



Tema 7

Análisis Frecuencial de los Sistemas Realimentados

Gijón - Junio 2005

1



Indice

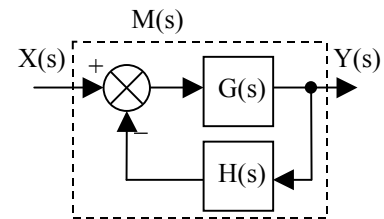
- 7.1. Análisis de la estabilidad de un sistemas realimentado
- 7.2. Margen de fase y de ganancia
 - 7.2.1. Diagrama de Bode
 - 7.2.2. Diagrama Magnitud-Fase
 - 7.2.3. Diagrama Polar
- 7.3. Criterio de Nyquist
- 7.4. Obtención de la respuesta en frecuencia: Ábaco de Nichols
- 7.5. Reguladores basados en frecuencia: Redes de compensación
 - 7.5.1. Redes de adelanto de fase
 - 7.5.2. Redes de retraso de fase
 - 7.5.3. Redes de adelanto-retraso de fase

Gijón - Junio 2005

2

Análisis de la Estabilidad de un Sistema Realimentado

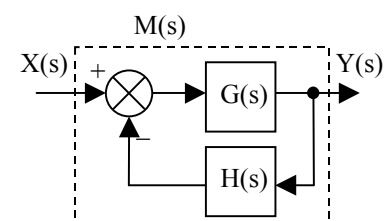
Se trata de analizar la estabilidad del sistema realimentado negativamente, $M(s)$, a partir de la respuesta en frecuencia del sistema en bucle abierto, $G(s) \cdot H(s)$.



- **Margen de fase y de ganancia:** Permite determinar el grado de estabilidad de un sistema realimentado $M(s)$, sobre los diagramas de Bode, Magnitud-Fase o Polar de $G(s) \cdot H(s)$. La FdT $G(s) \cdot H(s)$ tiene que ser de **Fase Mínima** (sistemas con todos sus polos y ceros con parte real negativa y, como máximo, un único polo en el origen).
- **Criterio de Nyquist:** Es un estudio de la estabilidad de un sistema realimentado $M(s)$, realizado a partir de la ecuación característica $1 + G(s) \cdot H(s) = 0$, estudiando las raíces y la respuesta en frecuencia de $G(s) \cdot H(s)$.

Margen de Fase y de Ganancia

Para sistemas de **fase mínima** en bucle abierto, si la respuesta en frecuencia de la función de transferencia $G(s) \cdot H(s)$ presenta frecuencias en las que la ganancia es positiva a la vez que la fase tiene un valor inferior a -180° (entre -180° y -360°) el sistema realimentado negativamente, $M(s)$, será inestable.



- **Margen de fase:** Es el ángulo (en grados) que habría que restarle a la fase de $G(s) \cdot H(s)$ para volver inestable a $M(s)$. Sobre las representaciones gráficas de la respuesta en frecuencia de $G(s) \cdot H(s)$, es el ángulo que le falta a la fase para llegar a -180° cuando la ganancia es 1 (0 dB). (Si la ganancia es siempre inferior a 0 dB el margen de fase será infinito)
- **Margen de ganancia:** Es el valor por el que habría que multiplicar (o los dB que habría que sumar a) la ganancia de $G(s) \cdot H(s)$, para que $M(s)$ se vuelva inestable. Es decir, para que cuando la fase sea -180° la ganancia fuese 1 (0 dB). (Si $\psi(\omega)$ no corta nunca -180° el margen de ganancia será infinito)

Cálculo Matemático del Margen de Fase y de Ganancia

Sistema 1: $G(s) \cdot H(s) = \frac{5}{s \cdot (s^2 + 2s + 4)}$; $G(j\omega) \cdot H(j\omega) = \frac{1.25}{j\omega \cdot (0.25 \cdot (j\omega)^2 + 0.5 \cdot j\omega + 1)}$

Sistema 2: $G(s) \cdot H(s) = \frac{15}{s \cdot (s^2 + 2s + 4)}$; $G(j\omega) \cdot H(j\omega) = \frac{3.75}{j\omega \cdot (0.25 \cdot (j\omega)^2 + 0.5 \cdot j\omega + 1)}$

• **Margen de fase:** Es el ángulo que le falta a $|G(j\omega) \cdot H(j\omega)|$ para llegar a -180° cuando $|G(j\omega) \cdot H(j\omega)|$ es 1 (0 dB).

