# Linealización de sistemas

Ignacio Díaz Blanco

*Master en Ingeniería Mecatrónica / EU4M. Escuela Politécnica de Ingeniería de Gijón (EPI Gijón)*

Universidad de Oviedo

# Ecuaciones diferenciales y dinámica

## Definición de Modelo

**Modelo:** (definición de la RAE)

***4.*** *m. Esquema teórico, generalmente en forma matemática, de un sistema o de una realidad compleja, como la evolución económica de un país, que se elabora para facilitar su comprensión y el estudio de su comportamiento.*

# Ecuaciones diferenciales y dinámica

## Modelo dinámico

*Un modelo dinámico constituye una descripción, generalmente matemática, del comportamiento dinámico un sistema.*

- Uno de los modelos dinámicos más típicos en Ingeniería es la Ecuación Diferencial
- En muchos procesos y sistemas son necesarias varias ecuaciones diferenciales para describir adecuadamente la dinámica

# Ecuaciones diferenciales y dinámica

## El modelo como aproximación

- Casi siempre, los modelos son *aproximaciones* más o menos precisas del proceso.
- Depende de qué se "tenga en cuenta" y qué se "desprecia" en el modelo (ej. a veces se desprecia el rozamiento del aire, etc.)

---

¿qué debemos despreciar?

**simplicidad** ⟷ **precisión**

**Navaja de Occam:**

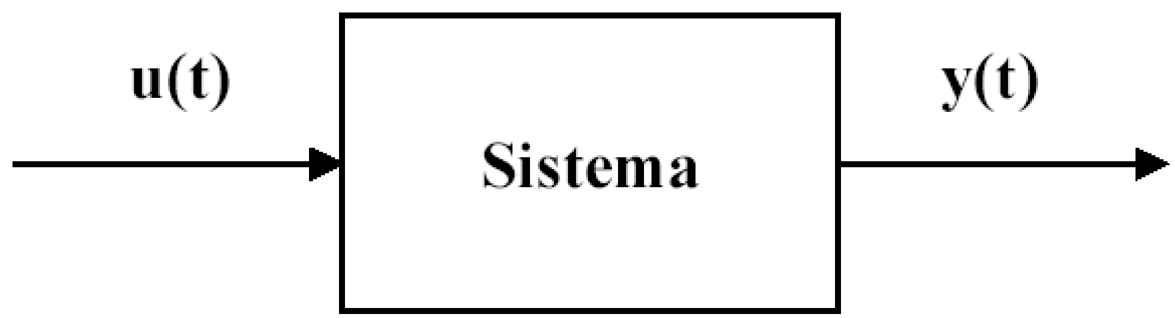
*Buscar el modelo más simple posible*
*que describa suficientemente*
*los factores que necesitamos analizar*
*en función de nuestro problema*

- *Estudiar el contexto del problema*
- *¿qué factores importan?*
- *¿qué factores pueden despreciarse?*
- *¿qué simplificaciones son asumibles?*

# Ecuaciones diferenciales y dinámica

- De una forma muy general, un sistema SISO puede modelarse según una ecuación diferencial del tipo

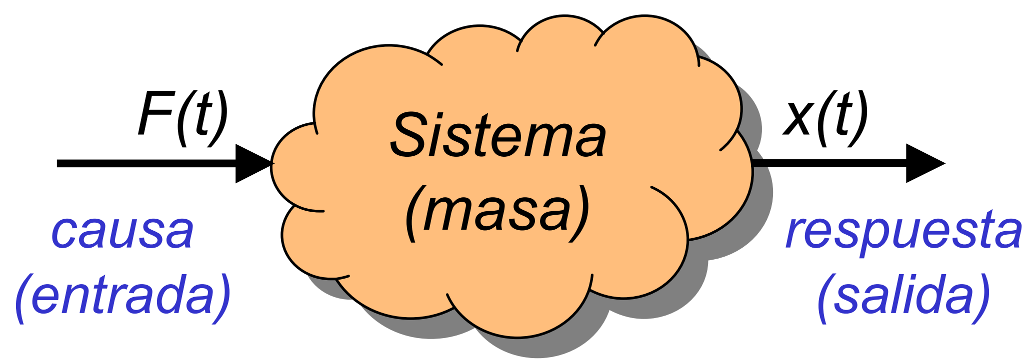
$$f\left(y, \dot{y}, \ddot{y}, \cdots, y^{n)}, u, \dot{u}, \ddot{u}, \cdots, u^{m)}\right) = 0$$



