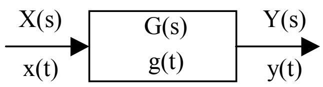
Tabla de Transformadas de Laplace

	$F(s)$	$f(t) \quad t \geq 0 \quad (f(t)=0 \text{ para } t<0)$	Observaciones
1	1	$\delta(t)$	Impulso de Dirac
2	e^{-Ts}	$\delta(t-T)$	Impulso de Dirac retrasado T segundos
3	$\frac{1}{s}$	$u_0(t)$	Escalón unitario
4	$\frac{1}{s}e^{-Ts}$	$u_0(t-T)$	Escalón unitario retrasado T segundos
5	$\frac{1}{s^2}$	t	Rampa unidad $tu_0(t)$
6	$\frac{1}{s^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	n = 1, 2, 3, … 0! = 1
7	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$e^{-at}u_0(t)$
8	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$te^{-at}u_0(t)$
9	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-at}$	n = 1, 2, 3, … 0! = 1
10	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{b-a}(e^{-at}-e^{-bt})$	Polos reales
11	$\frac{1}{s(s+a)}$	$\frac{1}{a}(1-e^{-at})$	(Como 10 con b=0)
12	$\frac{s+z}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{b-a}\left[(z-a)e^{-at}-(z-b)e^{-bt}\right]$	Polos reales
13	$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{a-b}\left[ae^{-at}-be^{-bt}\right]$	(Como 12 con z=0)
14	$\frac{1}{(s+a)(s+b)(s+c)}$	$\frac{e^{-at}}{(b-a)(c-a)}+\frac{e^{-bt}}{(c-b)(a-b)}+\frac{e^{-ct}}{(a-c)(b-c)}$	(Particularizable para c=0)
15	$\frac{(s+z)}{(s+a)(s+b)(s+c)}$	$\frac{(z-a)e^{-at}}{(b-a)(c-a)}+\frac{(z-b)e^{-bt}}{(c-b)(a-b)}+\frac{(z-c)e^{-ct}}{(a-c)(b-c)}$	(Particularizable para c=0 ó z=0)

	$F(s)$	$f(t) \quad t \geq 0 \quad (f(t)=0 \text{ para } t<0)$	Observaciones
16	$\frac{1}{s^2(s+a)}$	$\frac{1}{a^2}(at-1+e^{-at})$	
17	$\frac{1}{s(s+a)^2}$	$\frac{1}{a^2}(1-e^{-at}-ate^{-at})$	
18	$\frac{s+z}{s(s+a)^2}$	$\frac{1}{a^2}(z-ze^{-at}+a(a-z)te^{-at})$	
19	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$sen(\omega t)$	Polos imaginarios puros
20	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos(\omega t)$	Polos imaginarios puros
21	$\frac{s+z}{s^2+\omega^2}$	$\sqrt{\frac{z^2+\omega^2}{\omega^2}}sen(\omega t+\phi) \quad \phi=\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{z}\right)$	Polos imaginarios puros
22	$\frac{1}{s(s^2+\omega^2)}$	$\frac{1}{\omega^2}(1-\cos(\omega t))$	
23	$\frac{s+z}{s(s^2+\omega^2)}$	$\frac{z}{\omega^2}-\sqrt{\frac{z^2+\omega^2}{\omega^4}}\cos(\omega t+\phi) \quad \phi=\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{z}\right)$	
24	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}sen(\omega t)$	Polos complejos
25	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos(\omega t)$	Polos complejos
26	$\frac{s+z}{(s+a)^2+\omega^2}$	$\sqrt{\frac{(z-a)^2+\omega^2}{\omega^2}}e^{-at}sen(\omega t+\phi) \quad \phi=\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{z-a}\right)$	Polos complejos
27	$\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$	$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_n t}sen\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t\right)$	Polos complejos (equivalente a 24)
28	$\frac{s}{(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)}$	$-\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_n t}sen\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t+\phi\right) \quad \phi=\cos^{-1}\xi$	Polos complejos
29	$\frac{\omega_n^2}{s(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)}$	$1-\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_n t}sen\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t+\phi\right) \quad \phi=\cos^{-1}\xi$	