Sistema 1: $|G(j\omega_f) \cdot H(j\omega_f)| = \left| \frac{1.25}{j\omega_f \cdot (0.25 \cdot (j\omega_f)^2 + 0.5 \cdot j\omega_f + 1)} \right| = 1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \omega_f = 1.4 \Rightarrow |G(j \cdot 1.4) \cdot H(j \cdot 1.4)| = \frac{1.25}{j \cdot 1.4 \cdot (0.25 \cdot (j \cdot 1.4)^2 + 0.5 \cdot j \cdot 1.4 + 1)} = -146.4^\circ \Rightarrow$
 $\Rightarrow \gamma = 180^\circ - 146.4^\circ = 33.6^\circ$ Estable

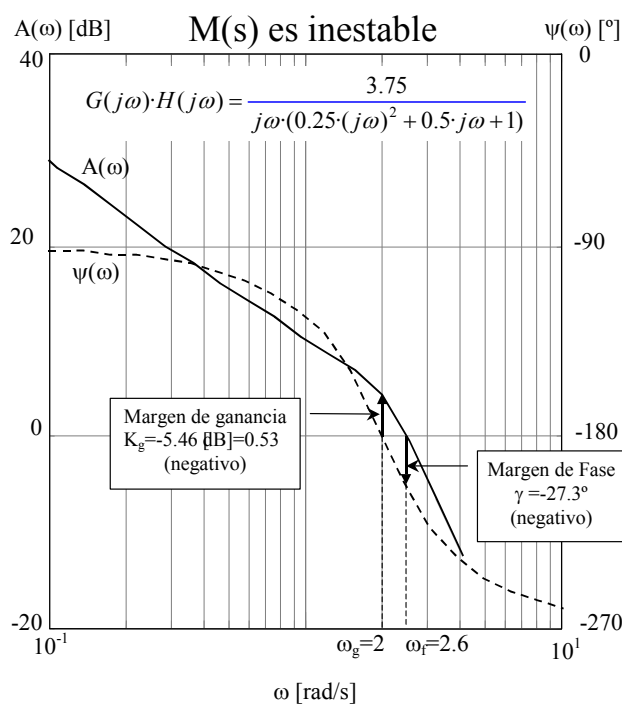
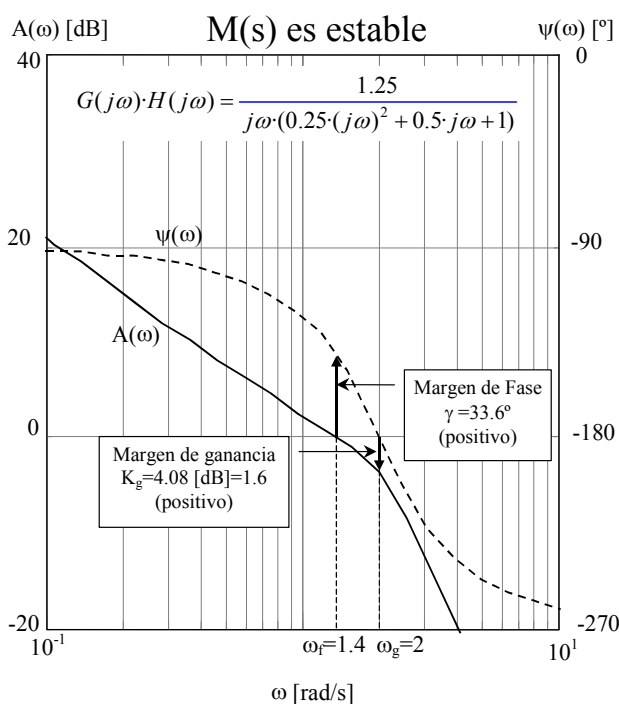
Sistema 2: $|G(j\omega_f) \cdot H(j\omega_f)| = \left| \frac{3.75}{j\omega_f \cdot (0.25 \cdot (j\omega_f)^2 + 0.5 \cdot j\omega_f + 1)} \right| = 1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \omega_f = 2.6 \Rightarrow |G(j \cdot 2.6) \cdot H(j \cdot 2.6)| = \frac{3.75}{j \cdot 2.6 \cdot (0.25 \cdot (j \cdot 2.6)^2 + 0.5 \cdot j \cdot 2.6 + 1)} = -207.3^\circ \Rightarrow$
 $\Rightarrow \gamma = 180^\circ - 207.3^\circ = -27.3^\circ$ Inestable

• **Margen de ganancia:** Es el inverso de $|G(j\omega) \cdot H(j\omega)|$ cuando $|G(j\omega) \cdot H(j\omega)|$ es -180° .

