Tema 5
Lugar de las Raíces

Contenido

- Respuesta dinámica de un sistema
- Respuesta dinámica de un sistema en bucle cerrado
- Definición de Lugar de las Raíces (LR)
- Ecuación Característica
- Criterio del Argumento
- Criterio del Módulo
- Reglas de Trazado del Lugar de las Raíces
- Ejemplo

Respuesta Dinámica de un Sistema

$$Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \cdot U(s) = \text{Expresión Racional} = \frac{\prod(s - z_i)}{\prod(s - p_i)}$$

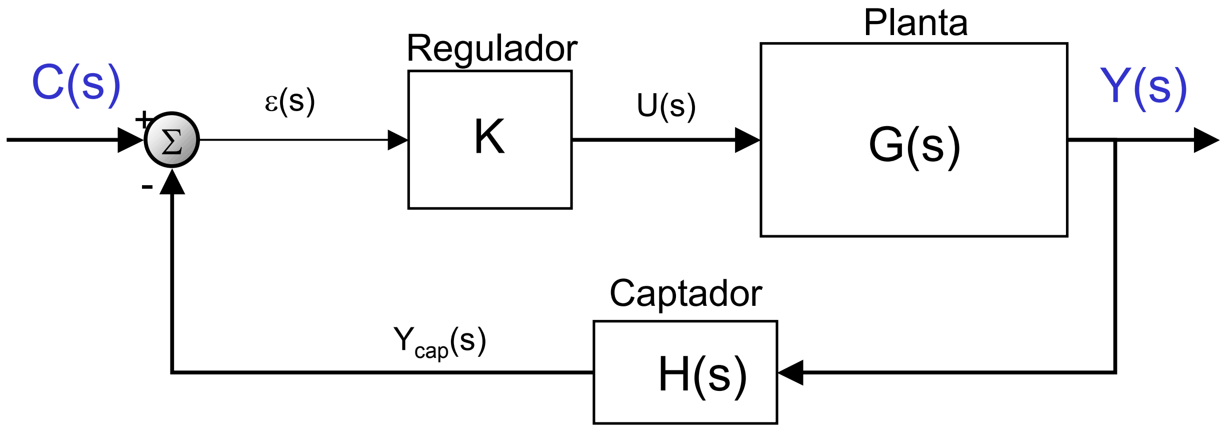
Los ceros también influyen a través de los coeficientes (pesos) de los modos transitorios

El comportamiento dinámico de un sistema viene dado por los polos de la f.d.t. (raíces de la ecuación característica)

$$Y(s) = \frac{A_1}{s - p_1} + \frac{A_2}{s - p_2} + \cdots + \frac{B_k}{(s - p_k)^r} + \cdots \qquad p_i \in \mathbb{C}$$

$$y(t) \longrightarrow A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \cdots$$

Respuesta Dinámica de un Sistema en Bucle Cerrado



Problemas:

- Difícil si el orden de la ec. caract. >=3
- Habitualmente, necesario recalcularlos en función de un parámetro (ej.: K)

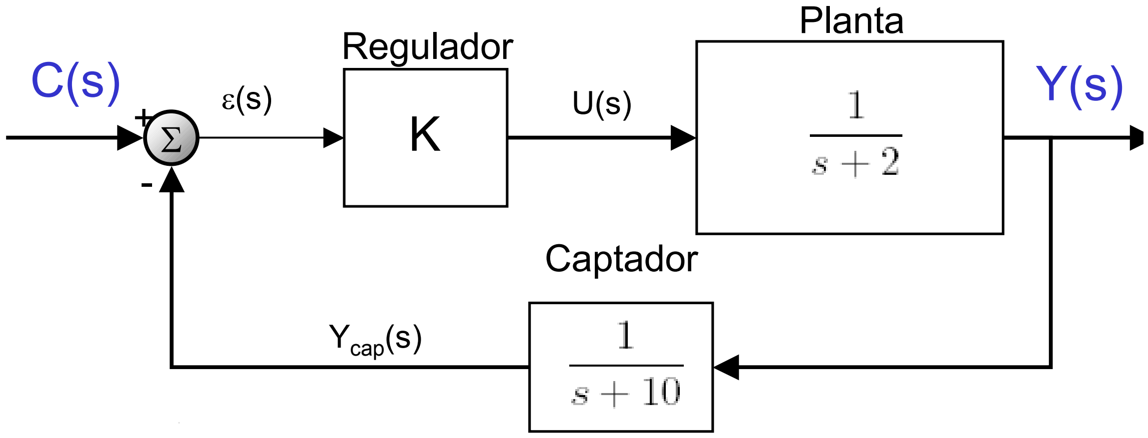
$$M(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)H(s)}$$

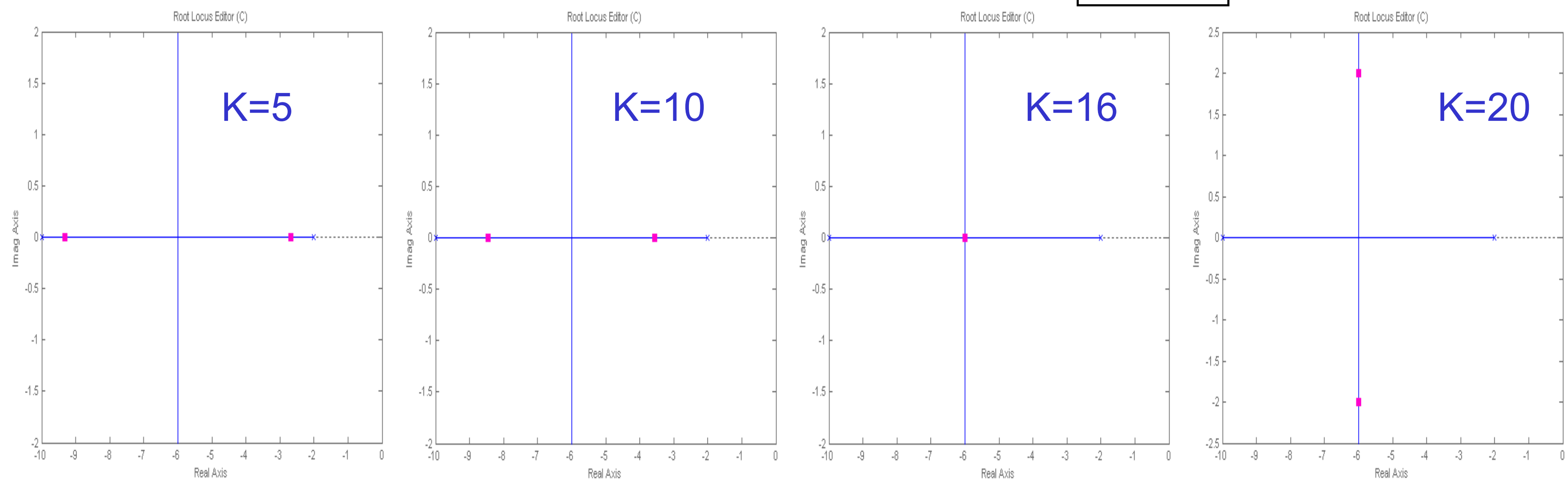
La dinámica del sistema viene dada principalmente por las raíces de la ec. característica

$$1 + KG(s)H(s) = 0$$

Definición de Lugar de las Raíces (LR)