Sistemas de Primer Orden (I)

$$G(s)=\frac{K}{1+T\cdot s}$$

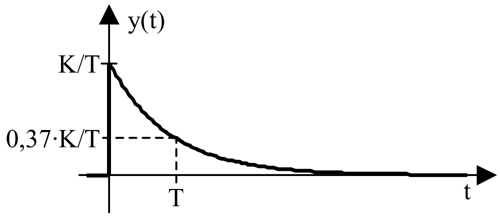


K: ganancia estática o en régimen permanente

T: constante de tiempo

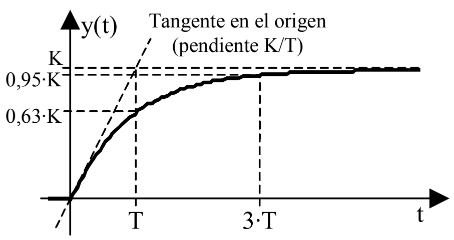
- Respuesta impulsional: X(s)=1

$$y(t)=L^{-1}[Y(s)]=L^{-1}[G(s)]=\frac{K}{T}e^{\frac{-t}{T}}\cdot u_0(t)$$



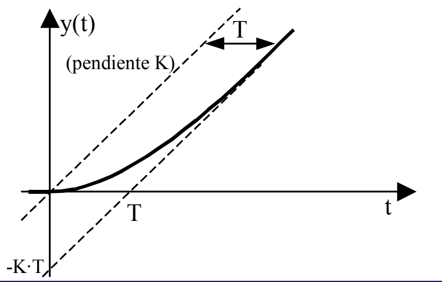
- Respuesta a un escalón: X(s)=1/s

$$y(t)=L^{-1}[Y(s)]=L^{-1}\left[\frac{G(s)}{s}\right]=K\cdot(1-e^{\frac{-t}{T}})\cdot u_0(t)$$



- Respuesta a una rampa: X(s)=1/s²

$$y(t)=L^{-1}[Y(s)]=L^{-1}\left[\frac{G(s)}{s^2}\right]=[K\cdot(t-T)+K\cdot T\cdot e^{\frac{-t}{T}}]\cdot u_0(t)$$



Sistemas de Segundo Orden (I)

$$G(s)=\frac{K\cdot\omega_n^2}{s^2+2\cdot\xi\cdot\omega_n\cdot s+\omega_n^2}=\frac{K}{\frac{1}{\omega_n^2}\cdot s^2+\frac{2\cdot\xi}{\omega_n}\cdot s+1}=\frac{K_s}{s^2+a\cdot s+b}$$

Si a,b>0, el sistema es estable

$$s^2+2\cdot\xi\cdot\omega_n\cdot s+\omega_n^2=0$$

Las raíces del polinomio (polos del sistema) son:

$$s_{1,2}=-\xi\cdot\omega_n\pm\omega_n\cdot\sqrt{\xi^2-1}$$

Si $\xi<1$ las raíces son complejas conjugadas:

$$\sigma=\xi\cdot\omega_n \qquad \omega_d=\omega_n\cdot\sqrt{1-\xi^2}$$

$$s_{1,2}=-\sigma\pm j\cdot\omega_d$$

K: ganancia estática

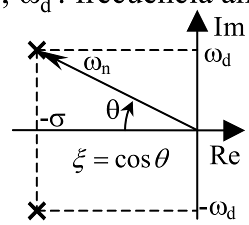
$T=2\cdot\xi/\omega_n$: constante de tiempo

$\xi>0$: coeficiente de amortiguamiento

$\omega_n>0$: frecuencia natural del sistema

$\sigma>0$: constante de amortiguamiento o factor de decrecimiento

Si $\xi<1$, ω_d: frecuencia amortiguada



Sistemas de Segundo Orden (II)

$$si \quad 0<\xi<0.707\begin{cases}M_r=\dfrac{1}{2\cdot\xi\cdot\sqrt{1-\xi^2}} & \leftarrow \text{Pico de Resonancia}\\ \omega_r=\omega_n\cdot\sqrt{1-2\cdot\xi^2} & \leftarrow \text{Frecuencia de Resonancia}\end{cases}$$

Sobreoscilación:

$$M_p=e^{\frac{-\pi\cdot\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}\cdot 100[\%]=e^{\frac{-\pi\cdot\sigma}{\omega_d}}\cdot 100[\%]=e^{-\pi\cdot\text{cotg}\,\theta}\cdot 100[\%]=\frac{B-A}{A}\cdot 100[\%]$$