# Ejemplo de sistema dinámico (1)

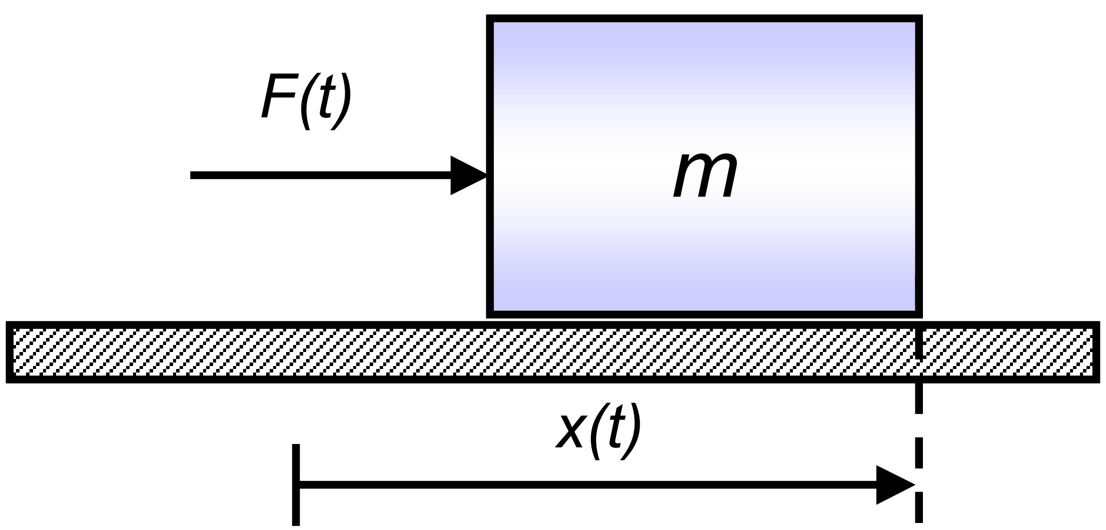
## Masa en movimiento

segunda ley de Newton: $F = m \cdot a$




$$F(t) = m\frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} - F(t) = 0$$

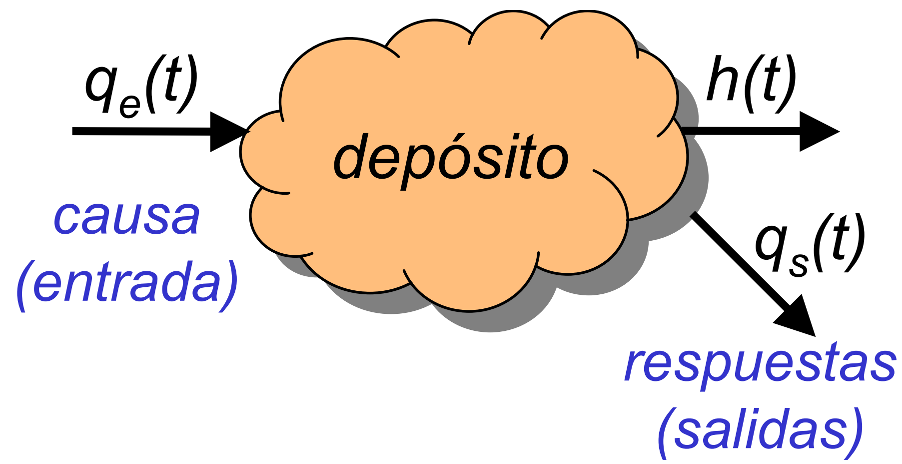



$$\boxed{f(\ddot{x}, F) = 0}$$

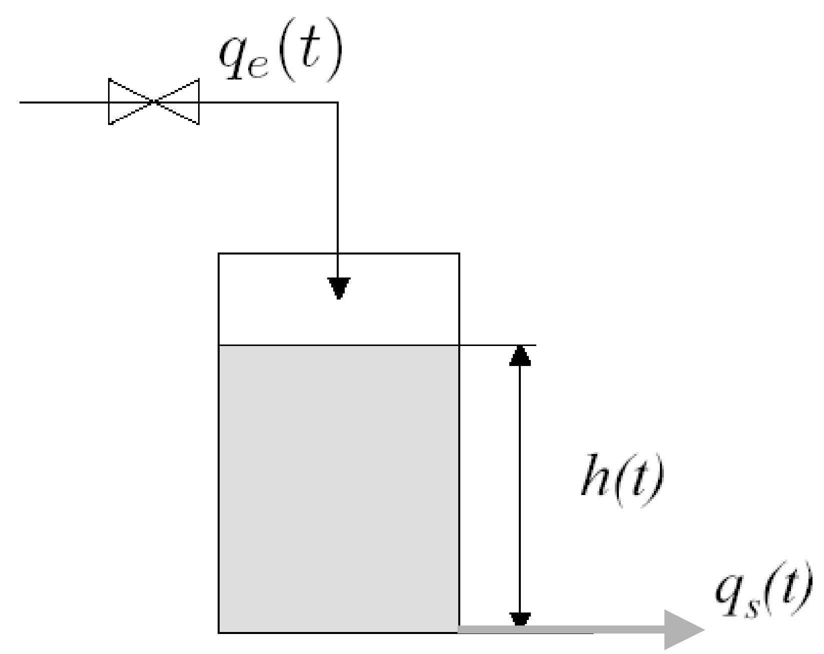
# Ejemplo de sistema dinámico (2)

