

**PROBLEMA:**

Dadas las siguientes ecuaciones y considerando a  $u(t)$  como la variable de entrada y a  $y(t)$  como la de salida, obtenga la función de transferencia del sistema:

$$u(t) = R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

$$f(t) = D \cdot i(t)$$

$$f(t) = K \cdot y(t) + M \cdot \frac{d^2 y(t)}{dt^2}$$

**SOLUCIÓN:**

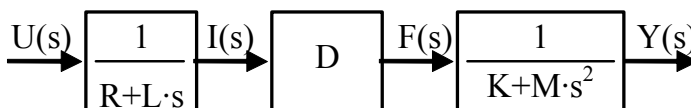
$$U(s) = R \cdot I(s) + L \cdot s \cdot I(s)$$

Las ecuaciones en transformadas de Laplace son:

$$F(s) = D \cdot I(s)$$

$$F(s) = K \cdot Y(s) + M \cdot s^2 \cdot Y(s)$$

El diagrama de bloques correspondiente será:



La función de transferencia será:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{D}{(L \cdot s + R) \cdot (M \cdot s^2 + K)}$$

**PROBLEMA:**

Las siguientes ecuaciones representan el modelo matemático de un sistema. Considerando a  $u(t)$  como la variable de entrada y a  $y(t)$  como la de salida y sabiendo que inicialmente el sistema está en un punto de equilibrio definido por el valor de  $f(t)=f_0$  para  $t<0$ :

$$u(t) = R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

$$f(t) = D \cdot i(t)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = K_1 \cdot f(t) + K_2 \cdot f^2(t)$$

- Obtenga la forma en transformadas de Laplace de cada una de las tres ecuaciones.
- Represente en un diagrama de bloques las tres ecuaciones del sistema.
- Obtenga la función de transferencia del sistema.
- ¿De que orden es la función de transferencia obtenida?

**SOLUCIÓN:**

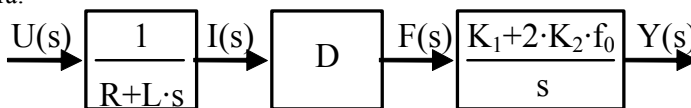
a) Sólo la tercera ecuación no es lineal. Por lo tanto, las ecuaciones en transformadas de Laplace son:

$$U(s) = R \cdot I(s) + L \cdot s \cdot I(s)$$

$$F(s) = D \cdot I(s)$$

$$s \cdot Y(s) = K_1 \cdot F(s) + 2 \cdot K_2 \cdot f_0 \cdot F(s)$$

b) El diagrama de bloques correspondiente será:



$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{D \cdot (K_1 + 2 \cdot K_2 \cdot f_0)}{L \cdot s^2 + R \cdot s}$$

c) La función de transferencia será:

d) Es sistema es por lo tanto de segundo orden.

**PROBLEMA:**

Dado el sistema definido por las ecuaciones:

$$E(t) = X(t) - 4Y(t)$$

$$\frac{dA(t)}{dt} + 3A(t) = 4E(t)$$

$$4 \frac{dB(t)}{dt} + 5B(t) = 4A(t) + 5E(t)$$

$$\frac{dY(t)}{dt} = 5B(t)$$

en las que X(t) representa la variable de entrada, representar el diagrama de bloques del sistema y calcular la función de transferencia Y(s)/X(s).

---

**SOLUCIÓN:**

Dado que las cuatro ecuaciones del modelo del sistema son lineales, se obtendrán en primer lugar las ecuaciones transformadas de Laplace del sistema. Para ello se supondrá, como de costumbre, condiciones iniciales nulas, con lo que resulta:

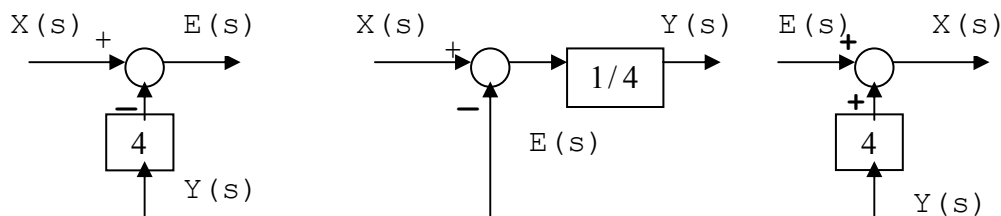
$$E(s) = X(s) - 4Y(s)$$

$$sA(s) + 3A(s) = 4E(s)$$

$$4sB(s) + 5B(s) = 4A(s) + 5E(s)$$

$$sY(s) = 5B(s)$$

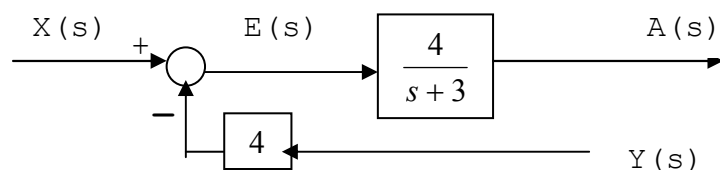
Una vez puestas las ecuaciones en forma de transformadas de Laplace, puede iniciarse la construcción del diagrama de bloques. Para ello se deberá comenzar por representar cualquiera de las ecuaciones que contenga alguna de las variables de entrada. En este caso la única señal de entrada es X(t) y por lo tanto la representación se iniciará por la primera ecuación. Esta ecuación puede representarse de las tres maneras siguientes:



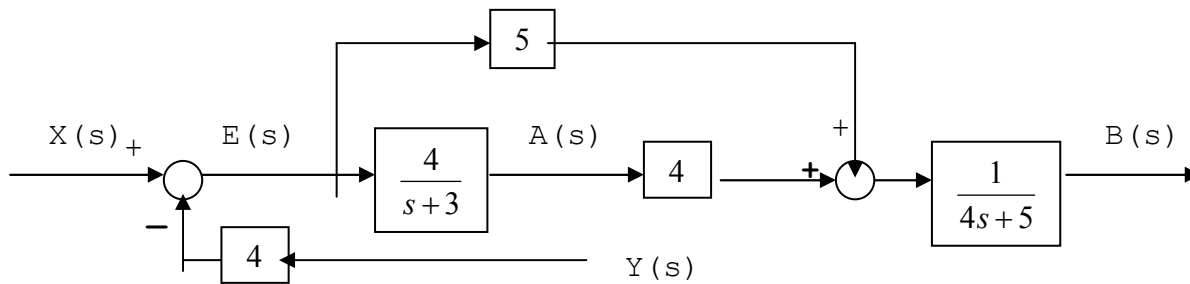
Sin embargo, la última de las representaciones no es válida, puesto que en ella la señal X(s) no aparece como señal de entrada, al ser sus valores consecuencia de los valores que toman las señales E(s) e Y(s). En cuanto a las dos primeras representaciones, cualquiera de ellas es correcta desde un punto de vista matemático, sin embargo sólo la primera de ellas da lugar a que todos los bloques del diagrama sean físicamente realizables por lo que es precisamente esta la elegida.

A partir por lo tanto de la primera representación, las distintas etapas en el dibujo del diagrama de bloques son las siguientes:

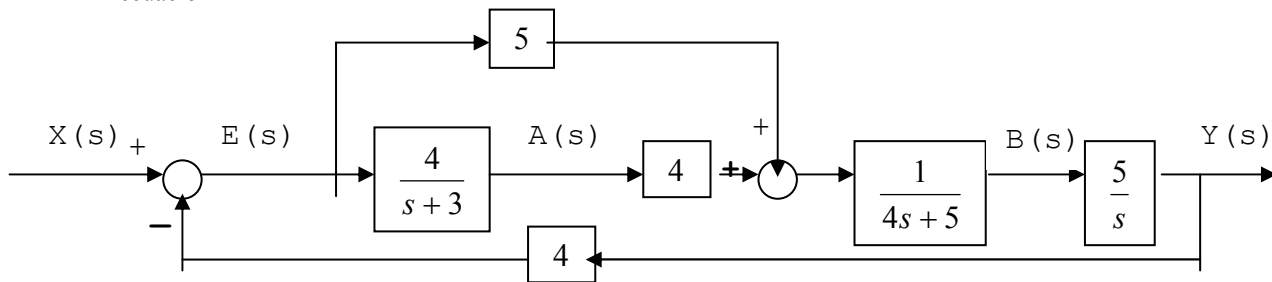
- 2ª ecuación



- 3ª ecuación

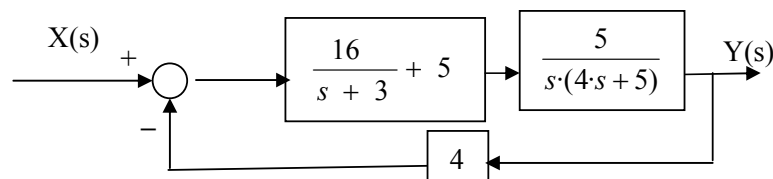


- 4ª ecuación

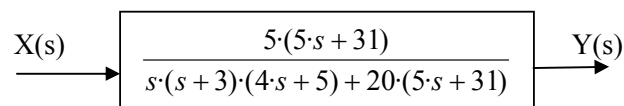


Como puede observarse en esta representación todos los bloques son físicamente realizables, por lo que es preferible a otras representaciones, válidas desde un punto de vista matemático, pero que no representan las relaciones de causalidad en cada uno de los subsistemas del sistema global.

Multiplicando los bloques en serie y sumando las ramas en paralelo:



Y volviendo a multiplicar los bloques en serie y operando el lazo de realimentación:



Por lo tanto:

$$\frac{Y(s)}{X(x)} = \frac{25 \cdot s + 155}{4 \cdot s^3 + 17 \cdot s^2 + 115 \cdot s + 620}$$

**PROBLEMA:**

El sistema de la figura es un regulador de velocidad para motores de corriente continua controlados por inducido donde la realimentación se realiza sin necesidad de dinámo tacométrica.

El sistema de realimentación consiste en medir con un sensor la corriente  $i(t)$  que pasa a través del rotor del motor y multiplicarla por la resistencia  $R$ , equivalente a la del rotor del motor. La tensión resultante, de valor  $R \cdot i(t)$  se resta de la tensión de alimentación del motor  $u(t)$  obtenida mediante otro sensor. El resultado de dicha resta es  $u_c(t)$ , que se usa como señal de realimentación para restarla de la tensión de referencia  $u_r(t)$  en el comparador.