Definición:
El L.R. es el lugar geométrico en el plano complejo que ocupan las raíces de la ecuación característica cuando varía el parámetro K





Ecuación Característica

El método del L.R. parte de la ecuación característica factorizada de la siguiente forma:

$$1 + KG(s)H(s) = 1 + K\frac{\Pi_j(s - z_j)}{\Pi_i(s - p_i)} = 0$$

Condición General:

$$K \cdot \frac{\prod_j (s - z_j)}{\prod_i (s - p_i)} = -1$$

Criterio del Argumento

Criterio del Argumento:

Permite determinar si un punto s pertenece o no al LR

$$\arg\left\{K\cdot\frac{\prod_j(s-z_j)}{\prod_i(s-p_i)}\right\}=(2q+1)\pi$$

$$\sum_j^m \arg\{s-z_j\}-\sum_i^n \arg\{s-p_i\}=(2q+1)\pi$$

$$\sum_j^m \theta_{z_j}-\sum_i^n \theta_{p_i}=(2q+1)\pi$$

Criterio del Módulo

Criterio del Módulo:

Permite determinar el valor de K correspondiente a un punto del LR

$$K = \frac{\prod_{i=1}^{n} |s - p_i|}{\prod_{j=1}^{m} |s - z_j|}$$

o bien,

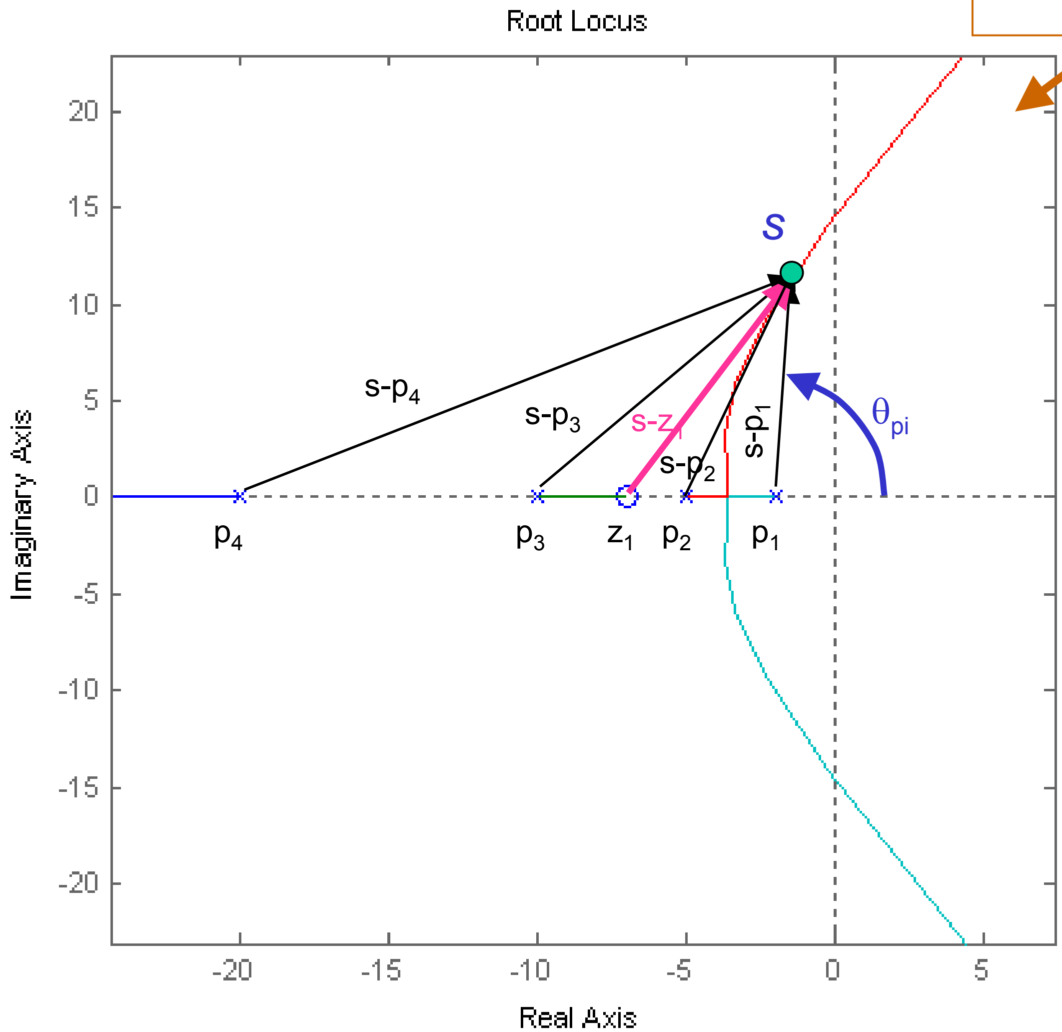
$$K = \frac{\prod_{i=1}^{n} d_{p_i}}{\prod_{j=1}^{m} d_{z_j}}$$

donde d_{p_i} son las distancias de s a los polos, y d_{z_j} son las distancias de s a los ceros.

Reglas de Trazado del Lugar de las Raíces

Ejemplo:

$$G(s)H(s) = \frac{(s+7)}{(s+2)(s+5)(s+10)(s+20)}$$



Condición General:

$$K \cdot \frac{\prod_j (s - z_j)}{\prod_i (s - p_i)} = -1$$

Todo punto *s* del LR debe satisfacer esta condición general.

Reglas de Trazado del Lugar de las Raíces

Regla 1: Número de ramas del LR

$$\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)+K\cdot\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)=0$$

dado que $n \geq m$ el número de ramas independientes del LR es igual al número de polos de $G(s)H(s)$.