## Nivel de líquido en un depósito

$$C\frac{dh(t)}{dt} = \overset{\text{caudal de entrada}}{q_e(t)} - \overbrace{K\sqrt{h(t)}}^{\text{caudal de salida } q_s(t)}$$



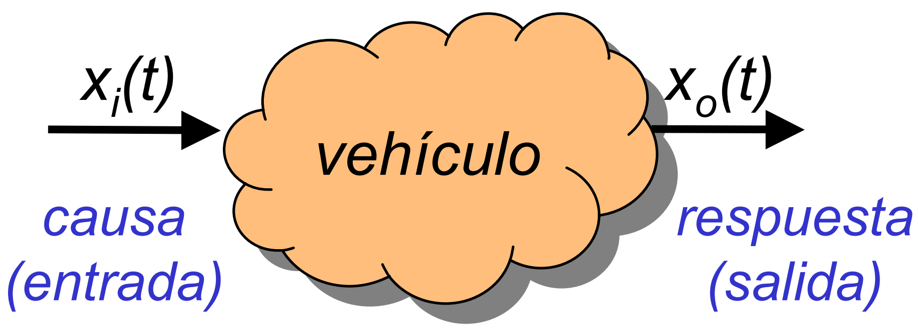

$$C\frac{dh(t)}{dt} - q_e(t) + K\sqrt{h(t)} = 0$$

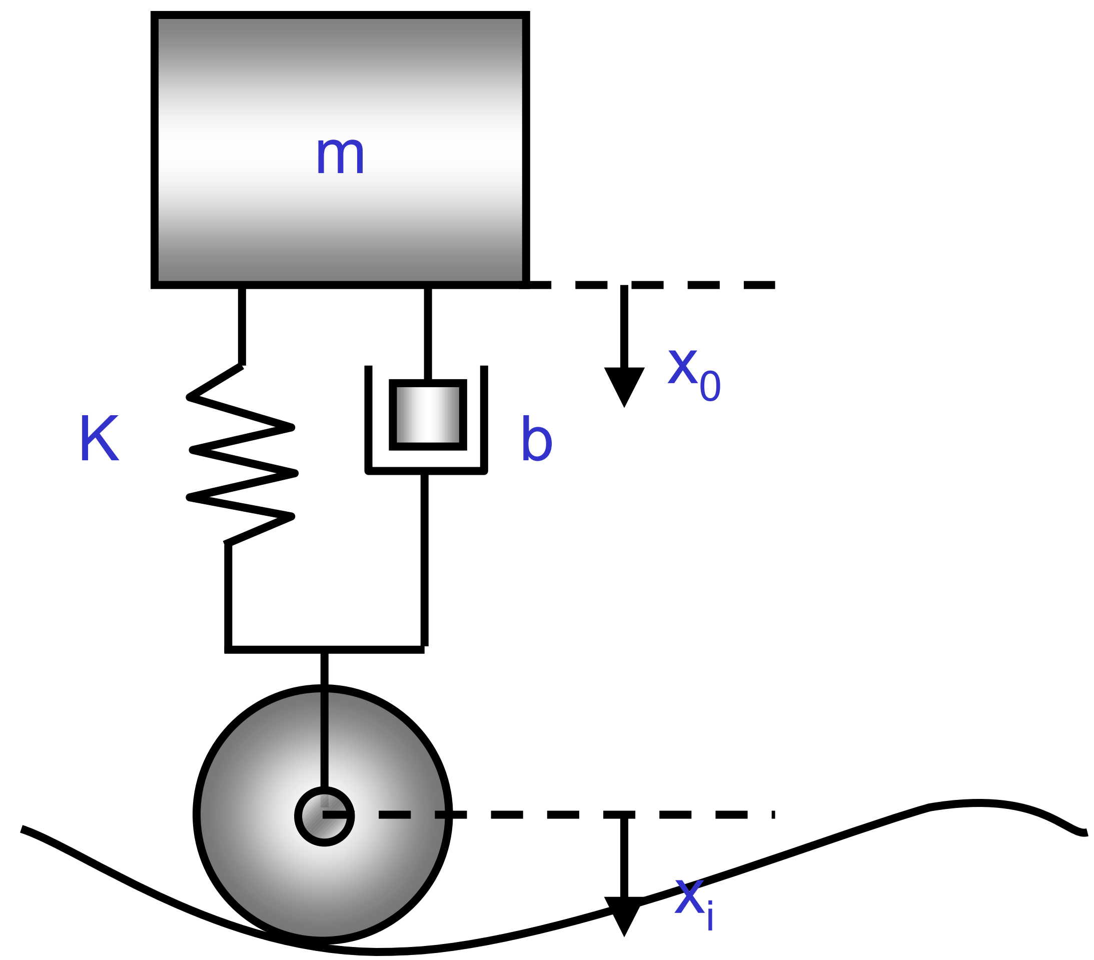



$$\boxed{f(\dot{h}, h, q_e) = 0}$$

# Ejemplo de sistema dinámico (2)

## Sistema de suspensión (masa-muelle-amortiguador)




$$m \cdot \ddot{x}_0 = K(x_i - x_0) + b(\dot{x}_i - \dot{x}_0)$$

$$m\ddot{x}_0 + b\dot{x}_0 + Kx_0 = Kx_i + b\dot{x}_i$$

$$m\ddot{x}_0 + b\dot{x}_0 + Kx_0 - K\dot{x}_i - bx_i = 0$$

$$\boxed{f(\ddot{x}_0, \dot{x}_0, x_0, \dot{x}_i, x_i) = 0}$$

# Linealidad: principio de superposición

Un sistema es ***lineal*** si y solo si verifica el principio de ***superposición***:

si

$$u_1(t) \longrightarrow y_1(t)$$

$$u_2(t) \longrightarrow y_2(t)$$

entonces

$$\alpha u_1(t) + \beta u_2(t) \longrightarrow \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$$

$$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

# Ecuación diferencial lineal

La siguiente ecuación diferencial