La tensión de salida del comparador se amplifica mediante un amplificador de ganancia  $K$  que aporta la potencia necesaria para alimentar el motor cuyas ecuaciones son:

$$u(t) = R \cdot i(t) + L \cdot di(t)/dt + u_m(t)$$

$$u_m(t) = K_b \cdot \omega(t)$$

$$P(t) = K_p \cdot i(t)$$

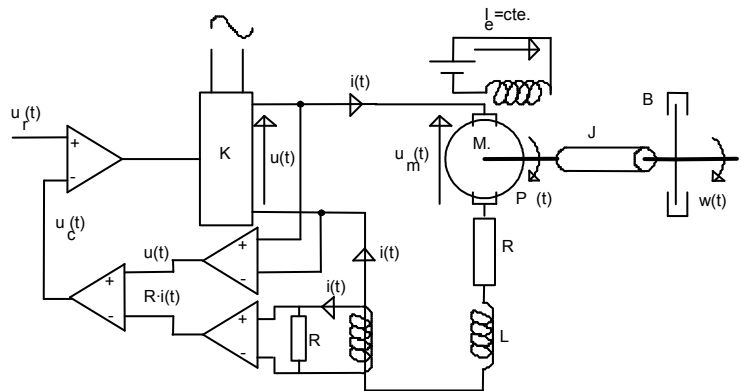
$R, L$ : Resistencia e inductancia del circuito equivalente del rotor.

$K_b$ : Constante de fuerza contraelectromotriz.

$K_p$ : Constante de par.

La carga que ha de vencer el par motor se representa mediante una inercia  $J$  y un coeficiente de rozamiento viscoso  $B$ .

Obtener el diagrama de bloques y la función de transferencia del sistema.



**SOLUCIÓN:**

Las Ecuaciones que describen al sistema son:

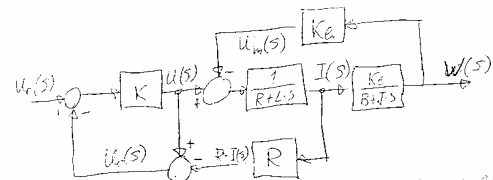
- 1)  $U(s) = K(U_r(s) - U_c(s))$  Comparador Amplificador
- 2)  $U_c(s) = U(s) - R \cdot I(s)$  Realimentación
- 3)  $U(s) = R \cdot I(s) + L \cdot s \cdot I(s) + U_m(s)$  Circuito inductivo del Motor
- 4)  $U_m(s) = K_b \cdot W(s)$  F.c.e.m
- 5)  $P(s) = K_p \cdot I(s)$  Par Motor
- 6)  $P(s) = B \cdot W(s) + J \cdot s \cdot W(s)$  Par Resistente

Como todas las ecuaciones son lineales las podemos pasar directamente a transformadas de Laplace. Quedarán en función de los parámetros:  $K, R, L, K_b, K_p, B$  y  $J$ .

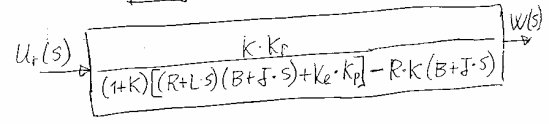
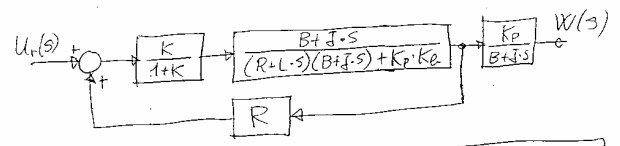
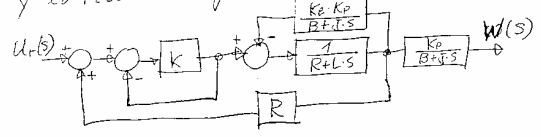
- 1)  $U(s) = K(U_r(s) - U_c(s))$
- 2)  $U_c(s) = U(s) - R \cdot I(s)$
- 3)  $U(s) = R \cdot I(s) + L \cdot s \cdot I(s) + U_m(s)$
- 4)  $U_m(s) = K_b \cdot W(s)$
- 5)  $P(s) = K_p \cdot I(s)$
- 6)  $P(s) = B \cdot W(s) + J \cdot s \cdot W(s)$

Por el esquema se observa que la variable  $U_r(t)$  es una entrada que permite controlar el sistema, cuya variable de salida será  $w(t)$  ya que el enunciado indica que se trata de un control de velocidad.

Según esto se procede a construir el diagrama de bloques.



y lo reducimos para obtener la F.d.T



$$G(s) = \frac{W(s)}{U_r(s)} = \frac{K \cdot K_p}{(1+K)[(R+Ls)(B+Js) + K_b \cdot K_p] - R \cdot K(B+Js)}$$

**PROBLEMA:**

El sistema de la figura representa un mecanismo elevador de posicionamiento vertical que desplaza un elemento móvil con masa  $m(t)$  variable (perturbación del sistema). La altura  $x(t)$  del elemento móvil se fija mediante la tensión de referencia  $n(t)$ . El sistema se puede representar mediante las siguientes ecuaciones:

$$u(t) = K \cdot [n(t) - v(t)]$$

$$u(t) = R \cdot i(t) + K_e \cdot d\theta(t)/dt$$

$$P(t) = K_m \cdot i(t)$$

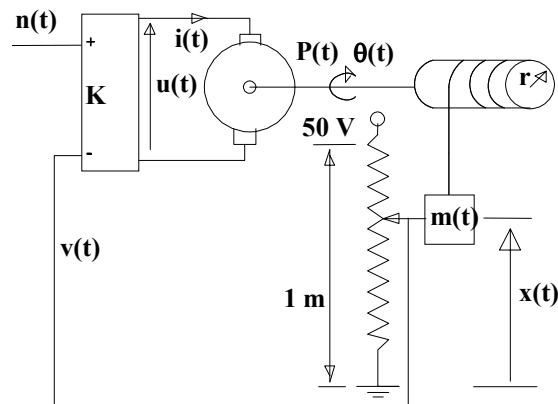
$$P(t) = F \cdot d\theta(t)/dt + J \cdot d^2\theta(t)/dt^2 + r^2 \cdot m(t) \cdot d^2\theta(t)/dt^2 + r \cdot g \cdot m(t)$$

$$x(t) = r \cdot \theta(t)$$

$$v(t) = A \cdot x(t)$$

Constantes:

$K = \text{modificable}$	$K_e = 0,09 \text{ V} \cdot \text{s} \cdot \text{rad}^{-1}$	$K_m = 0,1 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1}$
$R = 5 \Omega$	$F = 0,2 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s} \cdot \text{rad}^{-1}$	$J = 10^{-5} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$
$r = 1 \text{ cm}$	$g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$	$A = 0.5 \text{ V} \cdot \text{cm}^{-1}$



- Construya el diagrama de bloques sabiendo que el sistema se encuentra en equilibrio con una masa  $m_0=0,3 \text{ Kg}$  a una altura  $x_0=0,5 \text{ m}$ .
- Obtenga la función de transferencia  $X(s)/N(s)$ .
- Determine el valor de  $K$  para que el sistema tenga una sobreoscilación del 4,32% y represente la forma aproximada de la respuesta  $x(t)$  del sistema ante un escalón de entrada de 2 V en la señal  $n(t)$  para ese valor de  $K$ .

**SOLUCIÓN:**

$$U(s) = K(N(s) - V(s))$$

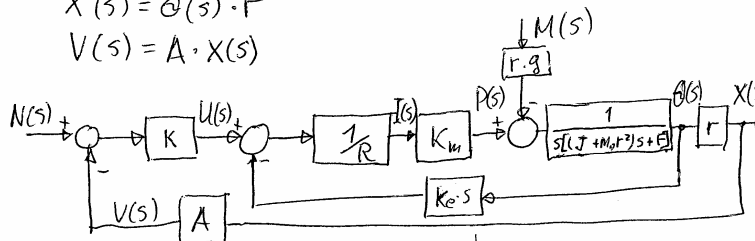
$$U(s) = R \cdot I(s) + K_e \cdot s \cdot \Theta(s)$$

$$P(s) = K_m I(s)$$

$$P(s) = r \cdot g M(s) + [J + m_0 r^2] s^2 + F \cdot s \cdot \Theta(s)$$

$$X(s) = \Theta(s) \cdot r$$

$$V(s) = A \cdot X(s)$$

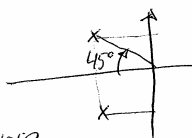


$$M(s) = \frac{X(s)}{r} = \frac{K \cdot K_m \cdot r}{R(J + m_0 r^2) s^2 + (R \cdot F + K_m K_e) s + K K_m r A} X(s)$$

$$M(s) = \frac{X(s)}{N(s)} = \frac{5K}{s^2 + 50s + 250K}$$

$$s_{1,2} = \frac{-50 \pm \sqrt{50^2 - 4 \cdot 1 \cdot 250K}}{2 \cdot 1}$$

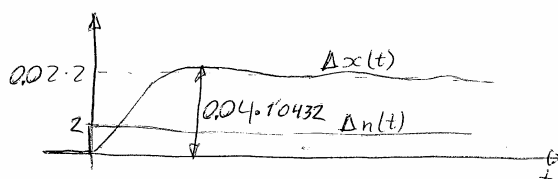
$$M_p = 0,0432 \Rightarrow \theta_p = 45^\circ$$



Parte real = Parte imaginaria

$$50 = \sqrt{1000K - 2500} \Rightarrow 2500 = 1000K - 2500$$

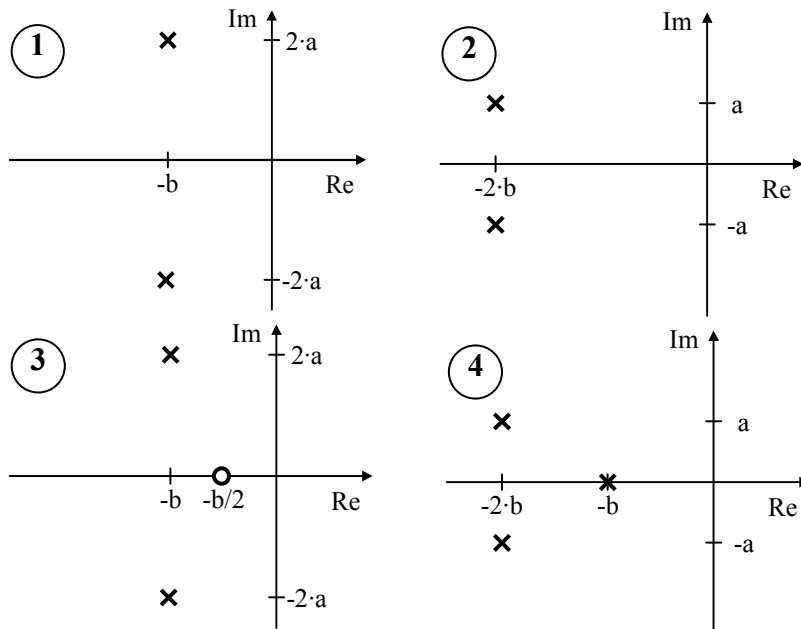
$$K = 5$$



**PROBLEMA:**

Ordenar los cuatro sistemas representados por sus mapas de ceros y polos:

- En función de la sobreoscilación
- En función del tiempo de pico



**SOLUCIÓN:**

Sobreoscilación:  $M_p = e^{-\frac{\pi}{\tan \theta}}$   $\theta_a > \theta_b \Rightarrow M_{p_a} > M_{p_b}$   
 El sistema ③ es el de mayor sobreoscilación, ya que presenta un par de polos complejos con mayor ángulo  $\theta$  que los sistemas ② y ④, y tiene un cero adicional que hará que su sobreoscilación sea mayor que la del sistema ①

El siguiente será el sistema ① ya que el ② y el ④ tienen menor ángulo  $\theta$  en sus polos complejos conjugados. Y, entre estos, el sistema ④ tendrá menor sobreoscilación que el ② por la presencia del polo adicional.

$$M_{p_3} > M_{p_1} > M_{p_2} > M_{p_4}$$

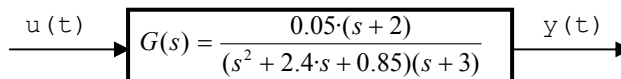
Tiempo de pico:  $t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$   $\omega_{d_a} > \omega_{d_b} \Rightarrow t_{p_a} < t_{p_b}$

El orden será el mismo atendiendo a las mismas razones que en el caso anterior para el parámetro  $\omega_d$ . En este caso el sistema ③ será el de menor tiempo de pico.

$$t_{p_3} < t_{p_1} < t_{p_2} < t_{p_4}$$

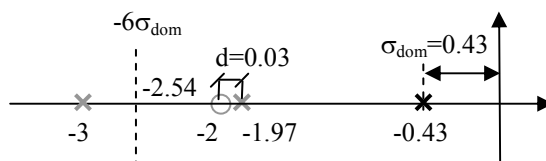
**PROBLEMA:**

Dado el sistema de la figura, obtener uno de orden más reducido equivalente al dado, indicando las diferencias en su respuesta ante un escalón unitario en la señal de entrada.



**SOLUCIÓN:**

El sistema presenta un cero ( $z_1 = -2$ ) y tres polos ( $p_1 = -0.43$ ,  $p_2 = -1.97$ ,  $p_3 = -3$ ). El polo más dominante es el que se encuentra en  $p_1 = -0.43$ :  $\sigma_{dom} = 0.43$



El efecto del polo  $p_3 = -3$  sobre la respuesta transitoria será despreciable, ya que está a más de seis veces de distancia del eje imaginario que el polo dominante:  $3 > 6 \cdot \sigma_{dom} = 2.58$

El polo en  $p_2 = -1.97$  y el cero  $z_1 = -2$  forman una pareja polo cero cuya distancia es menor que seis veces la distancia del polo dominante al eje imaginario, por lo que su efecto sobre la respuesta transitoria será también despreciable:  $d = 2 - 1.97 = 0.03 < \sigma_{dom}/6 = 0.071$

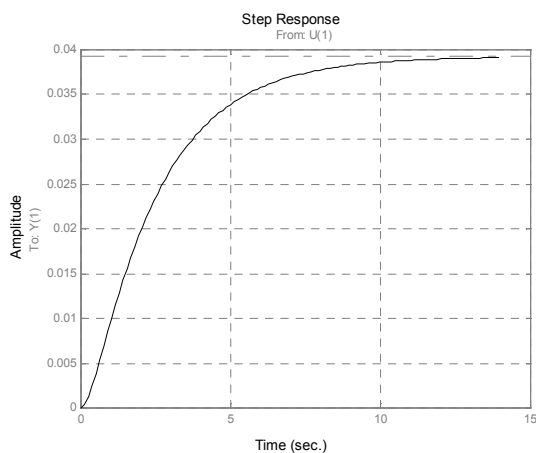
Por lo tanto el sistema reducido será:  $G_{eq}(s) = \frac{K_{eq}}{(s + 0.43)}$ , para calcular la  $K_{eq}$  debemos mantener la ganancia de la función de transferencia original. Aplicando el Teorema del Valor Final:

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s} G_{eq}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s} G(s)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_{eq}}{(s + 0.43)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{0.05 \cdot (s + 2)}{(s^2 + 2.4s + 0.85)(s + 3)} \Rightarrow K_{eq} = 0.017$$

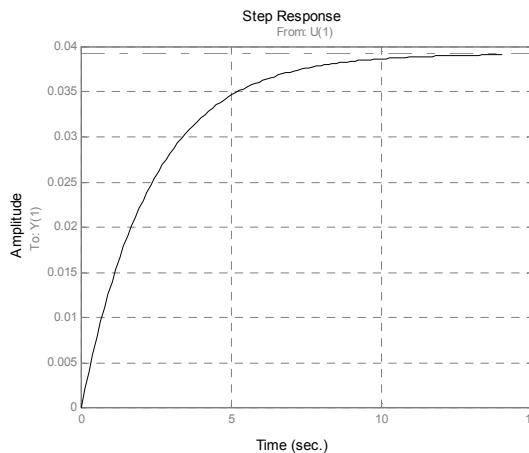
$$G_{eq}(s) = \frac{0.017}{(s + 0.43)}$$

En las siguientes gráficas se puede apreciar el parecido entre la respuesta de ambas funciones de transferencia ante un escalón unitario.



$$G(s) = \frac{0.05 \cdot (s + 2)}{(s^2 + 2.4s + 0.85)(s + 3)}$$

Respuesta del sistema original.



$$G_{eq}(s) = \frac{0.017}{(s + 0.43)}$$

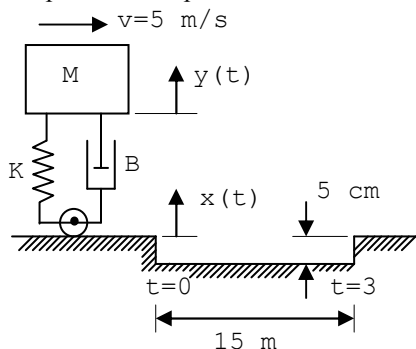
Respuesta del sistema equivalente.

**PROBLEMA:**

El modelo de un sistema de suspensión se puede representar simplificada de la siguiente forma:

$M=100 \text{ Kg}$   
 $K=50000 \text{ N/m}$   
 $B=1000 \text{ N}\cdot\text{s/m}$

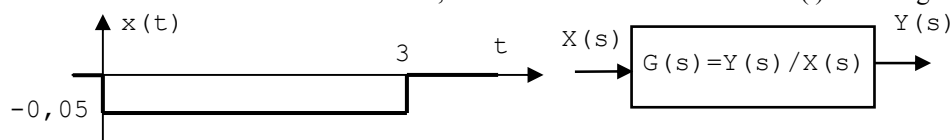
$y(t)$  = altura de la masa  
 $x(t)$  = altura del punto de  
contacto rueda-suelo



Siendo la única ecuación diferencial necesaria para su descripción, considerando el sistema lineal y los valores iniciales  $x_0=y_0=0$ , la siguiente:

$$M \cdot \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + B \cdot \left[ \frac{dy(t)}{dt} - \frac{dx(t)}{dt} \right] + K \cdot [y(t) - x(t)] = 0$$

De la misma manera, los escalones de la superficie sobre la que rueda podrían considerarse, despreciando el tiempo que tarda la rueda en tomar contacto con el suelo, como una señal ideal de entrada  $x(t)$  con la siguiente forma:



- Obtener la función de transferencia  $G(s)=Y(s)/X(s)$ .
- Simplificar, si es posible, la función  $G(s)$  para analizar su respuesta en el tiempo.
- Representar gráficamente la respuesta  $y(t)$  (evolución en el tiempo de la altura de la masa) ante la entrada  $x(t)$  propuesta. Se recomienda realizar una representación gráfica aproximada basada en las características de  $G(s)$  y evitando el cálculo de las transformadas y antitransformadas de Laplace.
- ¿Qué modificaciones (aumentar o disminuir) se podrían hacer en los parámetros  $K$  (cte. elástica del resorte) y/o  $B$  (coeficiente de rozamiento viscoso del amortiguador) para que la altura de la masa cambie sin oscilaciones, ante situaciones como la representada en este ejercicio.

**SOLUCIÓN:**

a) La ecuación diferencial que describe al sistema es lineal, y además los valores iniciales de las variables son cero, por lo que en transformadas de Laplace se obtiene directamente:

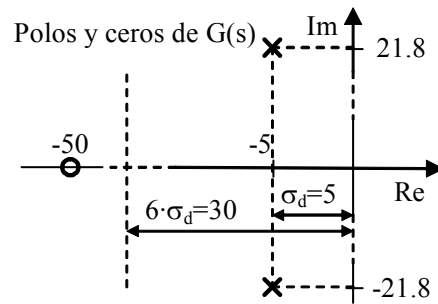
$$M \cdot s^2 \cdot Y(s) + B \cdot s \cdot Y(s) - B \cdot s \cdot X(s) + K \cdot Y(s) - K \cdot X(s) = 0$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{B \cdot s + K}{M \cdot s^2 + B \cdot s + K}$$

Sustituyendo valores:  $G(s) = \frac{10 \cdot (s + 50)}{s^2 + 10 \cdot s + 500}$

b) Se analiza la función de transferencia para ver si es posible su reducción de cara al análisis de su respuesta en el tiempo:

ceros:  $s_z = -50$       polos:  $s^2 + 10 \cdot s + 500 = 0 \Rightarrow s_{p1,2} = -5 \pm 21.8j$        $\sigma = 5; \omega_d = 21.8$



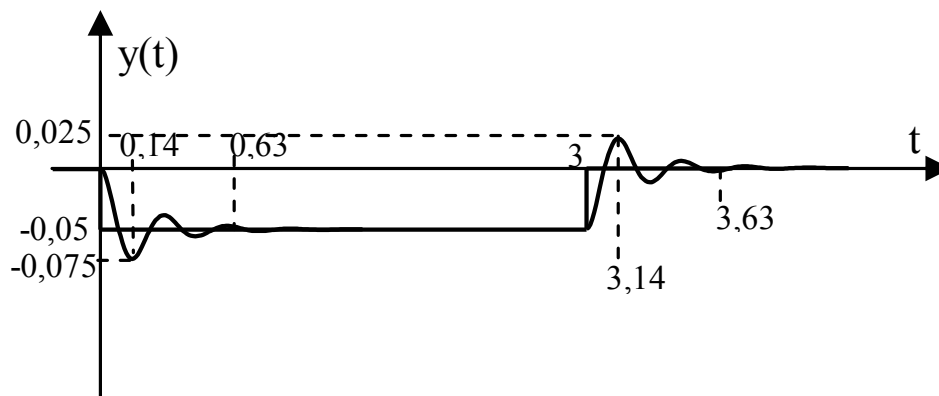
Se podría despreciar el efecto del cero de la función de transferencia sobre la respuesta transitoria del sistema, que es subamortiguada:

$$G_{eq}(s) = \frac{K_s}{s^2 + 10s + 500}; \quad \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} G_{eq}(s) \Rightarrow K_s = 500$$

$$G_{eq}(s) = \frac{500}{s^2 + 10s + 500} = \frac{K_{eq} \cdot \omega_n^2}{s^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2} \Rightarrow \begin{cases} K_{eq} = 1 \\ \omega_n = 22.4 \\ \xi = 0.22 \end{cases}$$

c) Conocidas las características de la función de transferencia de segundo orden que describe al sistema, es fácil intuir como será su respuesta ante la entrada propuesta:

$$M_p = 0.49 = 49\% \quad t_s = \pi/\sigma = 0.63 \text{ segundos} \quad t_p = \pi/\omega_d = 0.14 \text{ segundos}$$