Tiempo de subida:

$$t_r=\frac{\pi-\theta}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}=\frac{\pi-\theta}{\omega_d}$$

Tiempo de pico:

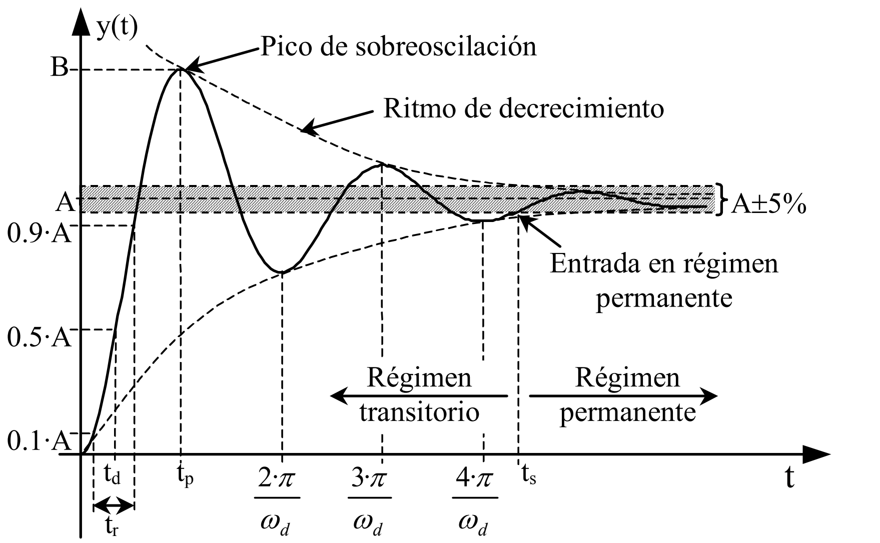
$$t_p=\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}=\frac{\pi}{\omega_d}$$

Tiempo de establecimiento:

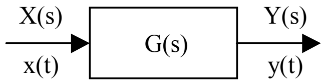
$$t_s=\frac{\pi}{\xi\cdot\omega_n}=\frac{\pi}{\sigma} \quad \text{(aprox.)}$$

Tiempo de retardo:

$$t_d=\frac{1+\frac{\xi}{\sqrt{2}}}{\omega_n} \quad \text{(aprox.)}$$



Respuesta a una Entrada Senoidal



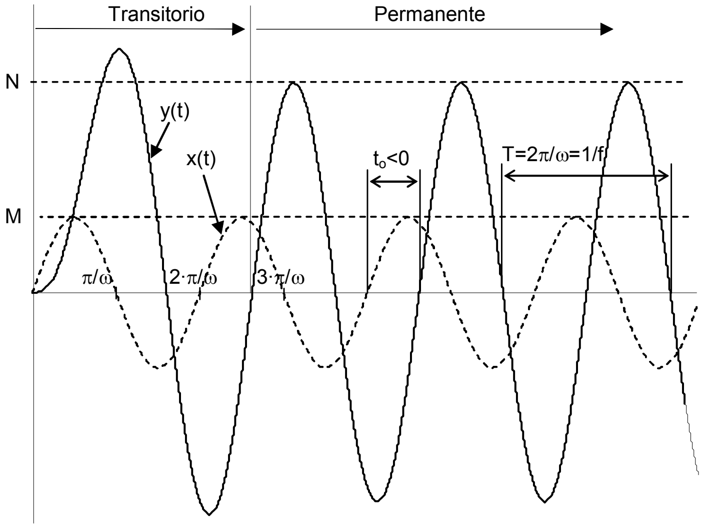
$$x(t) = M \cdot \mathrm{sen}(\omega \cdot t) \cdot u_0(t)$$

$$G(j\omega) = G(s)\big]_{s=j\omega}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{N}{M}$$

$$\underline{|G(j\omega)} = t_o \cdot \omega \quad [rad]$$

$$y_{RP}(t) = |G(j\omega)| \cdot M \cdot sen(\omega \cdot t + \underline{|G(j\omega)})$$



Relación de amplitudes (ganancia):

$A(\omega) = 20 \cdot \log|G(j\omega)|$ [dB]