Reglas de Trazado del Lugar de las Raíces

Regla 2a: Comienzo del LR

$$\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)+K\cdot\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)=0$$

para $K=0$ se tendrá

$$\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)=0$$

Las raíces coinciden con los polos para $K=0$, es decir, *las ramas del LR nacen de los polos de* $G(s)H(s)$

Reglas de Trazado del Lugar de las Raíces

Regla 2b: Final del LR

análogamente, dividiendo por K

$$\frac{1}{K}\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)+\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)=0$$

para $K=\infty$

$$\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)=0$$

las raíces coinciden con los ceros de $G(s)H(s)$, es decir, *las ramas del LR terminan en los ceros de* $G(s)H(s)$. *Las* $n-m$ *restantes terminan en el infinito.*

Reglas de Trazado del Lugar de las Raíces

Regla 3: Lugar en el eje real

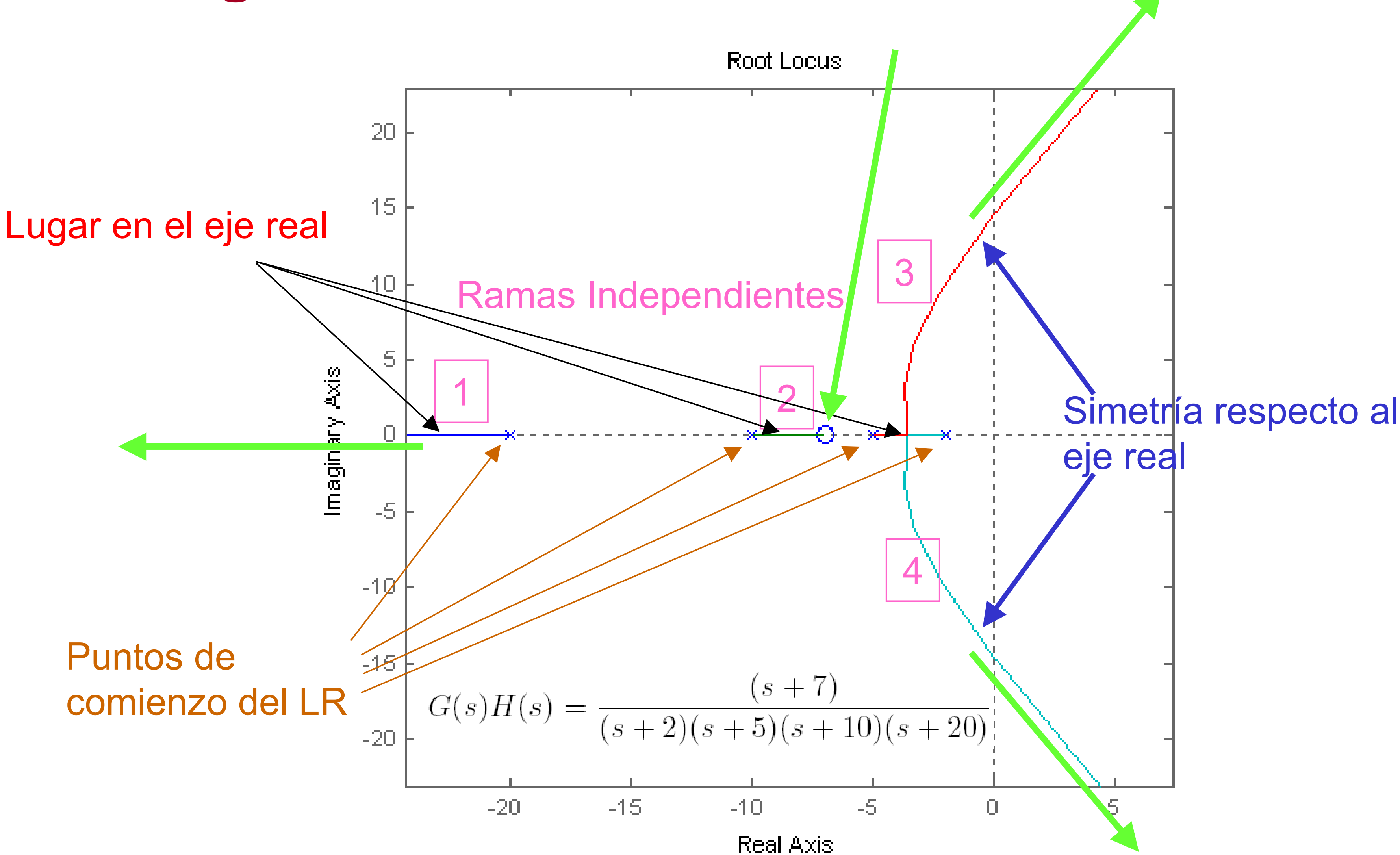
Aplicando el criterio del argumento, *pertenecen al LR los puntos del eje real que dejan a la derecha un numero impar de singularidades.*

Regla 4: Simetría respecto al eje real

Dado que las raíces son siempre reales o por pares complejos conjugados, *el LR es simétrico respecto al eje real.*