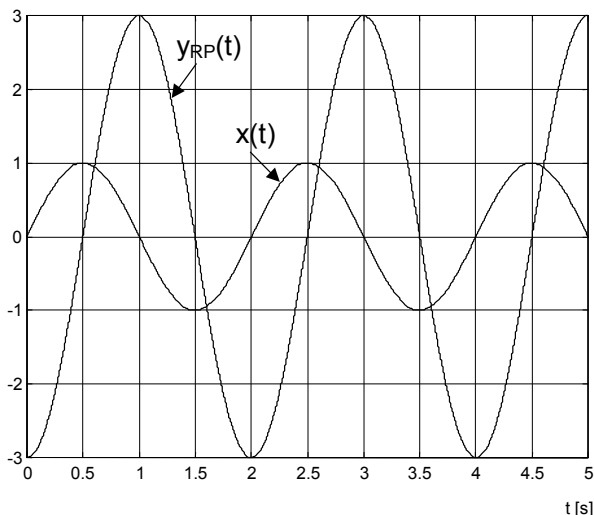
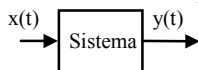
d) El parámetro que indica si la respuesta del sistema va a oscilar o no es el coeficiente de amortiguamiento “ξ”. Para que no existan oscilaciones en la respuesta ante entradas de tipo escalón, “ξ” deberá ser mayor que 1:

$$M \cdot s^2 + B \cdot s + K = 0 \equiv s^2 + \frac{B}{M} \cdot s + \frac{K}{M} = 0 \equiv s^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \omega_n = \sqrt{\frac{K}{M}} \\ \xi = \frac{B}{2 \cdot \sqrt{K \cdot M}} \end{cases}$$

Por lo tanto, para que “ξ” aumente y la masa no oscile, debería aumentar “B” o, en mayor medida, disminuir el valor de “K”.

**PROBLEMA:**

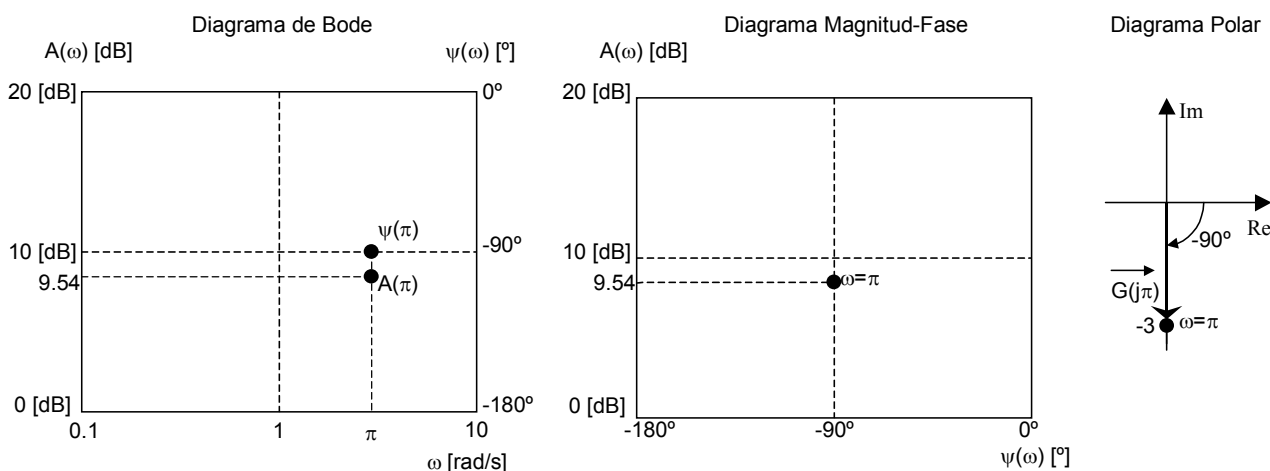
Sobre las señales representadas en la figura determinar:



- La expresión de la función de la entrada  $x(t)$ .
- La relación de amplitudes entre la entrada y la salida en valor absoluto y en deciBelios.
- La diferencia de fase entre la entrada y la salida en grados y en radianes.
- La expresión de la respuesta en régimen permanente del sistema  $y_{RP}(t)$ .
- Representar el o los puntos correspondientes a los valores obtenidos sobre un diagrama de Bode, un diagrama Magnitud-Fase y un diagrama polar.

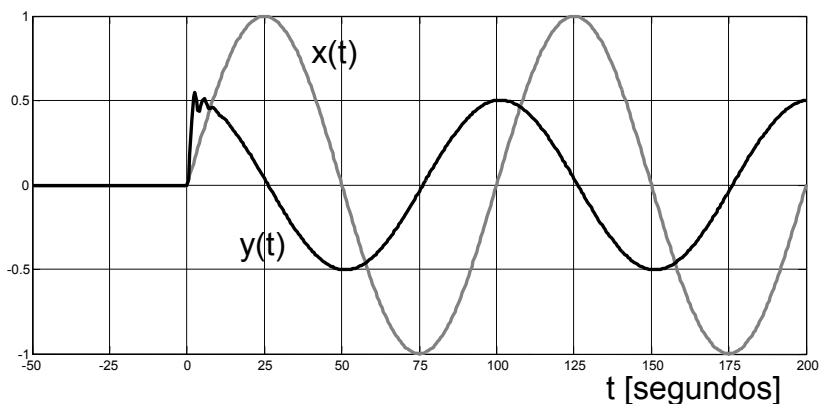
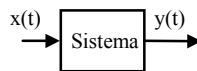
**SOLUCIÓN:**

- La función  $x(t)$  es:  $x(t) = \text{sen}(\pi \cdot t) \cdot u_0(t)$
- La relación de amplitudes para  $\omega = \pi$  se deduce de la figura, donde la amplitud de la señal de salida es 3 frente a la de la señal de entrada que es 1:  $A(\pi) = 3/1 \Rightarrow A(3) = 20 \cdot \log 3 \text{ [dB]} = 9.54 \text{ [dB]}$
- La diferencia de fase se obtiene midiendo el tiempo de retraso de la senoide de la salida frente a la de la entrada. En este caso ese tiempo es de 0.5 s que, teniendo en cuenta que el periodo de las señales es de 2 s ( $360^\circ$ ), equivale a un ángulo de  $90^\circ$  de retraso:  $\Psi(\pi) = -90^\circ = -\pi/2 \text{ rad}$  ( $\angle G(j\omega) = t_0 \cdot \omega = -0.5 \cdot \pi = -\pi/2 \text{ rad}$ )
- Dados los resultados anteriores la respuesta en régimen permanente del sistema es:  $y_{RP}(t) = 3 \cdot \text{sen}(\pi \cdot t - \pi/2)$
- Con los datos obtenidos anteriormente se pueden realizar las tres representaciones gráficas:



**PROBLEMA:**

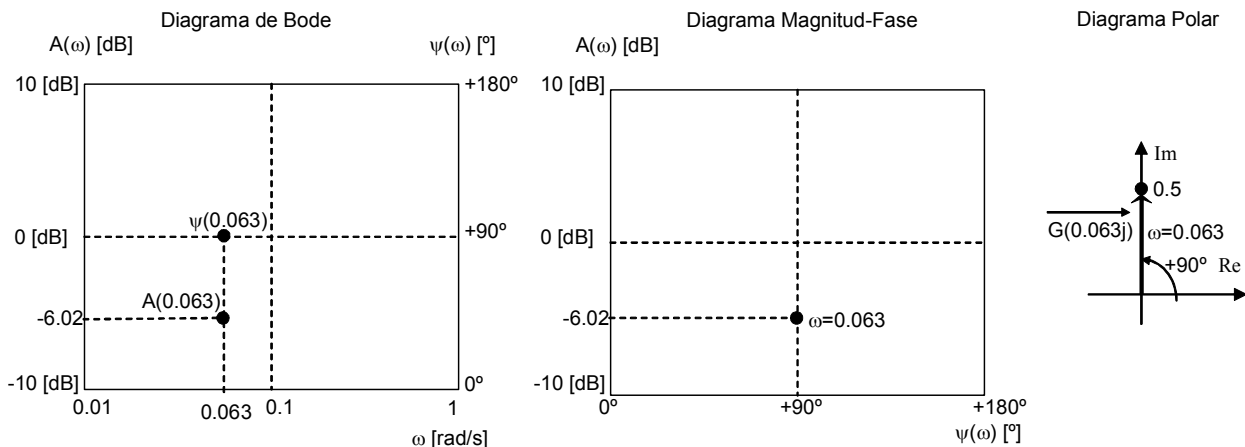
Sobre las señales representadas en la figura determinar:



1. La expresión de la función de la entrada  $x(t)$ .
2. La relación de amplitudes entre la entrada y la salida en valor absoluto y en decibelios una vez alcanzado el régimen permanente.
3. La diferencia de fase entre la entrada y la salida en grados y en radianes una vez alcanzado el régimen permanente.
4. La expresión de la respuesta en régimen permanente del sistema  $y_{RP}(t)$ .
5. Representar los puntos correspondientes a los valores obtenidos sobre un diagrama de Bode, un diagrama Magnitud-Fase y un diagrama polar.