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_0 u + b_1 \frac{du}{dt} + \cdots + b_m \frac{d^m u}{dt^m}$$

se denomina
*Ecuación Diferencial Lineal de coeficientes constantes (EDL-CC)*

Este modelo matemático:
- verifica la propiedad de superposición
- describe con precisión la dinámica de muchos sistemas físicos

***Ejercicio:***
*Demostrar la linealidad de la EDL-CC*
*comprobando que verifica el principio de superposición*

# Aproximación lineal de sistemas no lineales

## Sistemas **lineales**

- Muchos sistemas en la naturaleza se comportan de forma aproximadamente lineal
- Existen métodos eficientes para trabajar con sistemas lineales:
  - Transformada de Laplace
  - Análisis en el dominio de la frecuencia
  - etc.

## Sistemas **no lineales**

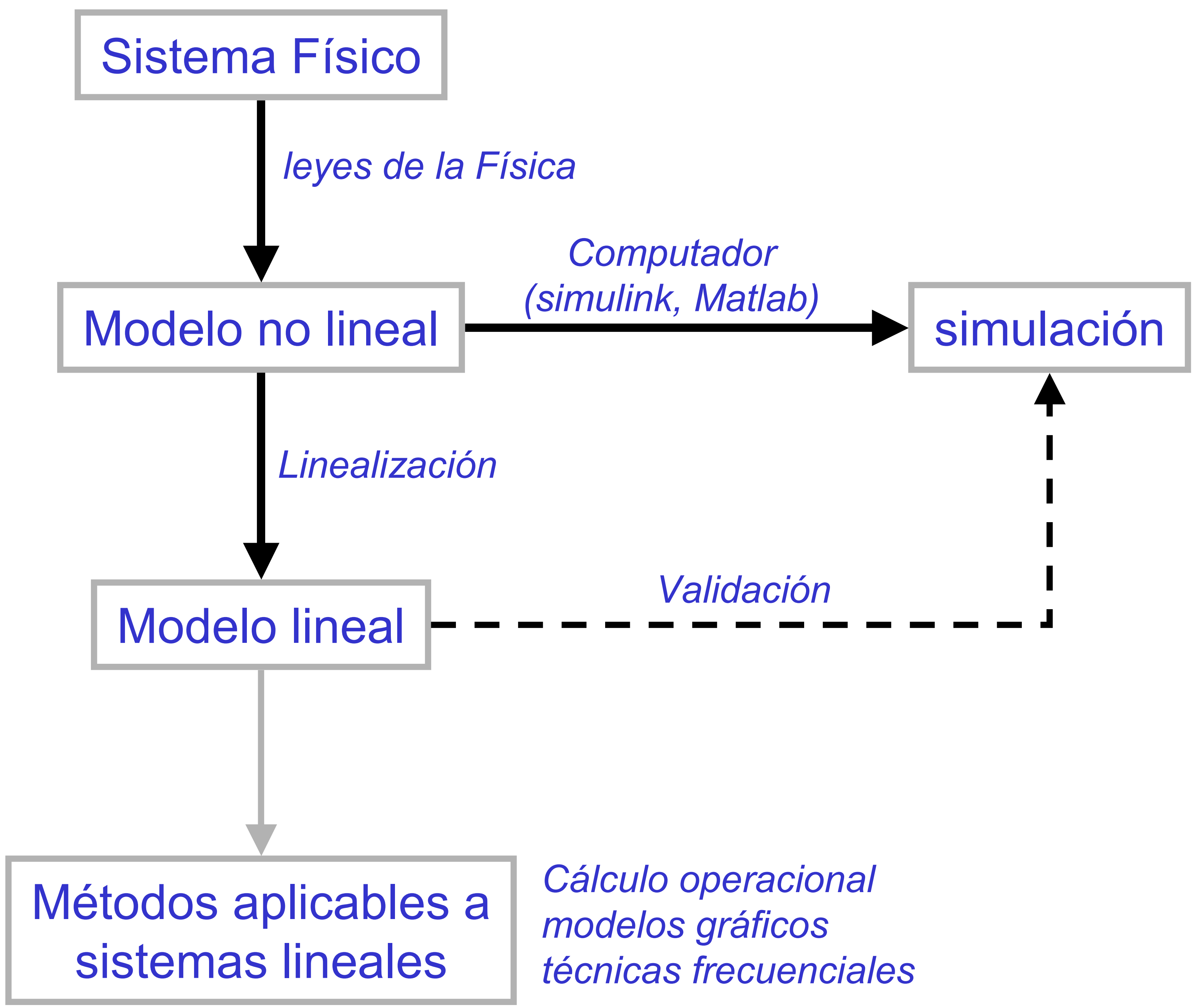
- También muchos sistemas son no lineales (ej: el depósito: demostrar que el depósito es un sistema lineal y que los ejemplos de la masa y del sistema de amortiguación son lineales)
- Para sistemas no lineales no son aplicables muchos de los métodos de análisis y modelado