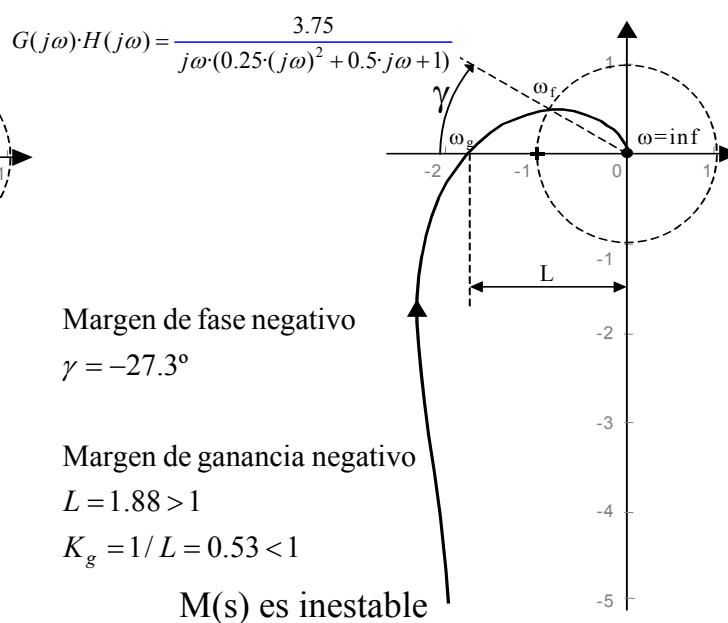
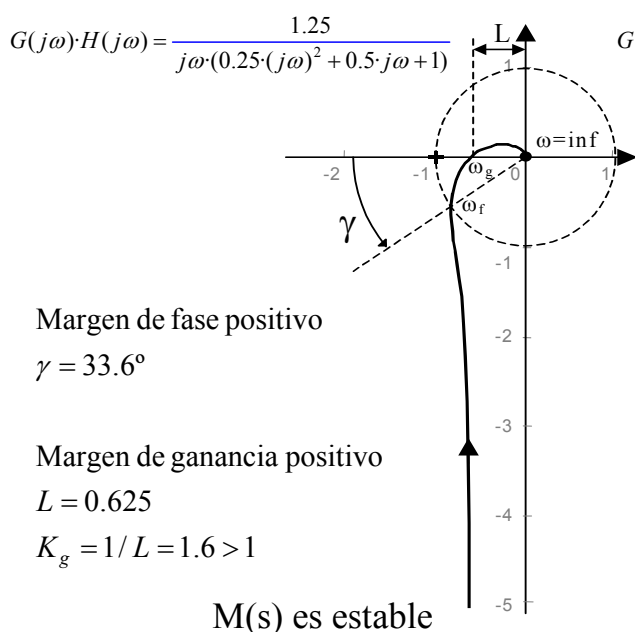
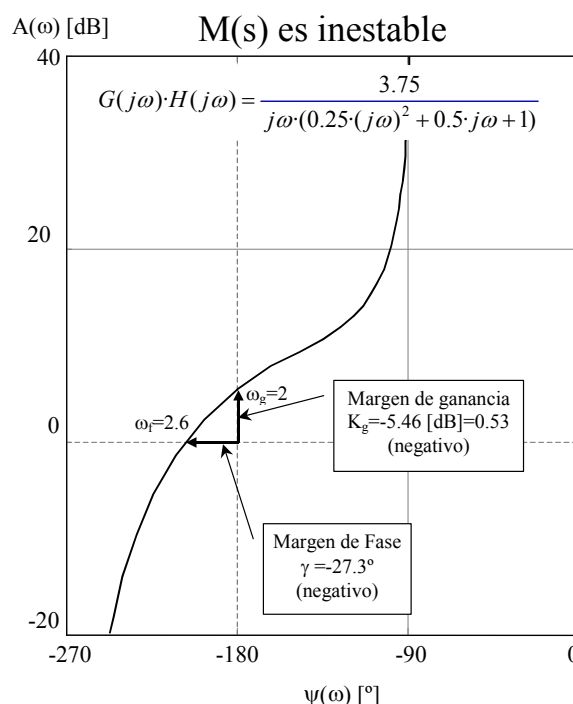
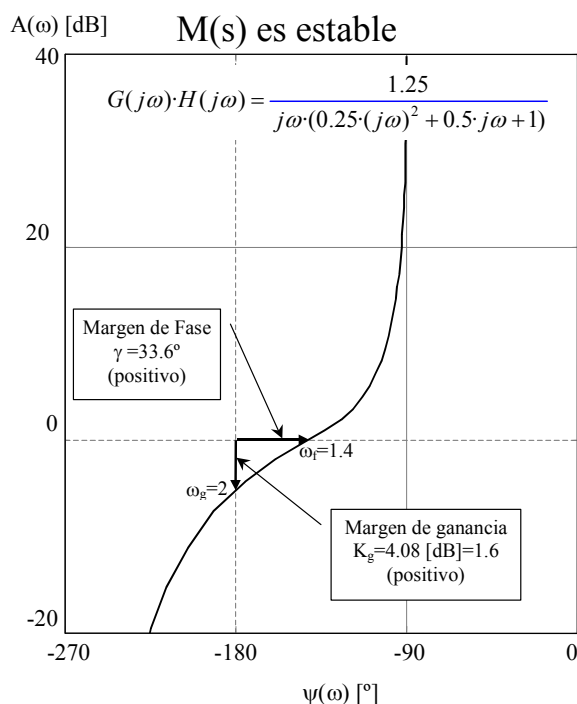
Sistema 1: $|G(j\omega_g) \cdot H(j\omega_g)| = \left| \frac{1.25}{j\omega_g \cdot (0.25 \cdot (j\omega_g)^2 + 0.5 \cdot j\omega_g + 1)} \right| = -180^\circ \Rightarrow$
 $\Rightarrow \omega_g = 2 \Rightarrow |G(j \cdot 2) \cdot H(j \cdot 2)| = \left| \frac{1.25}{j \cdot 2 \cdot (0.25 \cdot (j \cdot 2)^2 + 0.5 \cdot j \cdot 2 + 1)} \right| = 0.625 \Rightarrow$
 $\Rightarrow K_g = 1 / 0.625 = 1.6 > 1$ Estable