Reglas de Trazado del Lugar de las Raíces

Puntos finales del LR



Reglas de Trazado del Lugar de las Raíces

Regla 5: Asíntotas del LR

Aplicando el criterio del argumento a un punto alejado $s^* = Re^{j\theta}$

$$\sum_j^m \arg\{s^* - z_j\} - \sum_i^n \arg\{s^* - p_i\} = (2q+1)\pi$$

el ángulo de los vectores hacia s^* es siempre θ

$$\sum_j^m \theta - \sum_i^n \theta = (2q+1)\pi$$

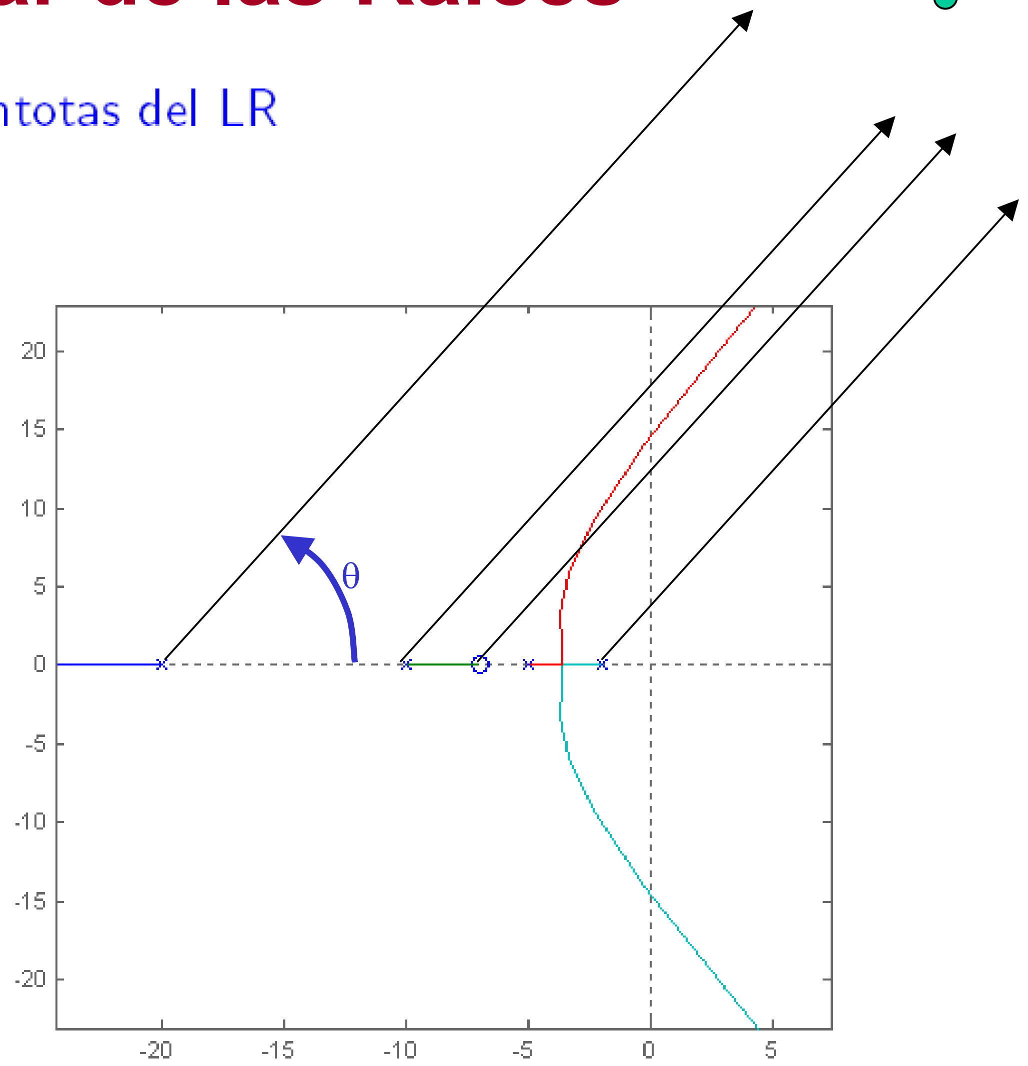
con lo cual

$$\theta = \frac{(2q+1)\pi}{n-m}, \quad q \in \mathbb{Z}$$

Reglas de Trazado del Lugar de las Raíces

Regla 5: Asíntotas del LR

$$s = R \cdot e^{j\theta}$$

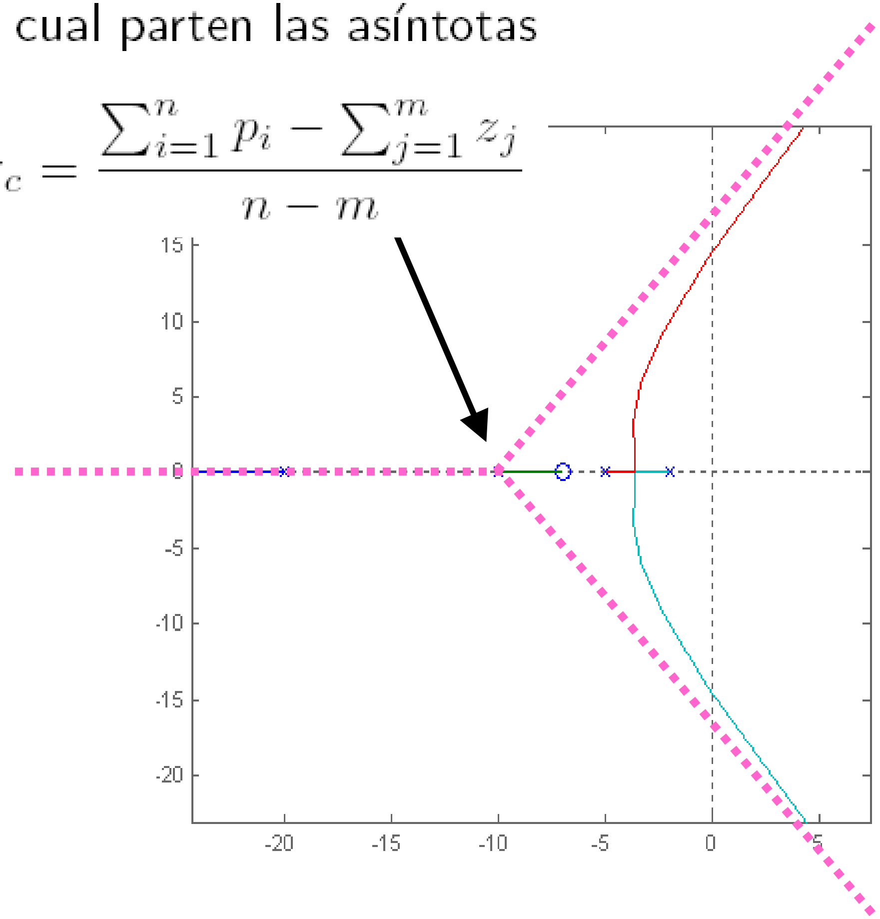


Reglas de Trazado del Lugar de las Raíces

Regla 6: Centroide

Punto del eje real del cual parten las asíntotas

$$\sigma_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{j=1}^{m} z_j}{n - m}$$



Reglas de Trazado del Lugar de las Raíces

Regla 7: Angulos de salida de polos y llegada a los ceros

Aplicando el criterio del argumento para un punto infinitamente próximo a p_i

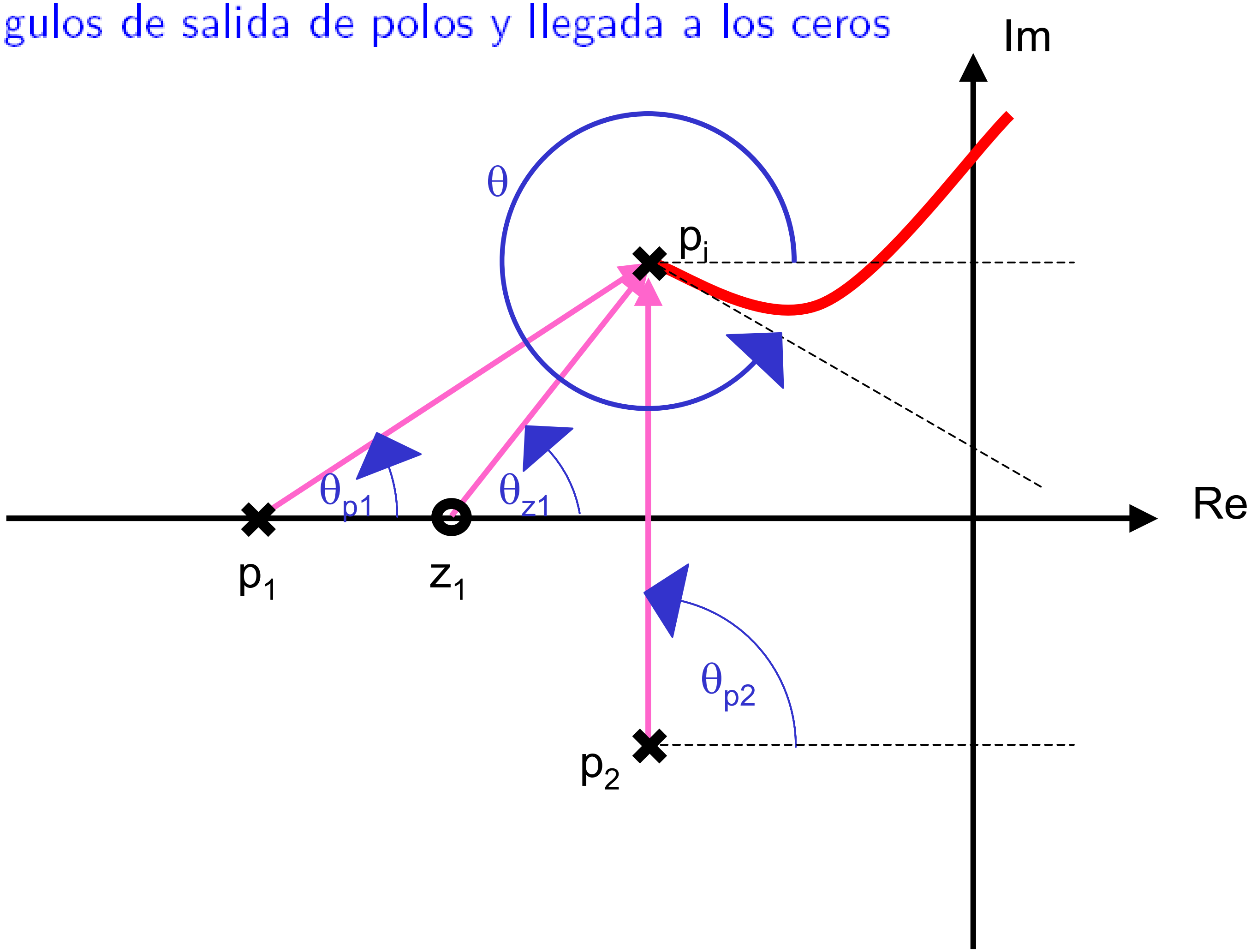
$$s = p_i + \epsilon \cdot e^j\theta \quad \rightarrow \quad s - p_i = \epsilon \cdot e^j\theta$$