Linealización

Obtener un modelo **lineal** aproximado a partir de un modelo **no lineal**

# Procedimiento de linealización

## Etapas



# Procedimiento de linealización

## Aproximación de Taylor (una variable)

Una función *f(x)* puede aproximarse por Taylor:

$$f(x) = f(x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_0 \Delta x + \underbrace{\frac{1}{2!}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_0 (\Delta x)^2 + \cdots}_{\text{términos de orden superior}}$$

*términos de orden superior*

Tomando términos de primer orden

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_0 \Delta x + \epsilon}$$

$\mathbf{x}=\mathbf{x}_0$ *(punto de equilibrio)*

# Procedimiento de linealización

## Aproximación de Taylor (varias variables)

Para una función de varias variables,

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

Residuo
(términos de orden ≥ 2)

la aproximación lineal (términos de orden 1) sería:

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_0 \Delta x_1 + \left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_0 \Delta x_2 + \cdots + \epsilon$$

$$\Delta x_i \quad = \quad x_i - x_{i0}$$

siendo

$$\mathbf{x}_0 = (x_{10}, x_{20}, \cdots, x_{n0})$$

el punto de equilibrio, en torno al cual es válida la aproximación

# Procedimiento de linealización

## Aproximación de Taylor (aplicación a EDL-CC)

para el caso

$$f(y, \dot{y}, \ddot{y}, \cdots, u, \dot{u}, \cdots, u^{m)}) = 0$$

$$\overset{f(\cdot)\equiv 0}{f(\mathbf{x})} = \overset{f(\cdot)\equiv 0}{f(\mathbf{x}_0)} + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_0 \Delta y + \left.\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right|_0 \Delta \dot{y} + \left.\frac{\partial f}{\partial \ddot{y}}\right|_0 \Delta \ddot{y} +$$
$$+ \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_0 \Delta u + \left.\frac{\partial f}{\partial \dot{u}}\right|_0 \Delta \dot{u} + \left.\frac{\partial f}{\partial u^{m)}}\right|_0 \Delta u^{m)} + \epsilon$$

# Procedimiento de linealización

## Paso 1: obtención de un punto de equilibrio

***Punto de equilibrio***

El punto en torno al cual se linealiza
debe ser un punto de equilibrio del sistema

Dado que en el equilibrio el sistema no varía
las derivadas temporales son cero en dicho punto

$$\dot{y} = 0, \ddot{y} = 0, \cdots$$
$$\dot{u} = 0, \ddot{u} = 0, \cdots$$

... entonces se cumple que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Delta y &= \frac{dy}{dt} + \cancelto{0}{\frac{d(y_0)}{dt}} \\ \Delta\left(\frac{dy}{dt}\right) &= \frac{dy}{dt} + \cancelto{0}{\left.\frac{dy}{dt}\right|_0} \end{aligned} \longrightarrow \frac{d}{dt}\Delta y = \Delta\left(\frac{dy}{dt}\right)$$

En general,
se cumple, por tanto,

$$\Delta\dot{y} = \dot{\Delta y}$$
$$\Delta\dot{u} = \dot{\Delta u}$$

# Procedimiento de linealización

## Paso 2: linealización en torno al punto de equilibrio elegido

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_0 \Delta y + \left.\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right|_0 \Delta \dot{y} + \left.\frac{\partial f}{\partial \ddot{y}}\right|_0 \Delta \ddot{y} +$$
$$+ \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_0 \Delta u + \left.\frac{\partial f}{\partial \dot{u}}\right|_0 \Delta \dot{u} + \left.\frac{\partial f}{\partial u^{m)}}\right|_0 \Delta u^{m)} \approx 0$$

$$k_1 \Delta y + k_2 (\dot{\Delta y}) + k_3 (\ddot{\Delta y}) + \cdots + k_{n+1} \Delta u + \cdots + k_{n+m} (\Delta u)^{m)} \approx 0$$

definiendo:

$$Y \equiv \Delta y$$
$$U \equiv \Delta u$$

queda finalmente:

$$k_1 Y + k_2 \dot{Y} + k_3 \ddot{Y} + \cdots + k_{n+1} U + \cdots + k_{n+m} U^{m)} \approx 0$$