Sistema 2: $|G(j\omega_g) \cdot H(j\omega_g)| = \left| \frac{3.75}{j\omega_g \cdot (0.25 \cdot (j\omega_g)^2 + 0.5 \cdot j\omega_g + 1)} \right| = -180^\circ \Rightarrow$
 $\Rightarrow \omega_g = 2 \Rightarrow |G(j \cdot 2) \cdot H(j \cdot 2)| = \left| \frac{3.75}{j \cdot 2 \cdot (0.25 \cdot (j \cdot 2)^2 + 0.5 \cdot j \cdot 2 + 1)} \right| = 1.88 \Rightarrow$
 $\Rightarrow K_g = 1 / 1.88 = 0.53 < 1$ Inestable

Margen de Fase y de Ganancia sobre el Diagrama de Bode



Margen de Fase y de Ganancia sobre el Diagrama Magnitud-Fase

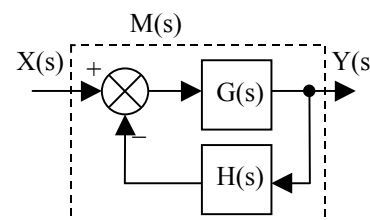


La curva NO envuelve al punto $-1+0 \cdot j$

La curva envuelve al punto $-1+0 \cdot j$

Criterio de Nyquist (I)

Basándose en el Principio del Argumento de Cauchy, Nyquist desarrollo un método para estudiar la estabilidad de un sistema realimentado $M(s)$, a partir de las raíces y la respuesta en frecuencia de $G(s) \cdot H(s)$.