**SOLUCIÓN:**

- a) La función  $x(t)$  es:  $x(t) = \text{sen}(t \cdot 2 \cdot \pi / 100) \cdot u_0(t) = \text{sen}(0.063t) \cdot u_0(t)$
- b) La relación de amplitudes para  $\omega = 2 \cdot \pi / 100 = 0.063$  rad/s se deduce de la figura, donde la amplitud de la señal de salida es 0.5 frente a la de la señal de entrada que es 1:  $|G(0.063j)| = 0.5/1 \Rightarrow A(0.063) = 20 \log 0.5 [dB] = -6.02 [dB]$
- c) La diferencia de fase se obtiene midiendo el tiempo de retraso de la senoide de la salida frente a la de la entrada. En este caso la senoide de salida va en realidad adelantada 25 segundos respecto a la entrada que, teniendo en cuenta que el periodo de las señales es de 100 segundos ( $360^\circ$ ), equivale a un ángulo de  $90^\circ$  de adelanto  
 $\Psi(0.063) = +90^\circ \Rightarrow |G(0.063j)| = +\pi / 2 \text{ rad}$  ( $|G(j\omega)| = t_0 \cdot \omega = 25 \cdot 0.063 = 1.575 \text{ rad}$ )
- d) Dados los resultados anteriores la respuesta en régimen permanente del sistema es:  
 $y_{RP}(t) = 0.5 \cdot \text{sen}(0.063t + \pi / 2)$
- e) Con los datos obtenidos anteriormente se pueden realizar las tres representaciones gráficas:



**PROBLEMA:**

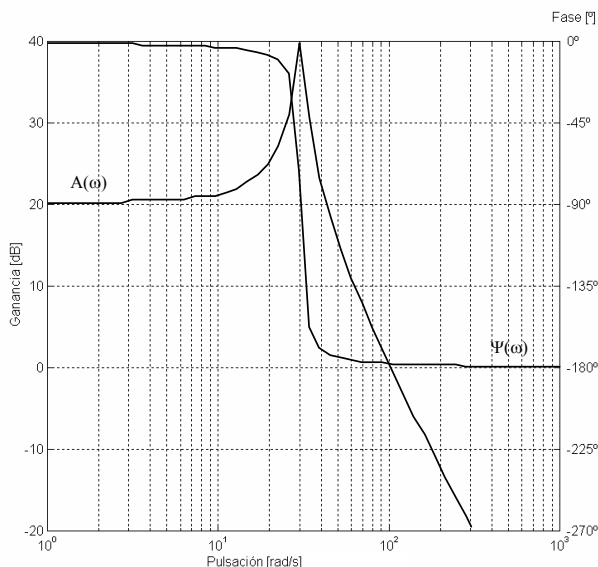
A partir del diagrama de Bode de la figura, obtener:

- El diagrama Magnitud-Fase del sistema.
- Una representación aproximada del diagrama Polar de ese sistema.
- Sabiendo que la función de transferencia del sistema es del tipo:

$$G(s) = \frac{K \cdot \omega_n^2}{s^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2}$$

determinar los valores de “K”, “ξ” y “ω<sub>n</sub>”.

- ¿Cuál será la respuesta en régimen permanente a una señal senoidal de amplitud 2 y pulsación igual a la de la resonancia del sistema? Formular matemáticamente ambas funciones y representarlas gráficamente de forma aproximada.



**SOLUCIÓN:**

- Se puede trazar el diagrama Magnitud-Fase de forma aproximada a partir del diagrama de Bode. Para ello basta con tomar los valores de las curvas A(ω) y ψ(ω) para unos cuantos valores de ω.

ω=1 rad/s => A(1)≈20 dB; ψ(1)≈0°

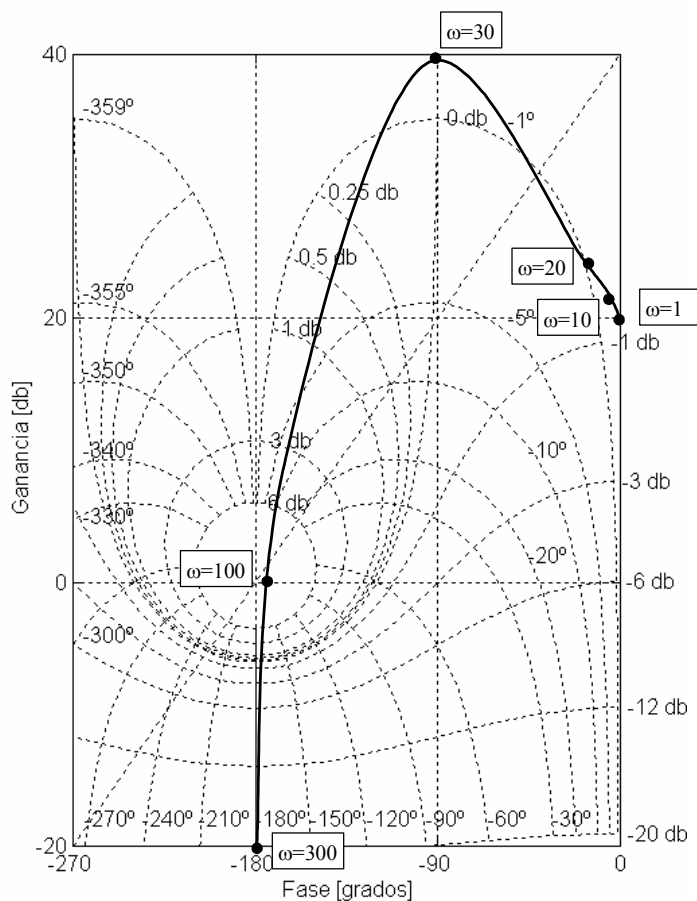
ω=10 rad/s => A(10)≈21 dB; ψ(10)≈-5°

ω=20 rad/s => A(20)≈25 dB; ψ(20)≈-10°

ω=30 rad/s => A(30)≈40 dB; ψ(30)≈-90°

ω=100 rad/s => A(100)≈0 dB; ψ(100)≈-175°

ω=300 rad/s => A(300)≈-20 dB; ψ(300)≈-180°

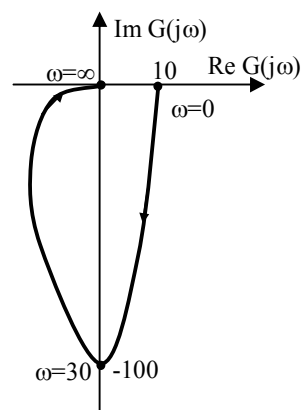


b) Para trazar el diagrama Polar de forma aproximada se pueden observar también los valores y las tendencias de las curvas  $A(\omega)$  y  $\psi(\omega)$ :

$$\omega \rightarrow 0 \text{ rad/s} \Rightarrow A(0) \rightarrow 20 \text{ dB} \Rightarrow |G(j \cdot 0)| \rightarrow 10; \psi(0) \rightarrow 0^\circ$$

$$\omega = 30 \text{ rad/s} \Rightarrow A(30) \approx 40 \text{ dB} \Rightarrow |G(j \cdot 30)| \approx 100; \psi(30) \approx -90^\circ$$

$$\omega \rightarrow \infty \text{ rad/s} \Rightarrow A(\infty) \rightarrow -\infty \text{ dB} \Rightarrow |G(j \cdot \infty)| \rightarrow 0; \psi(\infty) \rightarrow -180^\circ$$



c) El sistema es de segundo orden sin ceros. Esto permite determinar sus distintos parámetros a partir del diagrama de Bode.

Para determinar el valor de  $K$ , se tiene en cuenta que cuando:

$$\omega \rightarrow 0 \text{ rad/s} \Rightarrow A(0) \rightarrow 20 \text{ dB} \Rightarrow |G(j \cdot 0)| \rightarrow 10 \approx K$$

Los valores de  $\xi$  y  $\omega_n$  se puede deducir de las expresiones que dan el pico de resonancia del diagrama de Bode:

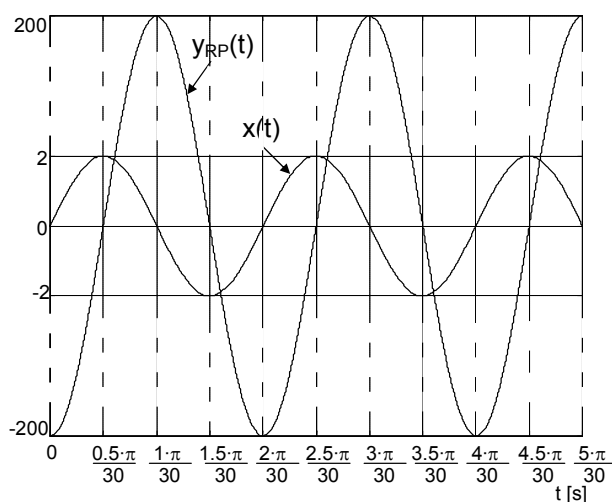
$$\text{si } 0 < \xi < 0.707 \begin{cases} M_r = \frac{1}{2 \cdot \xi \cdot \sqrt{1 - \xi^2}} \\ \omega_r = \omega_n \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot \xi^2} \end{cases} \quad M_r \approx 20 \text{ dB} = 10; \omega_r \approx 30 \text{ rad/s} \Rightarrow \xi = 0.05; \omega_n \approx 30 \text{ rad/s}$$

$$\text{Luego: } G(s) = \frac{9000}{s^2 + 3 \cdot s + 900}$$

d) La pulsación de resonancia es  $\omega_r \approx 30 \text{ rad/s}$  luego la entrada será:  $x(t) = 2 \cdot \text{sen}(30 \cdot t) \cdot u_0(t)$ .

Como si  $\omega = 30 \text{ rad/s} \Rightarrow A(30) \approx 40 \text{ dB} \Rightarrow |G(j \cdot 30)| \approx 100; \psi(30) \approx -90^\circ = -\pi/2 \text{ rad}$ .