$$\sum_j^m \theta_{z_j} - \sum_i^n \theta_{p_i} - \underbrace{\arg\left\{\epsilon \cdot e^j\theta\right\}}_{\theta} = (2q+1)\pi$$

$$\theta = \sum_j^m \theta_{z_j} - \sum_i^n \theta_{p_i} - (2q+1)\pi$$

Reglas de Trazado del Lugar de las Raíces

Regla 7: Angulos de salida de polos y llegada a los ceros



Reglas de Trazado del Lugar de las Raíces

Regla 8: Puntos de dispersión y confluencia

Corresponden a los máximos y mínimos de la ganancia K. Para ello hay que resolver la ecuación:

$$\frac{dK}{ds} = 0$$

La condición es necesaria pero no suficiente. Las soluciones deben además satisfacer el principio del módulo y del argumento.

Un método alternativo (cfr. [Puente91]) para resolver la ecuación es resolver iterativamente

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma + p_i} = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\sigma + z_j}$$

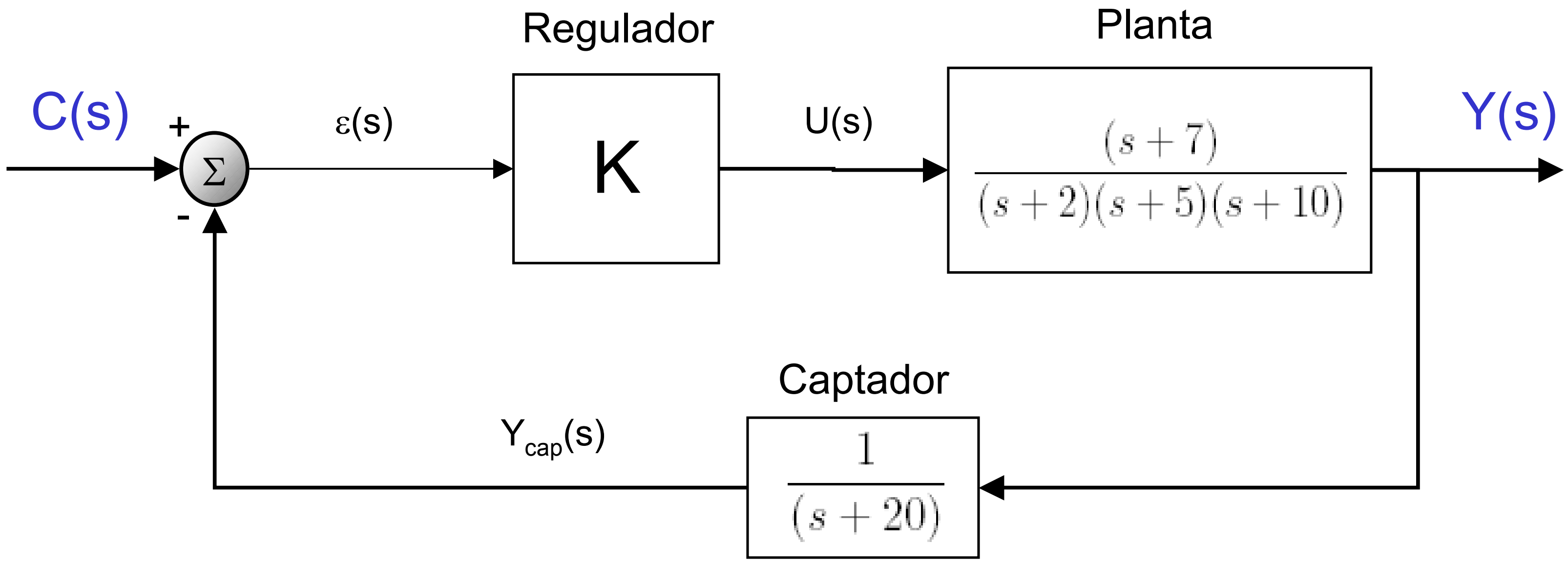
Reglas de Trazado del Lugar de las Raíces

Regla 9: Intersección con el eje imaginario

Aplicando el Criterio de Routh (cfr. [Puente91]) en función de K es posible determinar el valor de K para que el sistema sea marginalmente estable lo que requiere que aparezca una fila de ceros.

De ahí es posible determinar los polos de un sistema de segundo orden que cortan el eje imaginario.