- **Camino de Nyquist:** Es una curva cerrada que envuelve toda la parte real positiva del plano complejo "s" evitando pasar por aquellos puntos donde la función $G(s) \cdot H(s)$ no es analítica (evitando pasar por donde hay polos de $G(s) \cdot H(s)$).
- **Imagen del Camino de Nyquist:** Es la curva cerrada del plano " $G(s) \cdot H(s)$ " que se obtiene resolviendo $G(s) \cdot H(s)$ cuando s recorre el Camino de Nyquist.
- **P:** El número de polos de $G(s) \cdot H(s)$ que hay dentro del Camino de Nyquist.
- **N:** El número de vueltas, contabilizadas en el sentido de las agujas del reloj, de la Imagen del Camino de Nyquist alrededor del punto $-1+0 \cdot j$ del plano $G(s) \cdot H(s)$.
- **Z:** El número de polos inestables de $M(s)$. $Z=N+P$. Si $Z>0 \Rightarrow M(s)$ inestable.

Criterio de Nyquist (II)

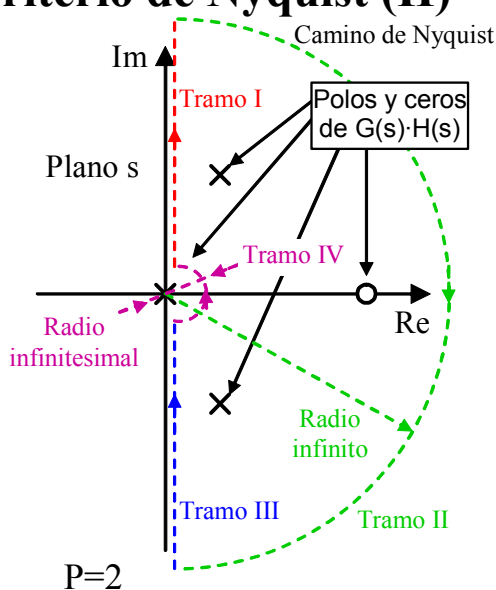
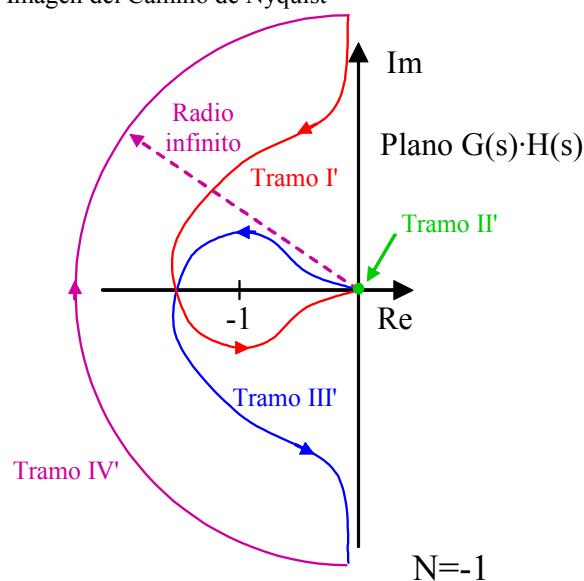


Imagen del Camino de Nyquist

$G(s) \cdot H(s)$



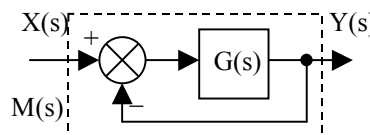
$Z=N+P=1 \Rightarrow M(s)$ tiene un polo inestable, $M(s)$ es inestable

NOTA: El tramo I' es el diagrama polar de $G(s) \cdot H(s)$ y el tramo III' su simétrico respecto al eje real. El tramo II' es un punto donde finaliza el tramo I' y comienza el III'. El tramo IV' (si existe) es un arco de $180^\circ \cdot [n^\circ \text{ de polos}]$ en el origen de $G(s) \cdot H(s)$ y radio infinito, que cierra en sentido horario entre el final del tramo III' y el inicio del I'.

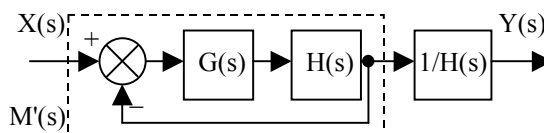
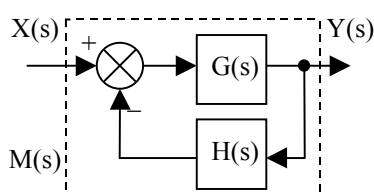
Obtención de la respuesta en frecuencia: Ábaco de Nichols (I)

El Ábaco de Nichols se superpone sobre el diagrama Magnitud-Fase y permite obtener la respuesta en frecuencia de un sistema realimentado unitaria y negativamente, $M(s)$, a partir de la respuesta en frecuencia del sistema en bucle abierto, $G(s)$.

$$M(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$



Si la realimentación no es unitaria, se obtiene la respuesta en frecuencia de $M'(s)$ a partir de la de $G(s) \cdot H(s)$ y luego se le suma la respuesta en frecuencia de $1/H(s)$.