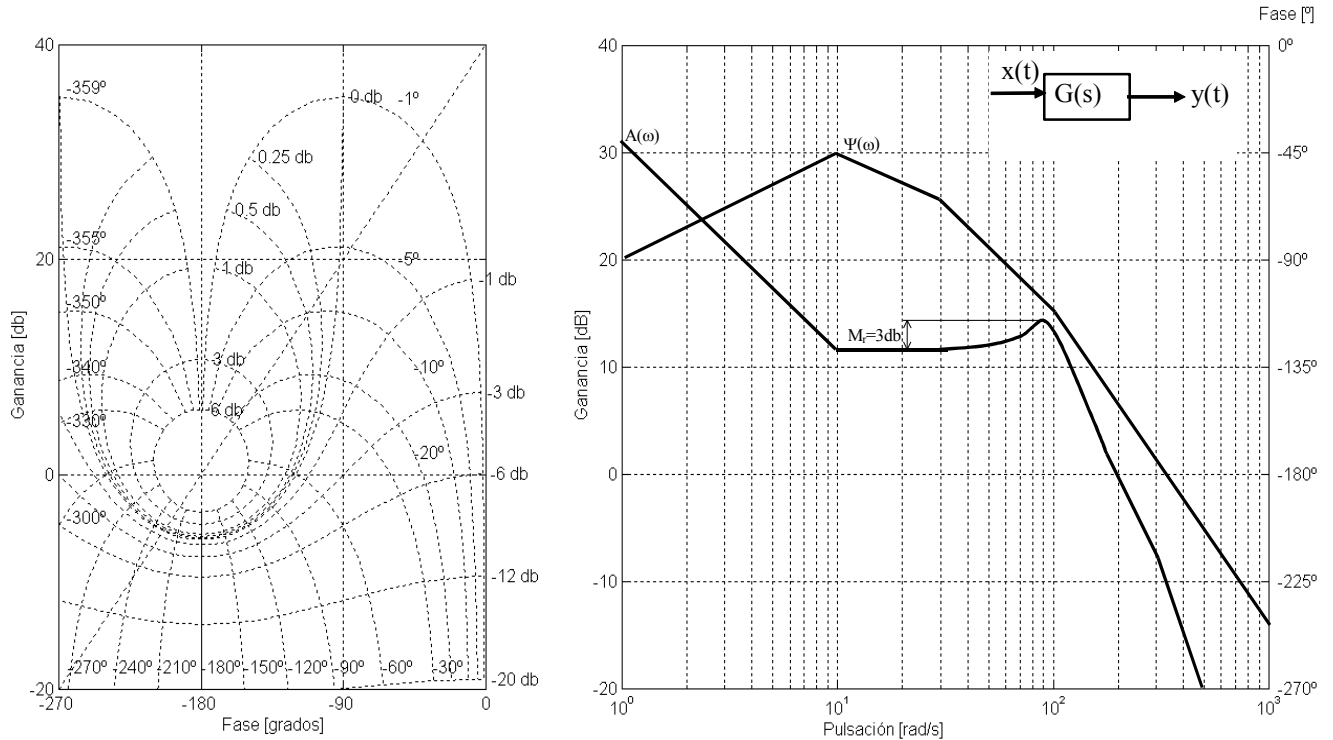
La salida en régimen permanente será:  $y_{rp}(t) = 200 \cdot \text{sen}(30 \cdot t - \pi/2)$



**PROBLEMA:**

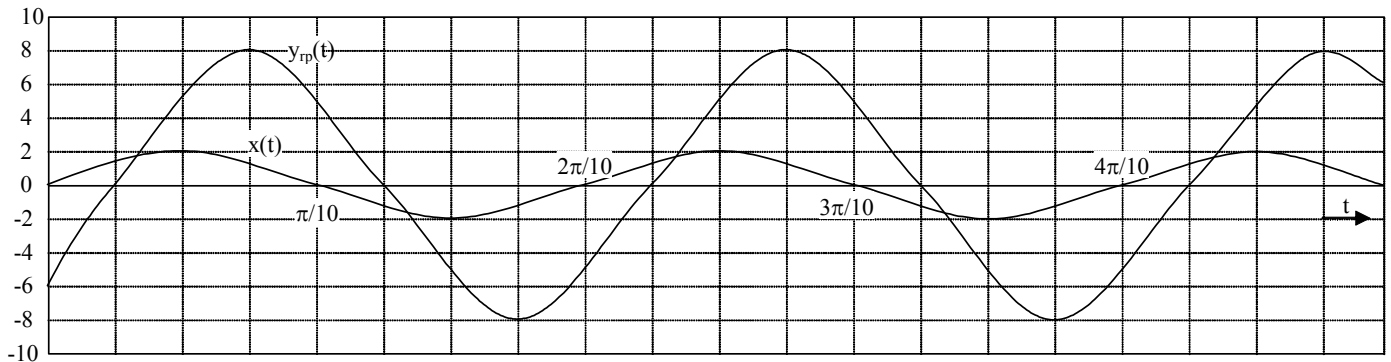
El diagrama de Bode representa la respuesta en frecuencia de un sistema  $G(s)$ :

- a) Determine y dibuje la respuesta en régimen permanente del sistema en bucle abierto  $y(t)$  si  $x(t)=2\cdot\text{sen}(10\cdot t)$ .
- b) A la vista del pico de resonancia que presenta el sistema, determine la frecuencia natural y el coeficiente de amortiguamiento de los polos complejos conjugados responsables de ese pico de resonancia.



**SOLUCIÓN:**

a)  $\omega = 10 \left\{ \begin{array}{l} A(10) \approx 12\text{dB} \Rightarrow |G(j\cdot 10)| = 4 \\ \Psi(10) = -45^\circ \Rightarrow \angle G(j\cdot 10) = -\pi/4 \text{ rad} \end{array} \right. \quad \boxed{y_{rp}(t) = 4\cdot 2\cdot \text{sen}(10\cdot t - \pi/4)}$



b) El sistema presenta un pico de resonancia a frecuencia  $\omega_r = 90 \text{ rad/s}$  de valor  $M_r = 3 \text{ dB}$ . Se puede determinar el coeficiente de amortiguamiento y la frecuencia natural de los polos correspondientes a ese pico con las expresiones:

$$M_r = \frac{1}{2\cdot\xi\sqrt{1-\xi^2}} \quad \omega_r = \omega_n \cdot \sqrt{1-2\cdot\xi^2}$$

En la primera expresión  $M_r$  está en valor absoluto (no en dB):  $M_r=10^{3/20}=1,41$  con lo que se obtienen 4 soluciones:  $\xi_1 = 0,92$ ;  $\xi_2 = -0,92$ ;  $\xi_3 = 0,38$ ;  $\xi_4 = -0,38$ . La única solución válida en este caso es:  $\xi = 0,38$ .

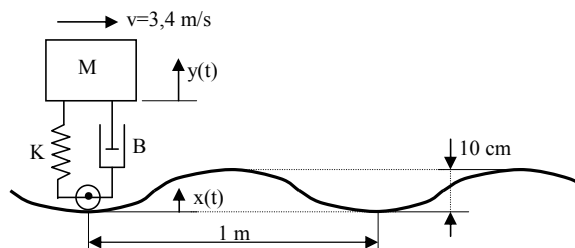
De la segunda expresión se deduce:  $\omega_n = 106,72 \text{ rad/s}$ .

**PROBLEMA:**

El modelo de un sistema de suspensión se puede representar simplificada de la siguiente forma:

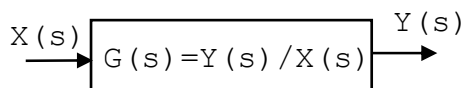
M=100 Kg  
K=50000 N/m  
B=1000 N·s/m

y(t) = altura de la masa  
x(t) = altura del punto de contacto rueda-suelo



Siendo la única ecuación diferencial necesaria para su descripción, considerando el sistema lineal y los valores iniciales  $x_0=y_0=0$ , la siguiente:

$$M \cdot \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + B \left[ \frac{dy(t)}{dt} - \frac{dx(t)}{dt} \right] + K \cdot [y(t) - x(t)] = 0$$



De la misma manera, x(t) puede considerarse como una señal senoidal aplicada a la entrada del sistema con los valores de amplitud y frecuencia que representa la figura anterior.

- Obtener la función de transferencia  $G(s)=Y(s)/X(s)$ .
- Obtener la respuesta  $y_{RP}(t)$  (evolución en el tiempo de la altura de la masa en régimen permanente) ante la entrada x(t) propuesta y representar gráficamente ambas señales.
- ¿Qué modificaciones (aumentar o disminuir) se podrían hacer sobre los parámetros K (cte. elástica del resorte) y/o B (coeficiente de rozamiento viscoso del amortiguador) para que se reduzca lo más posible la amplitud de las oscilaciones de la altura de la masa ( $y_{RP}(t)$ ) al circular sobre la superficie indicada.

a) La ecuación diferencial que describe al sistema es lineal, y además los valores iniciales de las variables son cero, por lo que en transformadas de Laplace se obtiene directamente:

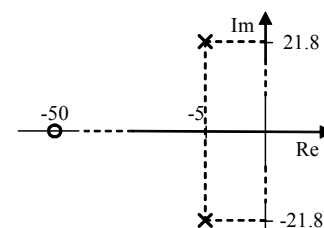
$$M \cdot s^2 \cdot Y(s) + B \cdot s \cdot Y(s) - B \cdot s \cdot X(s) + K \cdot Y(s) - K \cdot X(s) = 0$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{B \cdot s + K}{M \cdot s^2 + B \cdot s + K}$$

Sustituyendo valores:  $G(s) = \frac{10 \cdot (s + 50)}{s^2 + 10 \cdot s + 500}$

b) Antes de analizar la respuesta en frecuencia del sistema, se puede representar cuál es la distribución de polos y ceros y sus parámetros más significativos:

ceros:  $s+50=0 \Rightarrow s_z = -50$   
 polos:  $s^2+10s+500=0 \Rightarrow s_{p1,2} = -5 \pm 21.8j$



Los parámetros relativos al par de polos complejos de la función de transferencia serán:

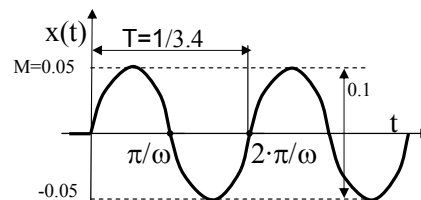
$$M \cdot s^2 + B \cdot s + K = 0 \Rightarrow s^2 + \frac{B}{M} \cdot s + \frac{K}{M} = 0 \Rightarrow s^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \omega_n = \sqrt{\frac{K}{M}} = 22.4 \\ \xi = \frac{B}{2 \cdot \sqrt{K \cdot M}} = 0.22 \end{cases}$$

Como  $0 < \xi < 0.707$ , la respuesta en frecuencia de ese par de polos presentará resonancia:

$$\omega_r = \omega_n \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot \xi^2} = 21.29 \text{ [rad / s]} \quad M_r = \frac{1}{2 \cdot \xi \cdot \sqrt{1 - \xi^2}} = 2.33 \equiv 20 \cdot \log(2.33) = 7.35 \text{ [dB]}$$

La señal de entrada x(t) a la que se va a ver sometido el sistema se puede considerar como una señal senoidal de amplitud pico a pico 0.1 m y de frecuencia, f, 3.4 ciclos por segundo [Hz], o sea que la pulsación será:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 2 \cdot \pi \cdot 3.4 = 21.36 \text{ [rad/s]} \text{ y por lo tanto: } \mathbf{x(t) = 0.05 \cdot \text{sen}(21.36 \cdot t)}$$



A partir de aquí se puede optar por varias vías para obtener:  $y_{RP}(t) = |G(j\omega)| \cdot M \cdot \text{sen}(\omega t + \angle G(j\omega))$

Las dos soluciones más inmediatas en este caso son:

- 1) Calcular el valor complejo  $G(j\omega)$  con  $\omega=21.36$
- 2) Obtener los valores de módulo y argumento de  $G(j\omega)$  a partir del diagrama de Bode de  $G(s)$ .