# Procedimiento de linealización

## Paso 2: linealización en torno al punto de equilibrio elegido

puesto de otra forma (redefiniendo las constantes) queda:

$$a_n \frac{d^nY(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}Y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots a_0 Y(t) = b_m \frac{d^mU(t)}{dt^m} + \cdots + b_0 U(t)$$

o bien,

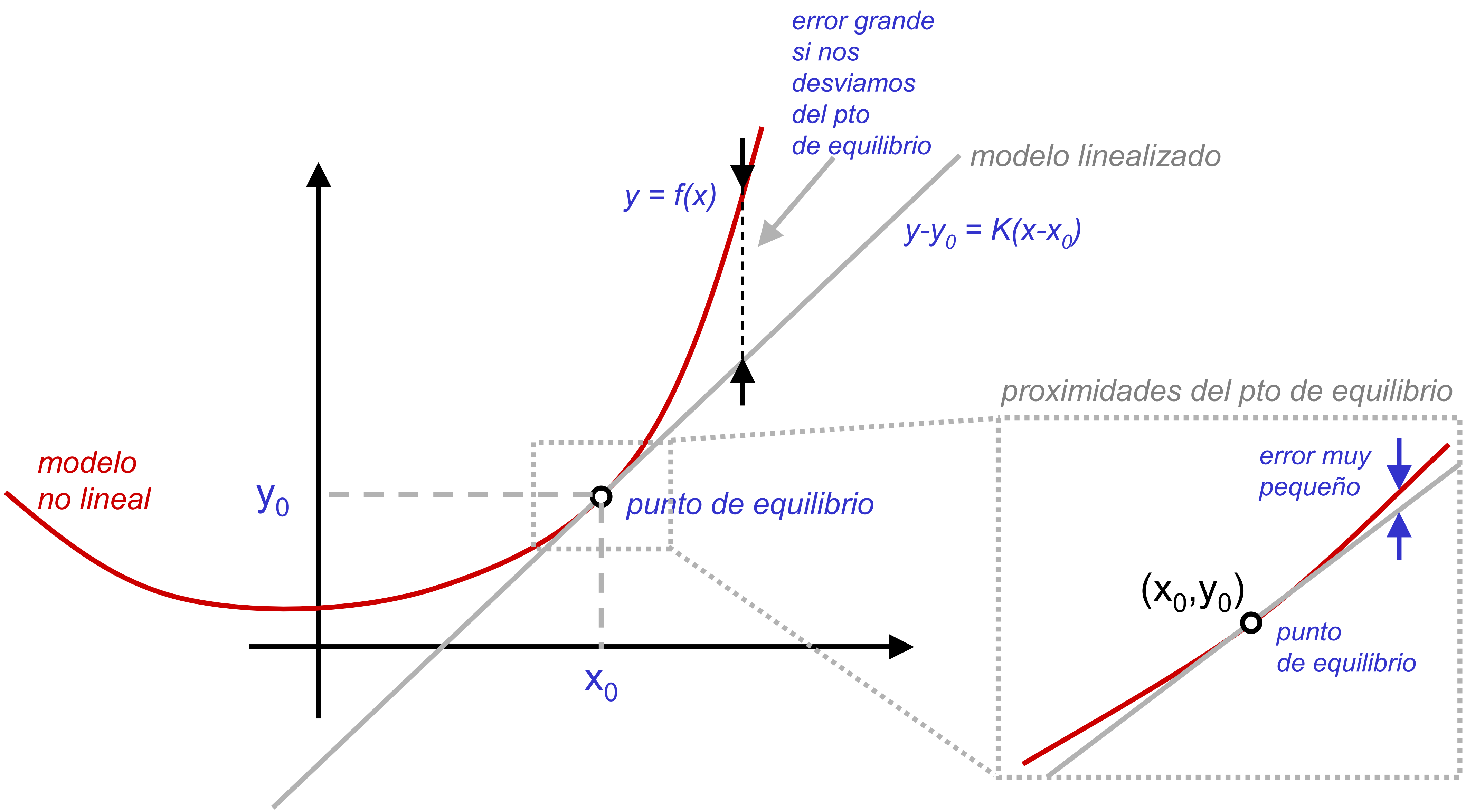
$$a_n \frac{d^nY(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}Y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots a_0 Y(t) - b_m \frac{d^mU(t)}{dt^m} - \cdots - b_0 U(t) = 0$$

que es de la forma

$$f_{\text{lineal}}(Y, \dot{Y}, \ddot{Y}, \cdots, U, \dot{U}, \cdots, U^{m)}) = 0$$

# Procedimiento de linealización

## Interpretación gráfica



# Procedimiento de linealización

## Consideraciones sobre el método

- El *punto de trabajo* es el estado de funcionamiento del sistema en torno al cual vamos a trabajar, y debe ser un estado de equilibrio → las derivadas temporales son cero

***d/dt = 0***

- *Validez* →El modelo lineal describe bien al real cuando el sistema evoluciona cerca del punto de equilibrio. Lejos del punto de equilibrio el modelo linealizado pierde precisión.
- *Elección del punto de equilibrio* →El punto de equilibrio debe elegirse lo + próximo posible a los puntos de funcionamiento previsibles del sistema en las condiciones de funcionamiento habituales
- *¿cuánto me puedo alejar?* → experiencia, sentido común, simulación...