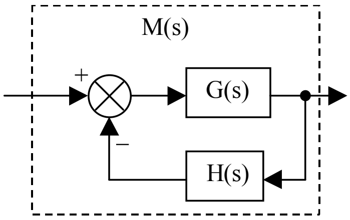
Ángulo de fase:

$\Psi(\omega) = \underline{|G(j\omega)}$ [º]

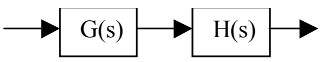
Descripción de un Bucle de Realimentación

- Cadena cerrada: M(s)

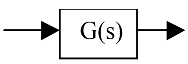
$$M(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s) \cdot H(s)}$$



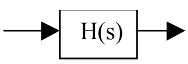
- Cadena abierta: G(s)·H(s)



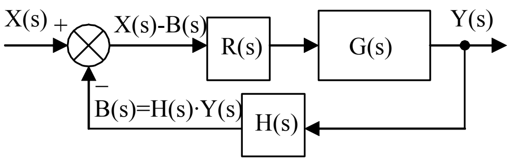
- Cadena directa: G(s)



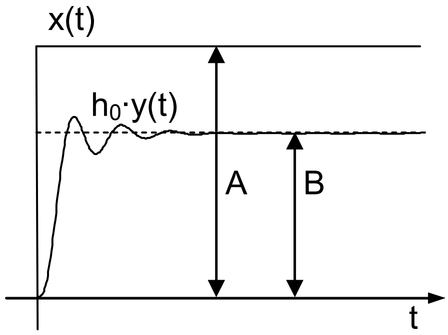
- Realimentación: H(s)



Cálculo del Error de Posición



$$e_p = \frac{A-B}{A} = \frac{1}{1+K_p} \quad (\times 100\ [\%])$$



- Error de posición: $X(s)=1/s$

$$h_0 = \lim_{s\to 0} H(s)$$

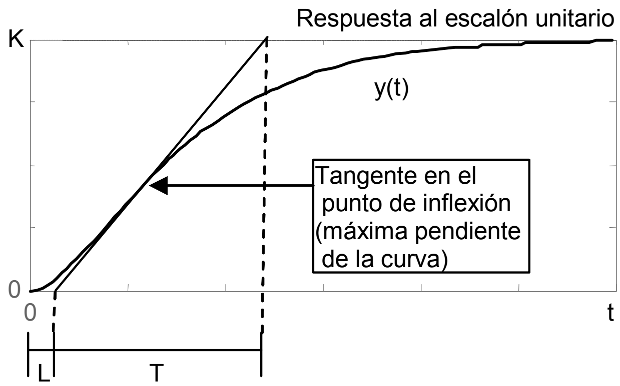
$$K_p = \lim_{s\to 0} h_0 \cdot R(s)\cdot G(s)$$

TIPO	0	1	2
e_p	$1/(1+K_p)$	0	0

- Si R(s)·G(s) es de tipo cero:
  K_p=cte. ⇒ e_p=cte.
- Si R(s)·G(s) es de tipo uno o superior:
  K_p=inf. ⇒ e_p=0

Diseño de un regulador PID: método de Ziegler-Nichols

TIPO	K_p	$K_i=1/T_i$	$K_d=T_d$
P	$T/(K\cdot L)$	0	0
PI	$0.9\cdot T/(K\cdot L)$	$0.3/L$	0
PID	$1.2\cdot T/(K\cdot L)$	$0.5/L$	$0.5\cdot L$



$$u(t) = K_p\cdot\left(e(t) + K_i\cdot\int e(t)\cdot dt + K_d\frac{de(t)}{dt}\right)$$

$$R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p\cdot\left(1+\frac{K_i}{s}+K_d\cdot s\right)$$

$$P: R(s) = K_p = \frac{T}{K\cdot L}$$

$$PI: R(s) = K_p\cdot\left(\frac{s+K_i}{s}\right) = 0.9\cdot\frac{T}{K\cdot L}\cdot\left(\frac{s+0.3/L}{s}\right)$$

$$PID: R(s) = K_p\cdot\left(\frac{K_d\cdot s^2+s+K_i}{s}\right) = 0.6\cdot\frac{T}{K}\frac{(s+1/L)^2}{s}$$