$$G(s) = \frac{10 \cdot (s + 50)}{s^2 + 10 \cdot s + 500} \Rightarrow G(j\omega) = \frac{10 \cdot (j\omega + 50)}{(j\omega)^2 + 10 \cdot j\omega + 500} = \frac{\frac{j\omega}{50} + 1}{\frac{(j\omega)^2}{500} + \frac{j\omega}{50} + 1}$$

1) Operando:

$$G(21.36j) = \frac{10 \cdot (50 + 21.36j)}{500 - (21.36)^2 + 213.6j} = \frac{500 + 213.6j}{43.75 + 213.6j} \Rightarrow \begin{cases} |G(21.36j)| = 2.5 \\ \angle G(21.36j) = -0.965 \text{ rad} \end{cases}$$

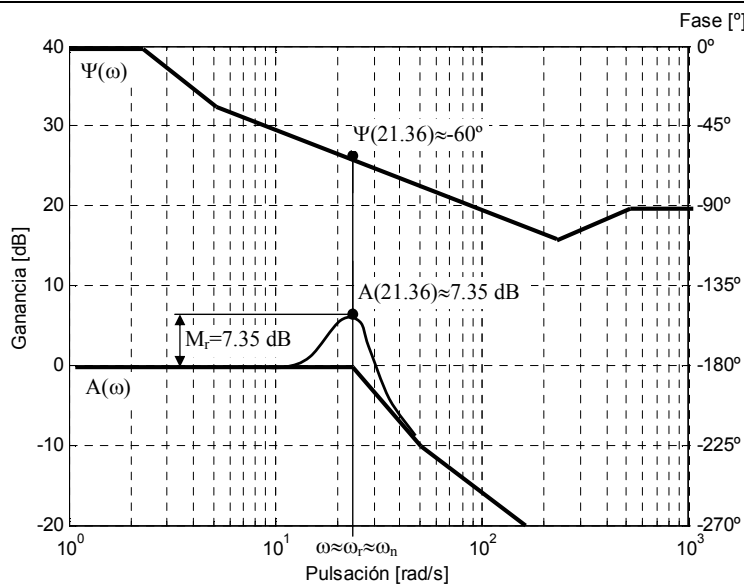
$$y_{RP}(t) = 2.5 \cdot 0.05 \cdot \text{sen}(21.36t - 0.965) = 0.125 \cdot \text{sen}(21.36t - 0.965)$$

2) En el diagrama de Bode de  $G(s)$  se puede observar que el valor de  $\omega=21.36$  se encuentra muy próximo a la frecuencia de resonancia de los dos polos de  $G(s)$ . Aproximadamente:

$$A(21.36) = 7.35 \text{ [dB]} \Rightarrow |G(21.36j)| = 10^{\frac{7.35}{20}} = 2.33$$

$$\Psi(21.36) = -60^\circ \Rightarrow \angle G(21.36j) = -1.05 \text{ rad}$$

$$y_{RP}(t) = 2.33 \cdot 0.05 \cdot \text{sen}(21.36t - 1.05) = 0.1165 \cdot \text{sen}(21.36t - 1.05)$$



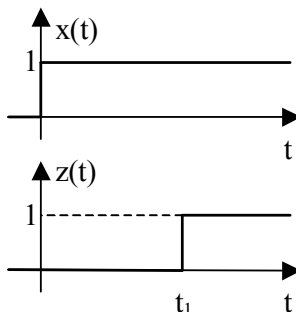
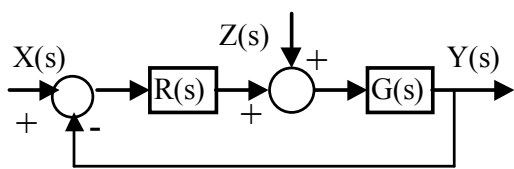
c) La amplitud de la función senoidal  $y_{RP}(t)$  depende directamente de  $|G(j\omega)|$ . Este factor se reducirá moderadamente si se reduce la amplitud de resonancia  $M_r$  que depende del coeficiente de amortiguamiento  $\xi$ . El aumento de  $B$  y la reducción de  $K$  aumentarían el valor de  $\xi$  reduciendo la amplitud del pico de resonancia.

Sin embargo la forma más efectiva de que el valor  $|G(21.36j)|$  disminuya es reducir el ancho de banda del sistema haciendo que la frecuencia de corte  $\omega_n$  sea más baja. Esto se puede conseguir reduciendo el valor de  $K$ .

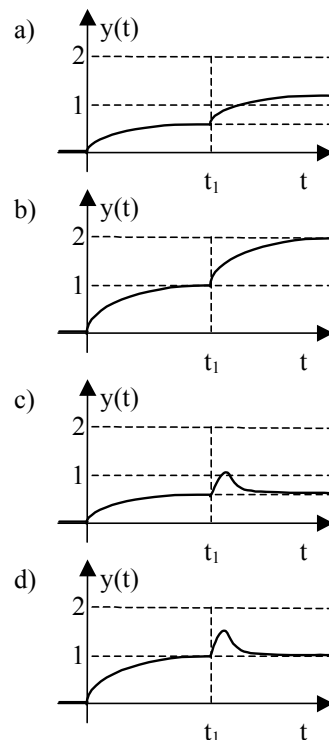
$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{M}} \quad \xi = \frac{B}{2 \cdot \sqrt{K \cdot M}} \quad M_r = \frac{1}{2 \cdot \xi \cdot \sqrt{1 - \xi^2}}$$

**PROBLEMA:**

Dado el siguiente sistema y las señales de entrada  $x(t)$  y  $z(t)$  representadas, indique razonadamente a que tipo de respuesta  $y(t)$  ("a)", "b)", "c)" y/o "d)") puede corresponder a cada una de las combinaciones de los tipos de  $G(s)$  y  $R(s)$  indicadas:



1.  $G(s)$  es de tipo 1 y  $R(s)$  es de tipo 0.
2.  $G(s)$  es de tipo 1 y  $R(s)$  es de tipo 1.
3.  $G(s)$  es de tipo 0 y  $R(s)$  es de tipo 0.
4.  $G(s)$  es de tipo 0 y  $R(s)$  es de tipo 1.

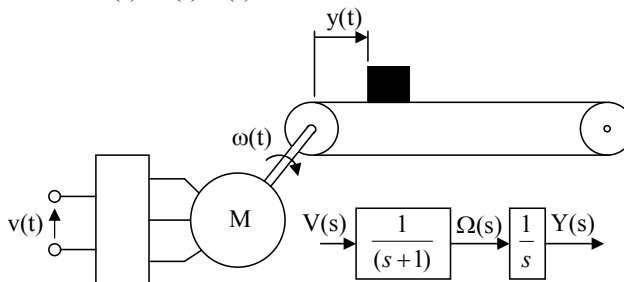


**SOLUCIÓN**

- a) La respuesta de la gráfica "a)" es posible en el caso "3", cuando  $G(s)$  y  $R(s)$  son de tipo 0 y por lo tanto existirá error de posición en régimen permanente ante ambas entradas.
- b) La respuesta de la gráfica "b)" es posible para el caso "1", ya que al ser  $G(s)$  de tipo 1 se anulará el error de posición en régimen permanente, pero no se anulará el efecto de la perturbación  $z(t)$  sobre el régimen permanente al ser  $R(s)$  de tipo 0.
- c) La situación de la gráfica "c)" no es posible en ninguno de los casos de tipo de  $G(s)$  y  $R(s)$  presentados.
- d) La respuesta de la gráfica "d)" es posible siempre que  $R(s)$  sea de tipo 1, es decir en los casos "2" y "4", ya que de esa manera desaparece el error de posición en régimen permanente, y el sistema no acusa el efecto de la perturbación  $z(t)$  una vez que se alcanza de nuevo el régimen permanente.

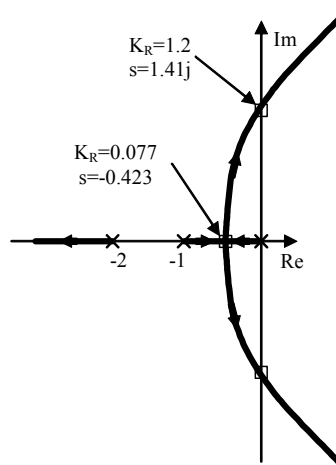
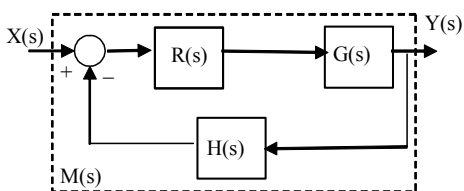
**PROBLEMA:**

En el sistema de la figura, la relación entre las variables  $v(t)$ , tensión de control, e  $y(t)$ , desplazamiento del dispositivo, está definida por la función de transferencia  $G(s)=Y(s)/V(s)$ .



El sistema se realimenta tal como se indica en la siguiente figura con un sensor que mide la posición del dispositivo móvil y que tiene como función de transferencia  $H(s)$  y un regulador de ganancia modificable  $R(s)=K_R>0$ . De esta manera, la señal  $x(t)$  funciona como referencia de posición del dispositivo. Se representa además el Lugar de las Raíces correspondiente al sistema cuando  $K_R$  varía entre 0 e infinito.

$$R(s) = K_R \quad G(s) = \frac{1}{s(s+1)} \quad H(s) = \frac{5}{s+2}$$

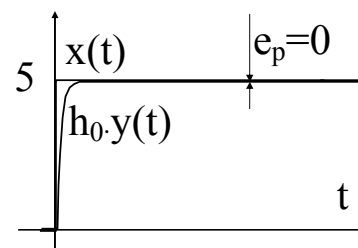


- ¿Para qué valores de  $K_R$  es estable el sistema realimentado?
- ¿Qué valores de  $K_R$  hacen que el dispositivo se posicione sin oscilaciones una vez establecido un valor de referencia en la entrada  $x(t)$ ?
- ¿Dónde se posiciona el dispositivo (valor de  $y(t)$  cuando  $t \rightarrow \infty$ ) si  $x(t)=5 \cdot u_0(t)$ ?