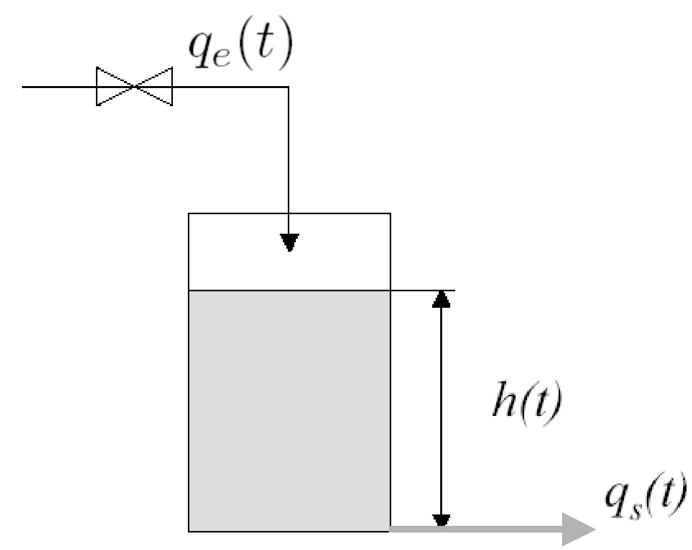
# Ejemplo: linealización de un depósito

Linealizar en torno a un punto de equilibrio definido por $h_0 = 1$

$$C\frac{dh(t)}{dt} = \overset{\text{caudal de entrada}}{q_e(t)} - \overbrace{K\sqrt{h(t)}}^{\text{caudal de salida } q_s(t)}$$

datos:
$C = 3, \quad K = 2$

$$C\frac{dh(t)}{dt} - q_e(t) + K\sqrt{h(t)} = 0$$




$$\boxed{f(\dot{h}, h, q_e) = 0}$$

# Ejemplo: linealización de un depósito

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \dot{h}}\right|_0 = C, \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial h}\right|_0 = K\frac{1}{2\sqrt{h_0}}, \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial q_e}\right|_0 = -1$$

$$C\frac{d\Delta h(t)}{dt} - \Delta q_e(t) + K\frac{1}{2\sqrt{h_0}}\Delta h(t) = 0$$

# Ejemplo: linealización de un depósito

$$C\frac{dh(t)}{dt} - q_e(t) + K\sqrt{h(t)} = 0$$

$$dh(t)/dt \equiv 0$$

$$\begin{aligned} q_{e0} &= K\sqrt{h_0} \\ h_0 &= \frac{q_{e0}^2}{K^2} \end{aligned} \longrightarrow q_{e0} = 2, \quad h_0 = 1$$