Ejemplo:

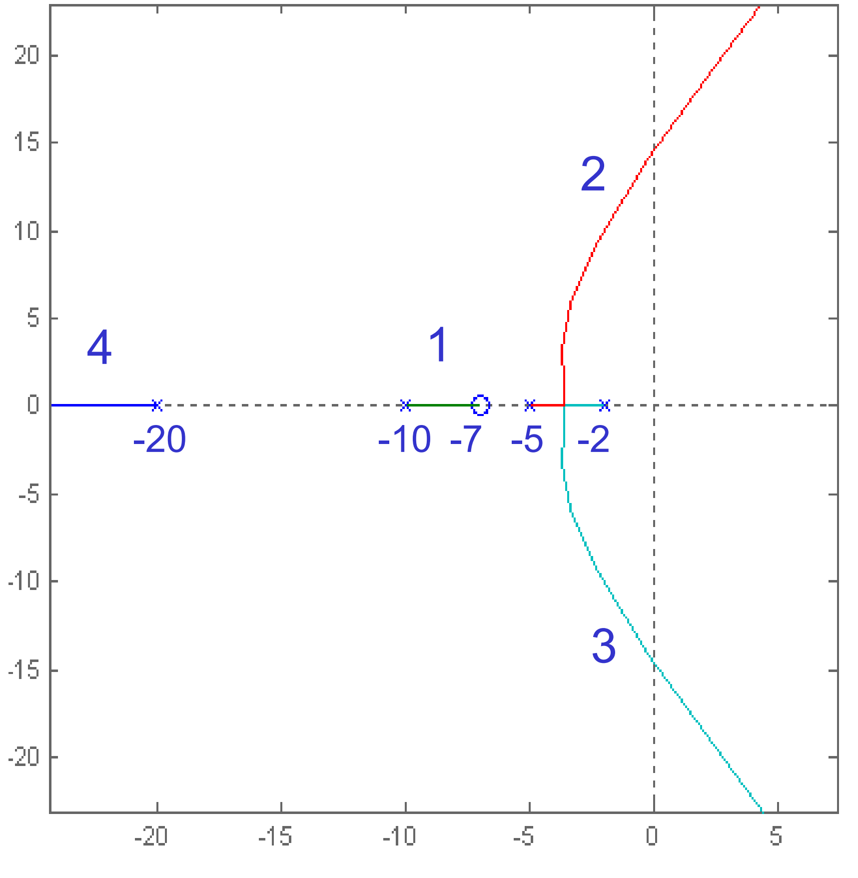


Función de transferencia en bucle abierto:

$$G(s)H(s) = \frac{(s+7)}{(s+2)(s+5)(s+10)(s+20)}$$

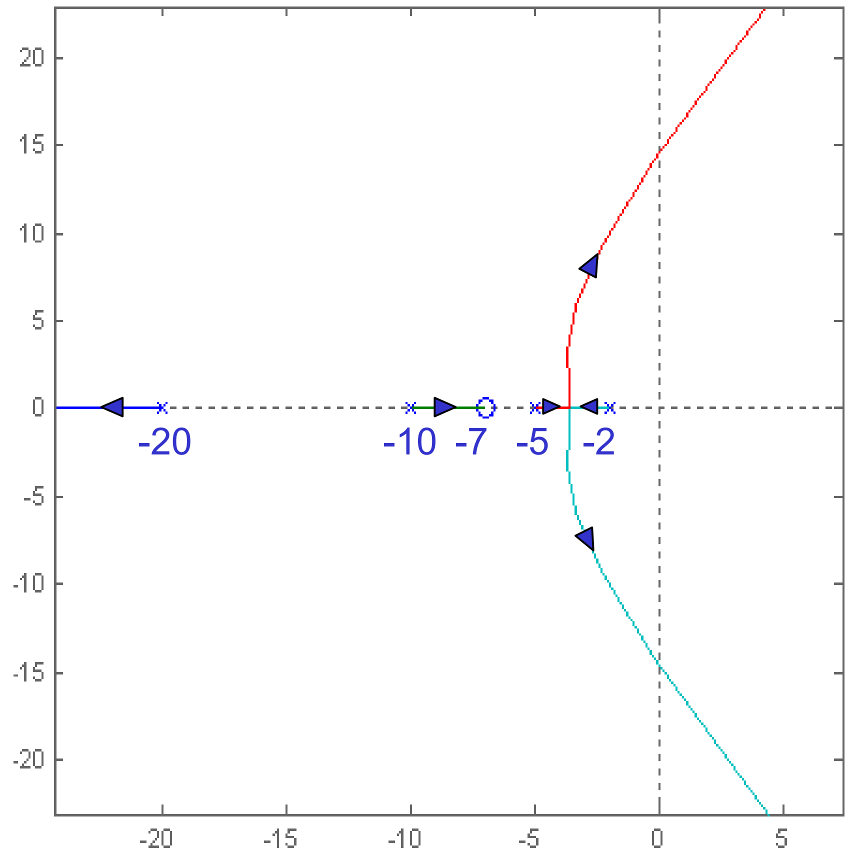
Número de ramas:

Dado que el número de polos es 4, habrá 4 ramas en el LR



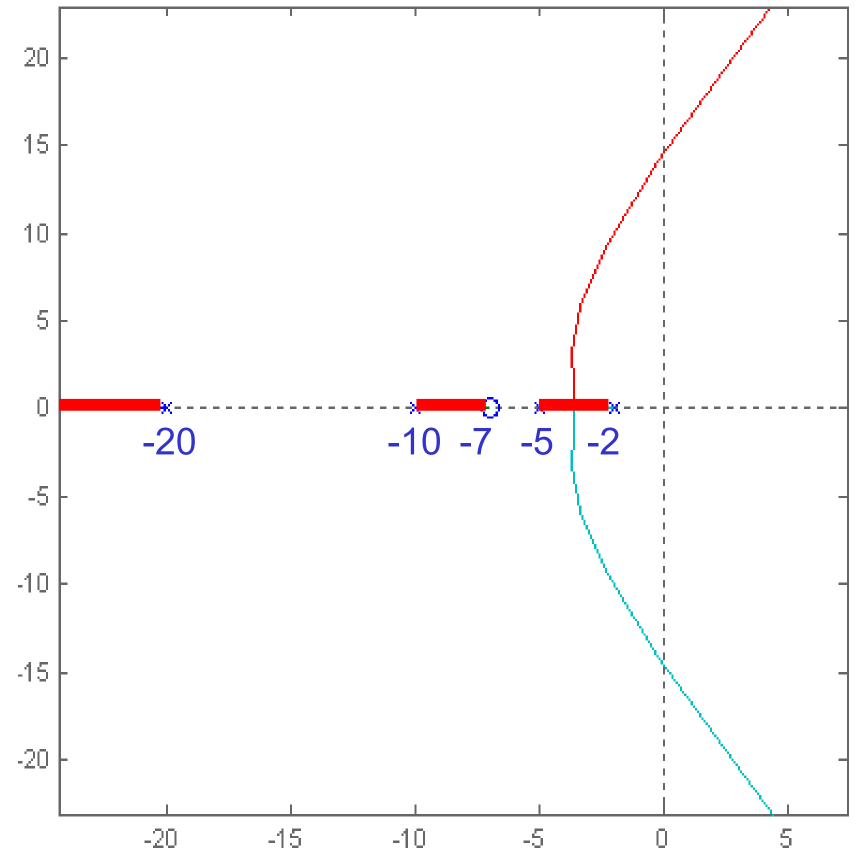
Comienzo y final del LR:

De acuerdo con las reglas 2a y 2b, el LR nace en los polos y muere en los m ceros y en $n - m$ ramas al infinito. En este caso nace en los 4 polos $s = \{-2, -5, -10, -20\}$ y muere en el cero $s = -7$ y en tres asíntotas.



