$$

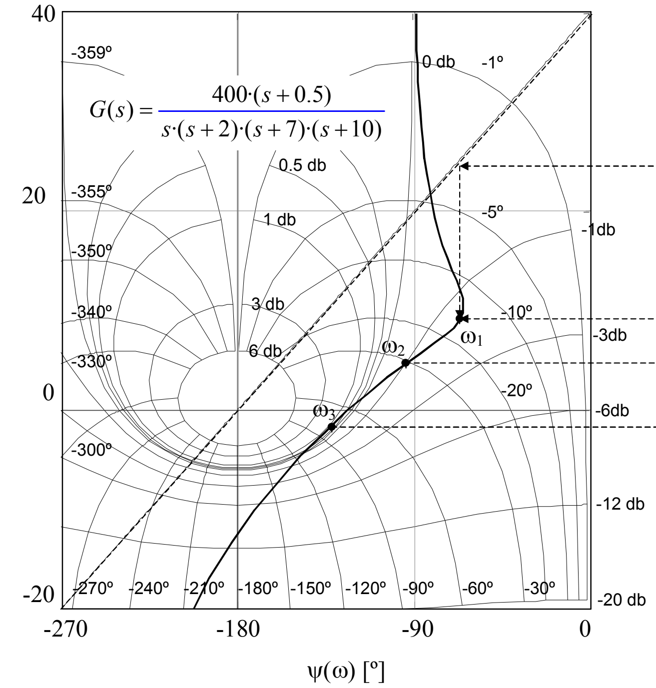
$$M'(s) = \frac{G(s)\cdot H(s)}{1+G(s)\cdot H(s)}$$

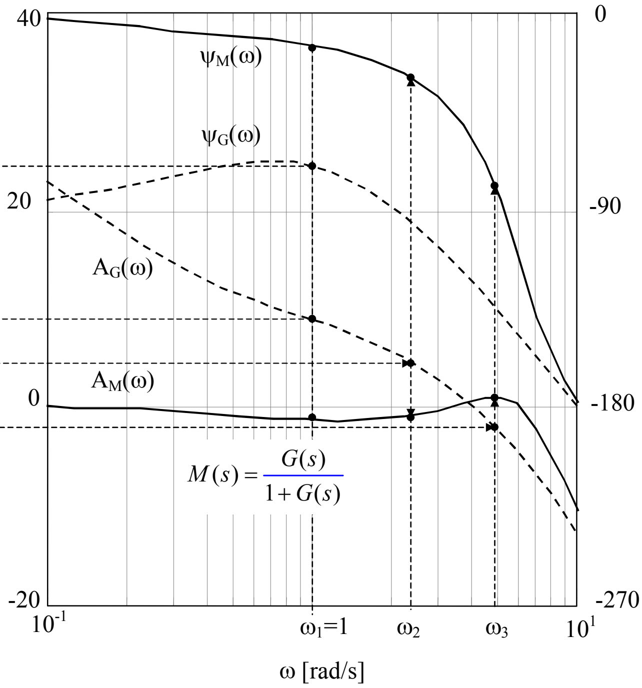
$$M(s) = M'(s)/H(s)$$



Universidad de Oviedo
REGULACIÓN AUTOMÁTICA
INGENIERÍA DE SISTEMAS Y AUTOMÁTICA

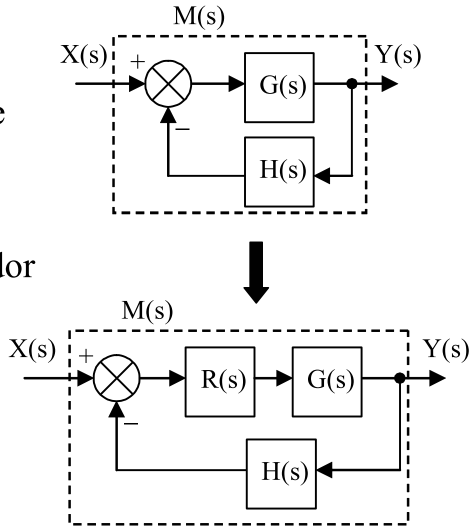
# Obtención de la respuesta en frecuencia: Ábaco de Nichols (II)



## Redes de compensación

- **Objetivos**:
  - –Mejorar la estabilidad: aumentando los márgenes de fase y ganancia.
  - –Modificar el ancho de banda.
- **Red de adelanto de fase**: es comparable a un regulador PD. R(s)=(1+T·s)/(1+α·T·s); α<1.
- **Red de retraso de fase**: se podría comparar con un regulador PI. R(s)=(1+T·s)/(1+ β·T·s); β>1.
- **Red de adelanto-retraso de fase**: combina las dos anteriores.