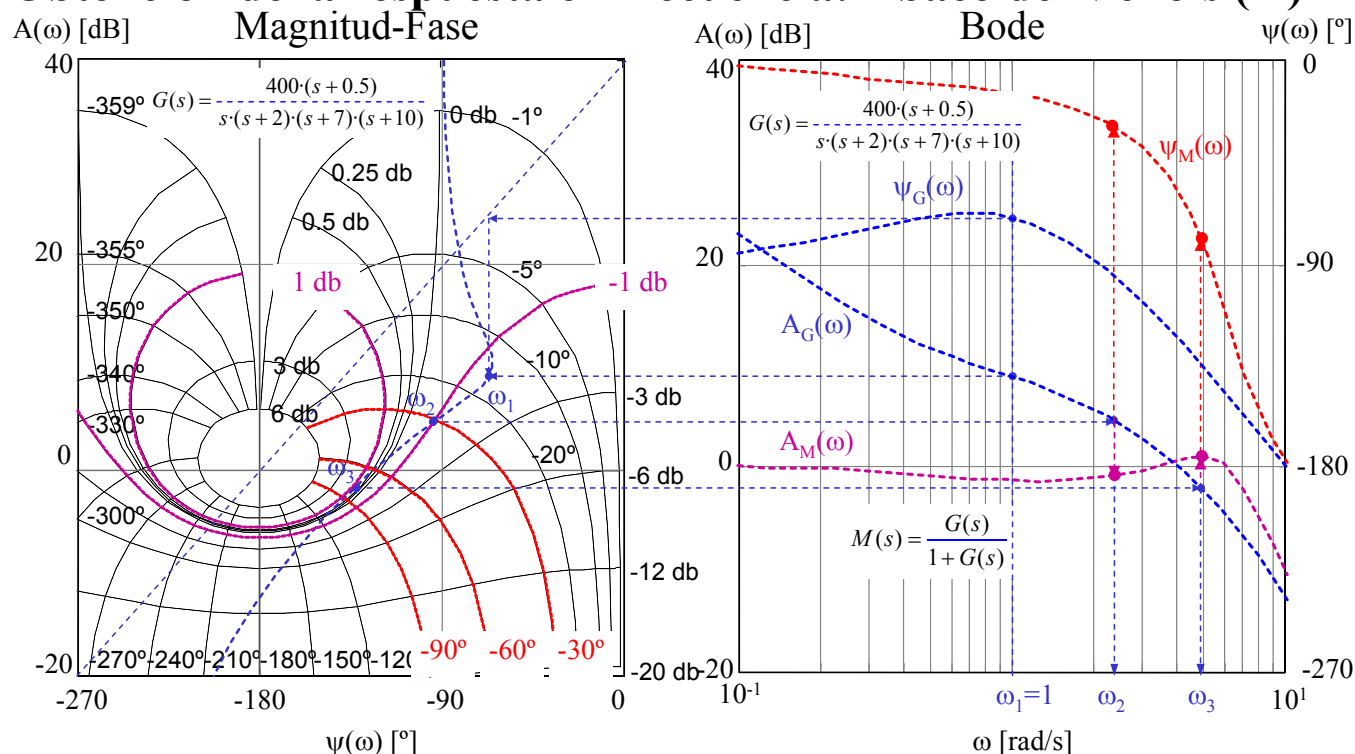


$$M(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s) \cdot H(s)}$$

$$M'(s) = \frac{G(s) \cdot H(s)}{1 + G(s) \cdot H(s)}$$

$$M(s) = M'(s) / H(s)$$

Obtención de la respuesta en frecuencia: Ábaco de Nichols (II)