**SOLUCIÓN:**

a) El lugar de las raíces indica que el sistema será **estable si  $0 < K_R < 1.2$** , ya que para valores superiores los dos polos que están sobre las ramas que cruzan el eje imaginario harán que el sistema  $M(s)$  sea inestable.

b) Considerando dominantes los dos polos de  $M(s)$  que se encuentran sobre las dos ramas más próximas al eje imaginario, deducimos que el comportamiento de  $M(s)$  puede ser similar al de un sistema de 2º orden. Para que un sistema de 2º orden responda por ejemplo a una entrada escalón en  $x(t)$  sin oscilaciones, es necesario que sea sobreamortiguado, es decir, que sus dos polos sean reales. Esto sucede si  $0 < K_R < 0.077$ . Para valores superiores a 0.077 el sistema tendrá dos polos complejos conjugados y presentaría la sobreoscilación y oscilaciones típicas de un sistema subamortiguado ante una entrada escalón.



c) Teniendo en cuenta que el sistema presenta error de posición nulo ( $e_p=0$ ) debido a que  $R(s) \cdot G(s)$  es de Tipo 1, y que la ganancia de los elementos de realimentación es  $h_0 = \lim_{s \rightarrow 0} H(s) = 2.5$ , ante la entrada  $x(t)=5 \cdot u_0(t)$  la salida en régimen permanente deberá alcanzar el valor  $5/h_0$ . Es decir, como  $e_p=0 \Rightarrow x(\infty)=h_0 \cdot y(\infty)=5 \Rightarrow y(\infty)=2$ .

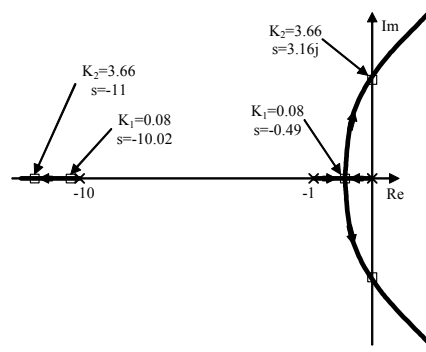
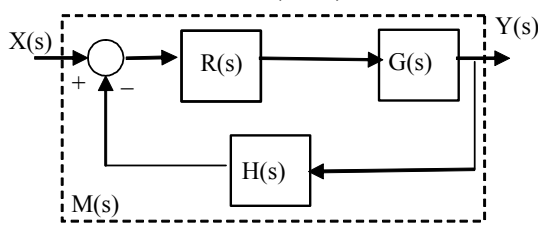
Se puede comprobar también a través del teorema del valor final:

$$y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot Y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot X(s) \cdot M(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{5}{s} \cdot \frac{R(s) \cdot G(s)}{1 + R(s) \cdot G(s) \cdot H(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{5 \cdot K_R \cdot (s+2)}{s \cdot (s+1)(s+2) + 5 \cdot K_R} = 2$$

**PROBLEMA:**

Dado el sistema de la figura:

$$R(s) = K \quad G(s) = \frac{3}{s(s+1)} \quad H(s) = \frac{10}{s+10}$$

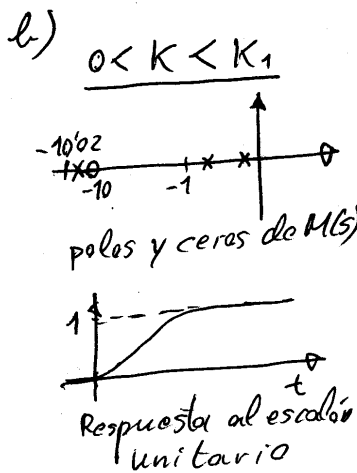


- ¿Cuántos polos y ceros presenta la función de transferencia de  $M(s)$ ?
- ¿Cómo es el transitorio de la respuesta  $y(t)$  del sistema, para los distintos valores de  $K$  entre 0 e infinito, ante una entrada escalón en  $x(t)$ ?
- ¿A qué valor tiende  $y(t)$  en régimen permanente cuando  $K=1$  y  $x(t)$  es un escalón de 3 unidades?
- ¿Cuál es el error que presenta el sistema ante la entrada del apartado anterior.

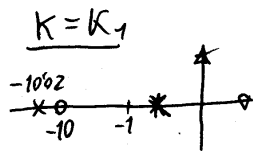
**SOLUCIÓN:**

$$a) \quad M(s) = \frac{R(s)G(s)}{1+R(s)G(s)H(s)} = \frac{K \frac{3}{s(s+1)}}{1+K \frac{3}{s(s+1)} \cdot \frac{10}{s+10}} = \frac{K \cdot 3 \cdot (s+10)}{s(s+1)(s+10)+30K}$$

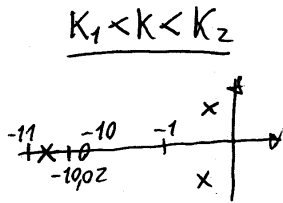
Numerador: Grado 1  $\Rightarrow$  1 cero  
 Denominador: Grado 3  $\Rightarrow$  3 polos



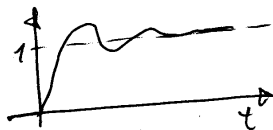
Sistema Subreamortiguado de segundo orden con una pareja polo-cero muy próximos entre si y alejados del origen de coordenadas por lo que su efecto sobre el transitorio es prácticamente nulo



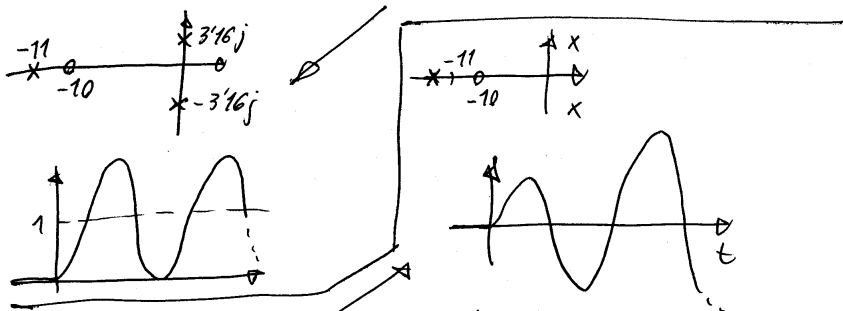
Sistema Criticamente amortiguado  
(Las mismas consideraciones sobre la pareja polo-cero adicional)



Sistema Subamortiguado (2º Orden con dos polos complejos conjugados) La pareja polo-cero adicional está más alejada entre sí pero lejos del origen. Su efecto es casi nulo sobre el transitorio. En todo caso el cero (más próximo que el polo) puede hacer la respuesta del sistema más rápida,  $t_{pt} \downarrow$  y subamortiguada  $M_{pt}$ .



$K = K_2$  Sistema marginalmente estable.



$K_2 < K$  Sistema inestable

c)  $x(s) = \frac{3}{s}$   $Y(s) = M(s)X(s) = \frac{3 \cdot K \cdot 3(s+10)}{s(s+1)(s+10)+30K}$   
 Si existe  $y(\infty)$  (sistema estable) entonces:  

$$Y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} Y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s Y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{3 \cdot K \cdot 3(s+10)}{s(s+1)(s+10)+30K} = \frac{90K}{30K} = 3$$

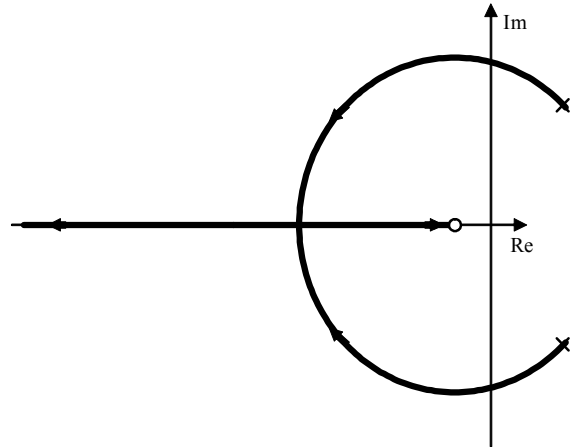
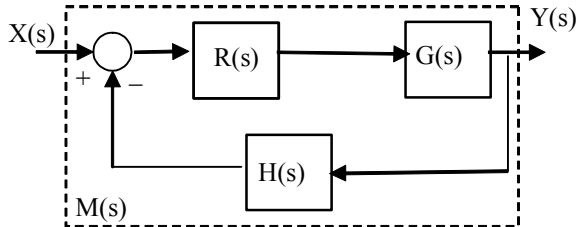
d)  $G(s) \cdot R(s)$  es de Tipo 1, luego el error de posición (error ante una entrada escalón) es  $e_p = 0$ .

Esto mismo se deduce del apartado anterior, ya que siendo la ganancia de la realimentación  $h_0 = \lim_{s \rightarrow 0} H(s) = 1$ , la salida  $y(t)$  tiende en régimen permanente a  $y(\infty) = 3$  ante un escalón de 3 unidades.

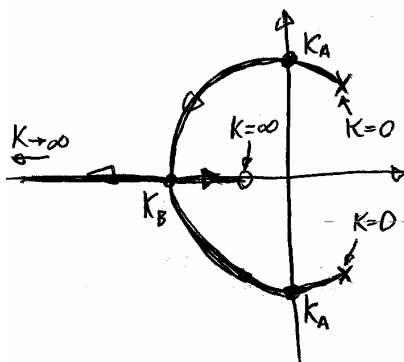
**PROBLEMA:**

En el sistema de la figura  $R(s)=K>0$ . Sabiendo que el sistema en bucle cerrado  $M(s)$  presenta sólo dos polos cuya disposición en función de  $K>0$  representan las ramas del lugar de las raíces representado, indicar que pasa con el sistema en bucle cerrado cuando  $K$  aumenta bajo el punto de vista de:

- La estabilidad
- El régimen permanente
- El régimen transitorio



**SOLUCIÓN:**



Estabilidad

El sistema será inestable para valores bajos de  $K$ , en concreto:  
inestable si  $0 < K < K_A$   
y será estable para el resto de valores  $K_A < K \leq \infty$

Régimen Permanente:

La precisión en régimen permanente depende generalmente de  $K$ . Los errores de régimen permanente que presente el sistema ante entradas escalón, rampa o parábola según el caso y el tipo del sistema, serán tanto menores cuanto mayor sea el valor de  $K$ .

### Régimen Transitorio:

Una vez que el sistema es estable,  $K_A < K \leq \infty$  el sistema presenta diferentes comportamientos transitorios en función de  $K$ .

- $K = K_A$  sistema marginalmente estable
- $K_A < K < K_B$  sistema subamortiguado
- $K = K_B$  sistema críticamente amortiguado
- $K_B < K \leq \infty$  sistema sobreamortiguado

En todos los casos, el sistema en bucle cerrado presenta dos polos.

Cuando  $K \uparrow$  aumenta en el tramo  $K_A < K < K_B$  la sobreoscilación disminuye,  $M_p \downarrow$  y el tiempo de establecimiento disminuye,  $t_{sk} \downarrow$ . Mientras, el tiempo de pico  $t_p$ , primero disminuye ligeramente y luego aumenta.

Cuando  $K \uparrow$  aumenta en el tramo  $K_B < K \leq \infty$ , el sistema tiene cada vez una constante de tiempo mayor, su respuesta transitoria es cada vez más lenta.