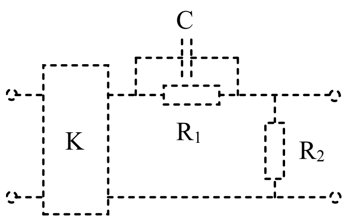


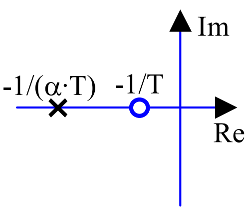

NOTA: Estas redes tienen efecto sobre las respuestas transitoria y permanente en el tiempo. Pero el diseño de estas redes para modificar o ajustar la respuesta en el tiempo del sistema M(s) es complicado y requiere de gran experiencia.

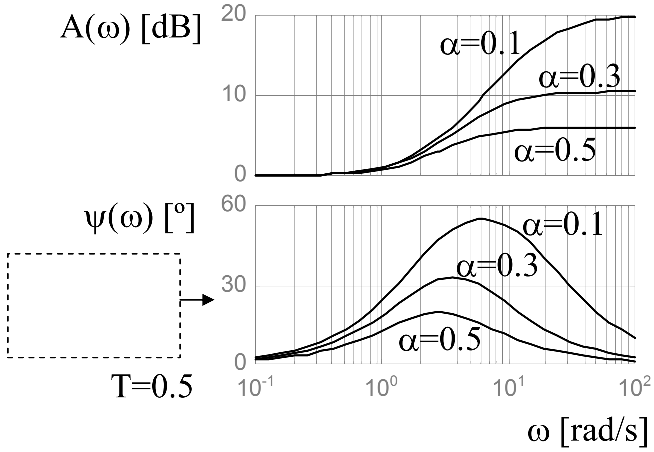


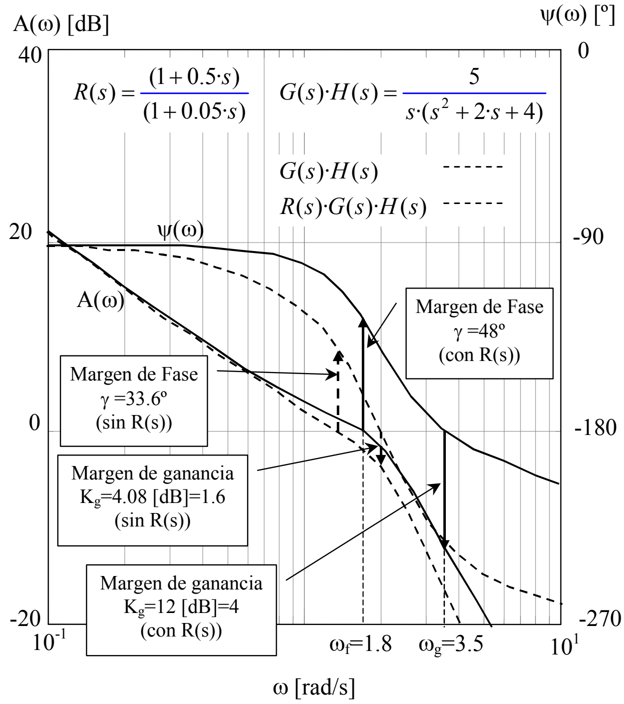


## Red de adelanto de fase $R(s)=\dfrac{(1+T\cdot s)}{(1+\alpha\cdot T\cdot s)}\ ;\quad \alpha<1$



# Red de retraso de fase

$$R(s)=\frac{(1+T\cdot s)}{(1+\beta\cdot T\cdot s)}\ ;\quad \beta>1$$