Redes de compensación

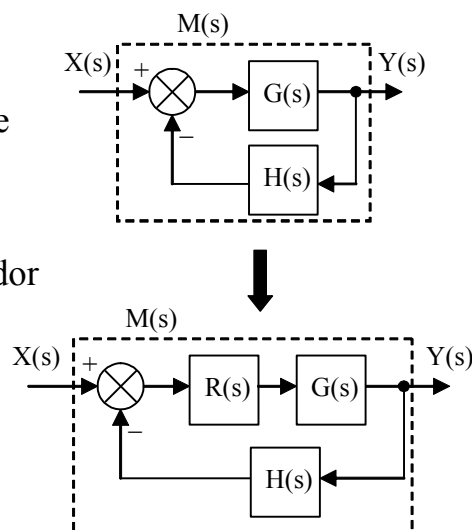
• **Objetivos:**

- Mejorar la estabilidad: aumentando los márgenes de fase y ganancia.
- Modificar el ancho de banda.

• **Red de adelanto de fase:** es comparable a un regulador PD. $R(s)=(1+T\cdot s)/(1+\alpha\cdot T\cdot s)$; $\alpha < 1$.

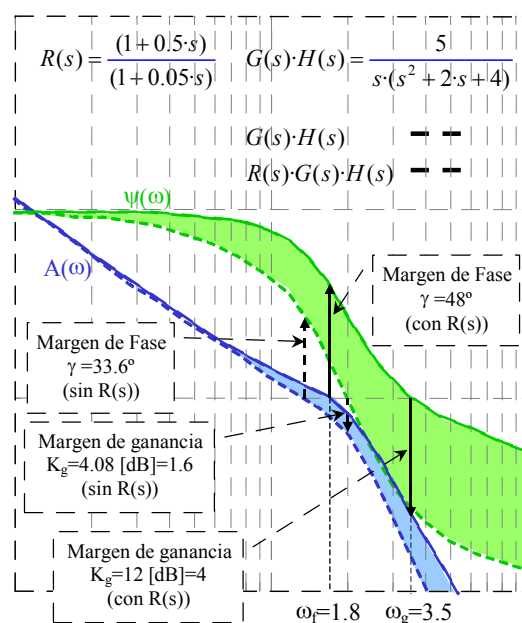
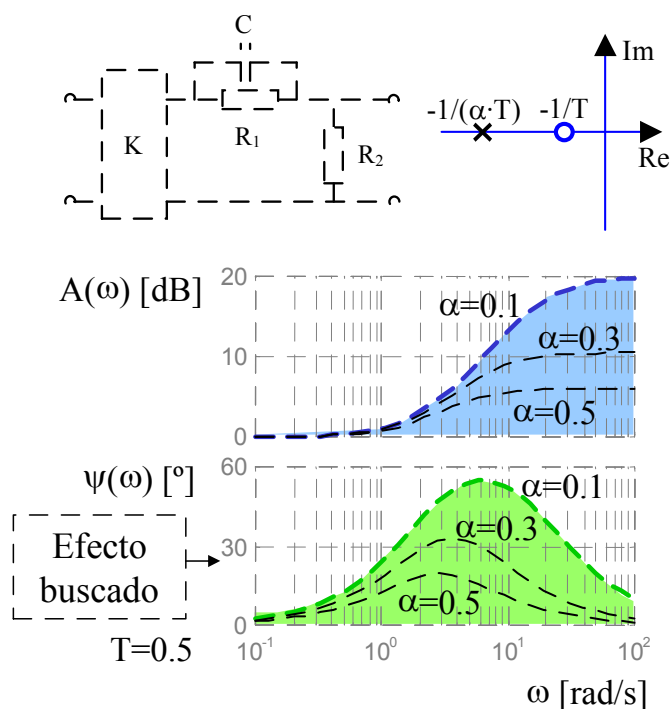
• **Red de retraso de fase:** se podría comparar con un regulador PI. $R(s)=(1+T\cdot s)/(1+\beta\cdot T\cdot s)$; $\beta > 1$.

• **Red de adelanto-retraso de fase:** combina las dos anteriores.



NOTA: Estas redes tienen efecto sobre las respuestas transitoria y permanente en el tiempo. Pero el diseño de estas redes para modificar o ajustar la respuesta en el tiempo del sistema $M(s)$ es complicado y requiere de gran experiencia.

Red de adelanto de fase $R(s) = \frac{(1+T\cdot s)}{(1+\alpha\cdot T\cdot s)}$; $\alpha < 1$



Red de retraso de fase

$$R(s) = \frac{(1+T \cdot s)}{(1+\beta \cdot T \cdot s)} ; \beta > 1$$