# Ejemplo: linealización de un depósito

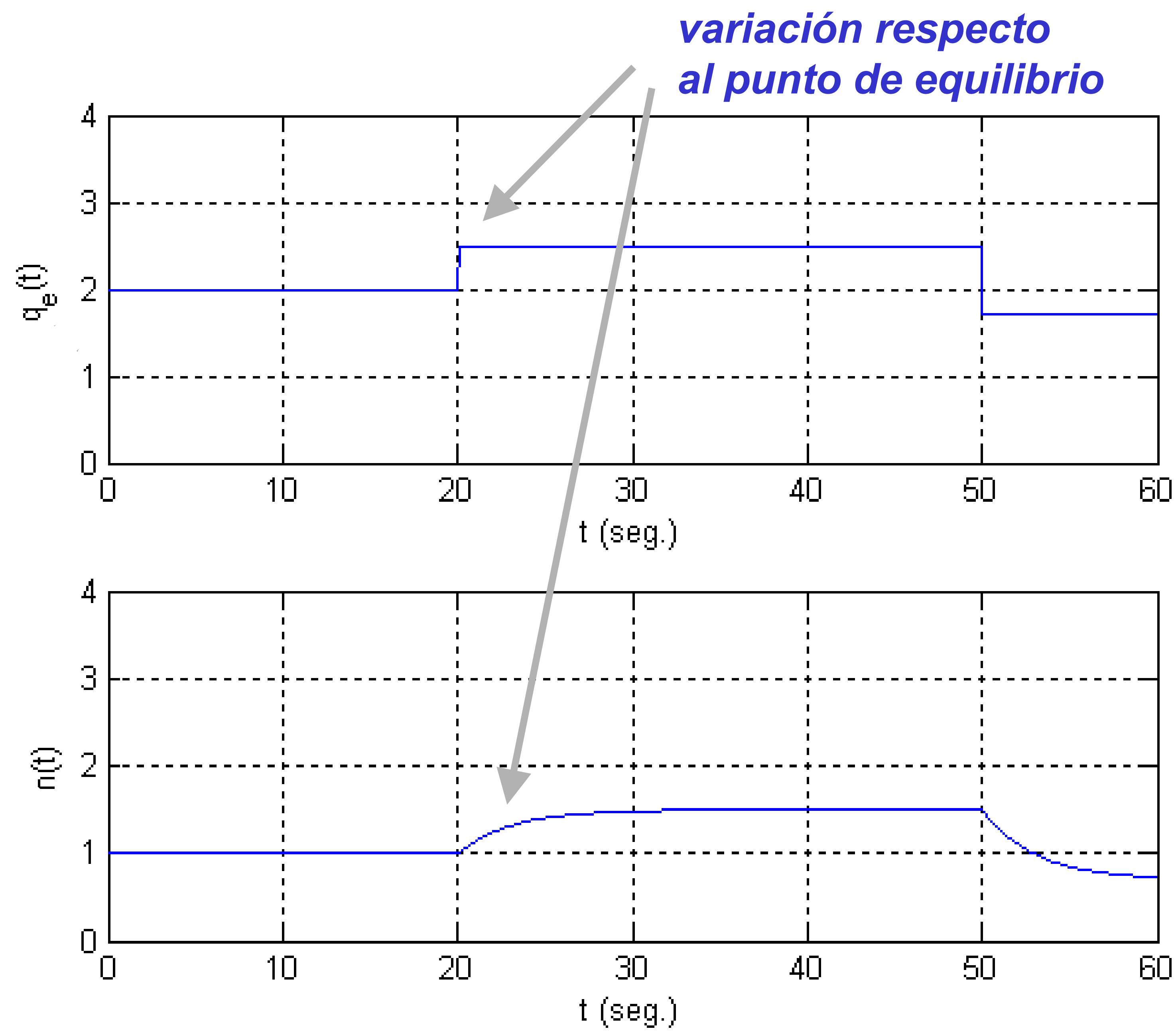
sustituyendo, queda al final

$$3\frac{dH(t)}{dt} + H(t) = Q_e(t)$$

o utilizando la notación de las deltas,

$$3\frac{d\Delta h(t)}{dt} + \Delta h(t) = \Delta q_e(t)$$

# Ejemplo: linealización de un depósito



# Ejemplo: linealización EDNL

*Linealizar la siguiente ecuación*

$$\frac{d^2y}{dt^2} + x\frac{dy}{dt} + y^2 - x = 0$$

*en torno al punto de equilibrio dado por* $x_0 = 4$

# Ejemplo: linealización EDNL

***Solución:***

$$\ddot{y} + x\dot{y} + y^2 - x = 0 \quad \longleftarrow \quad f(y, \dot{y}, \ddot{y}, x) = 0$$

La aproximación por Taylor de la función es:

$$f(y, \dot{y}, \ddot{y}, x) \approx \left.\frac{\partial f}{\partial \ddot{y}}\right|_0 \Delta\ddot{y} + \left.\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right|_0 \Delta\dot{y} + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_0 \Delta y + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_0 \Delta x$$

# Ejemplo: linealización EDNL

Calculando las parciales de f respecto a las variables...

$$\frac{\partial f}{\partial \ddot{y}} = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = x_0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y_0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -1 + (\dot{y})_0$$

Queda el siguiente modelo

$$\Delta\ddot{y} + x_0\Delta\dot{y} + 2y_0\Delta y - \Delta x = 0$$

Utilizando la otra notación:

$$\ddot{Y} + x_0\dot{Y} + 2y_0 Y - X = 0$$

*donde denotamos*

$$X(t) \equiv x(t) - x_0 = \Delta x$$

$$Y(t) \equiv y(t) - x_0 = \Delta y$$

# Ejemplo: linealización EDNL

Eligiendo un pto de equilibrio
en el que se anulen las derivadas
queda,

$$x_0 = 4, \qquad y_0^2 - x_0 = 0 \rightarrow y_0 = \pm\sqrt{x_0} = \pm 2$$

Tenemos dos soluciones → hay dos puntos de equilibrio

**Nota:**
*Si el modelo tuviese un sentido físico,
deberíamos elegir el punto más verosímil
y descartar los que no tengan sentido.*

*En este caso es matemática pura y los dos pueden valer.*

# Ejemplo: linealización EDNL

Si elegimos $y_0$=2,

$$\ddot{Y} + 4\dot{Y} + 4Y - X = 0$$

Si elegimos $y_0$=-2,

$$\ddot{Y} + 4\dot{Y} - 4Y - X = 0$$