Lugar en el eje real:

El lugar en el eje real serán aquellos tramos que dejen a la derecha un número impar de singularidades (ceros o polos), esto es, en los tramos



$$s \in [-5, -2]$$
$$s \in [-10, -7]$$
$$s \in [-\infty, -20]$$

Asíntotas:

Dado que $n - m = 3$ habrá tres asíntotas separadas 120^o hacia donde irán a parar tres de las ramas (las que no van al cero)

$$\theta = \frac{(2q+1)\pi}{3}, \quad q \in \mathbb{Z}$$

$$\theta = \{+60^o, -180^o, -60^o\}$$

Centroide:

$$\sigma_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{j=1}^{m} z_j}{n-m} = \frac{(-2-5-10-20)-(-7)}{4-1} = -10$$

Puntos de dispersión:

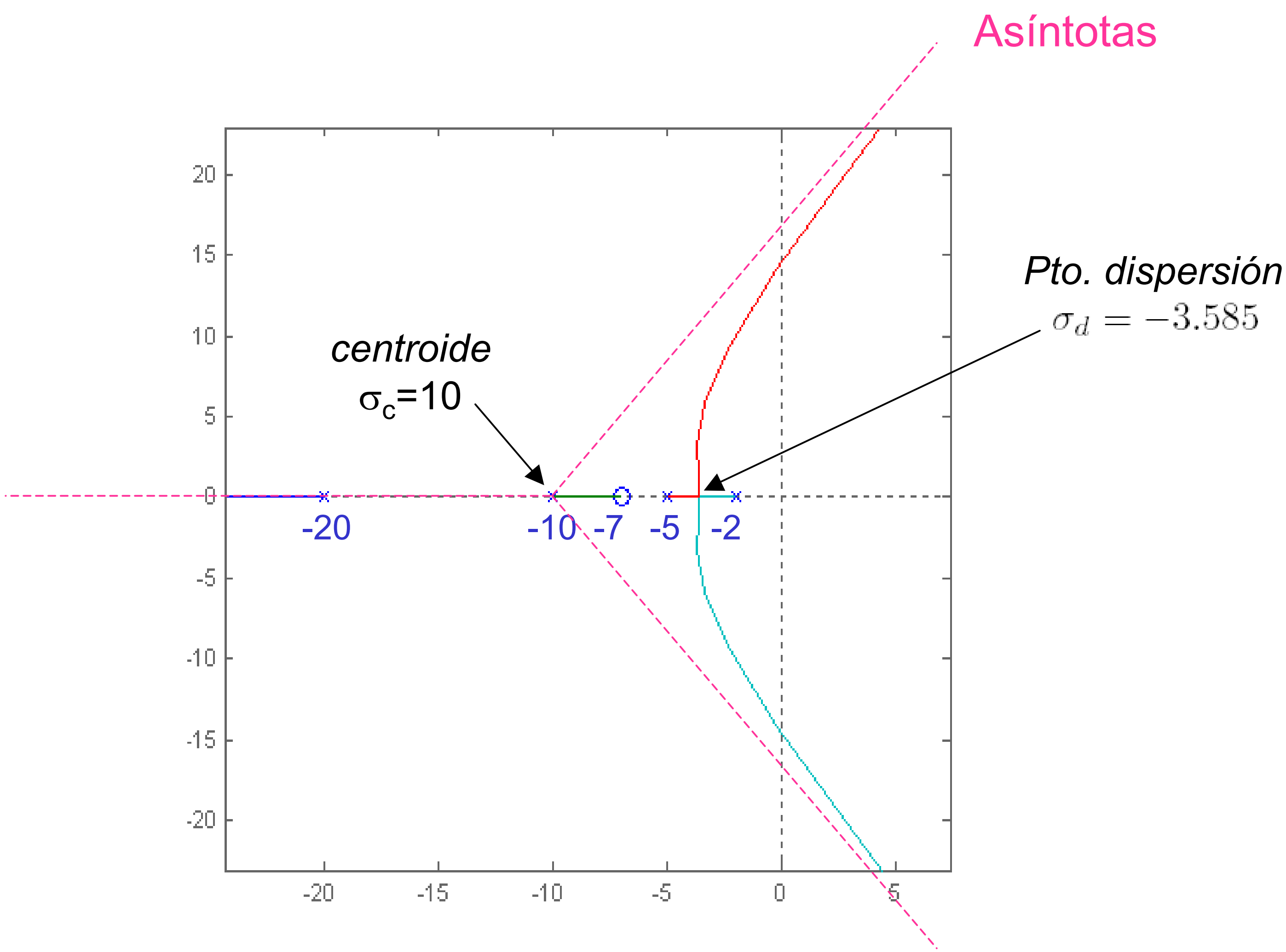
Puede hacerse haciendo $dK/ds = 0$ ó alternativamente resolviendo por iteración la siguiente expresión:

$$\frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+5} + \frac{1}{s+10} + \frac{1}{s+20} = \frac{1}{s+7}$$

Tanteando para valores reales de s da lugar a dos soluciones (reales) $s_1 = -3.585$ y $s_2 = -15.634$. Obviamente sólo la primera pertenece al lugar de las raíces y constituye, por tanto el punto de dispersión:

$$\sigma_d = -3.585$$

Centroide, Asíntotas y Punto de Dispersión



Puntos de corte con el eje imaginario:

Haciendo Routh en función de K para la ecuación característica:

$$(s+2)(s+5)(s+10)(s+20)+K(s+7)=$$
$$=s^4+37\,s^3+420\,s^2+1700\,s+Ks+2000+7\,K$$

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 420 & 2000+7\,K \\ 37 & 1700+K & 0 \\ \frac{13840}{37}-1/37\,K & 2000+7\,K & 0 \\ \frac{-20790000-2557\,K+K^2}{-13840+K} & 0 & 0 \\ 2000+7\,K & 0 & 0 \end{array}\right.$$

Puntos de corte con el eje imaginario:

- Para que la solución caiga en el eje imaginario, ha de aparecer ur fila entera de ceros.
- Resolviendo para que el elemento de la cuarta fila se anule tenemos:

$$K = \{6013.957976795909 - 3456.957976795909\}$$

- Obviamente, sólo nos vale la primera con lo cual

$$K = 6013.957976795909$$

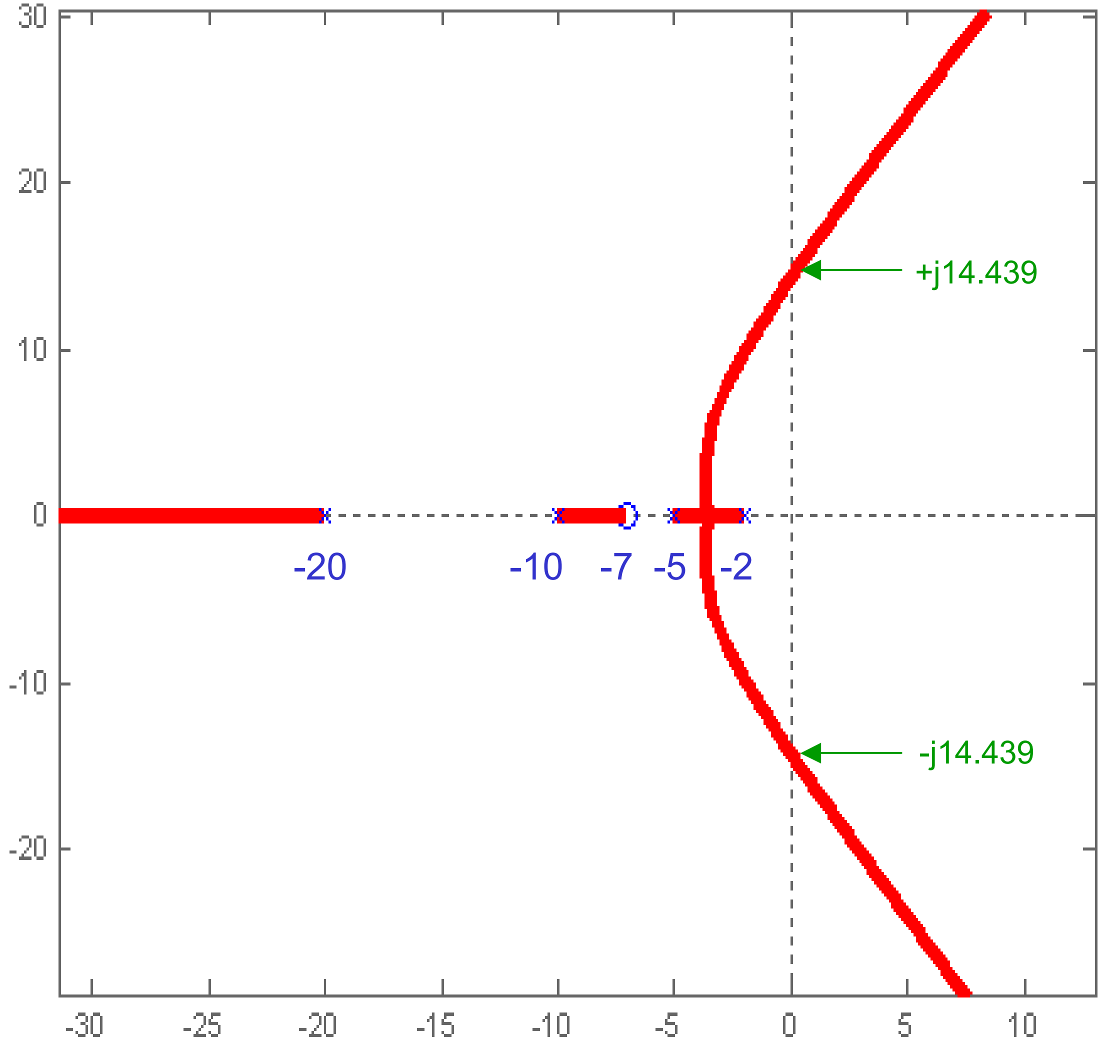
- Para dicho valor de K la ecuación auxiliar de la tercera fila será

$$37s^2 + 7713.96 = 0$$

de donde,

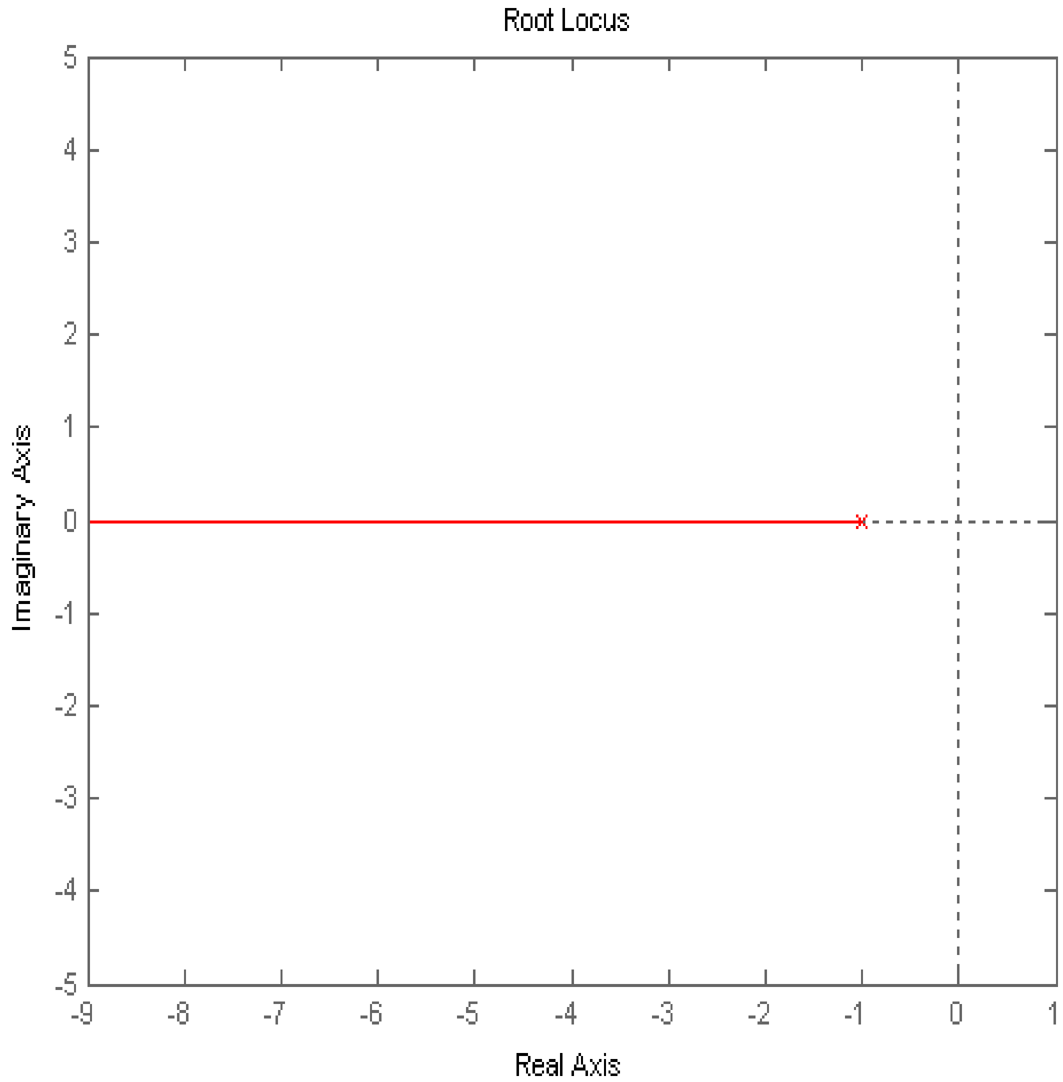
$$s = \pm 14.4390j$$

Lugar de las Raíces final

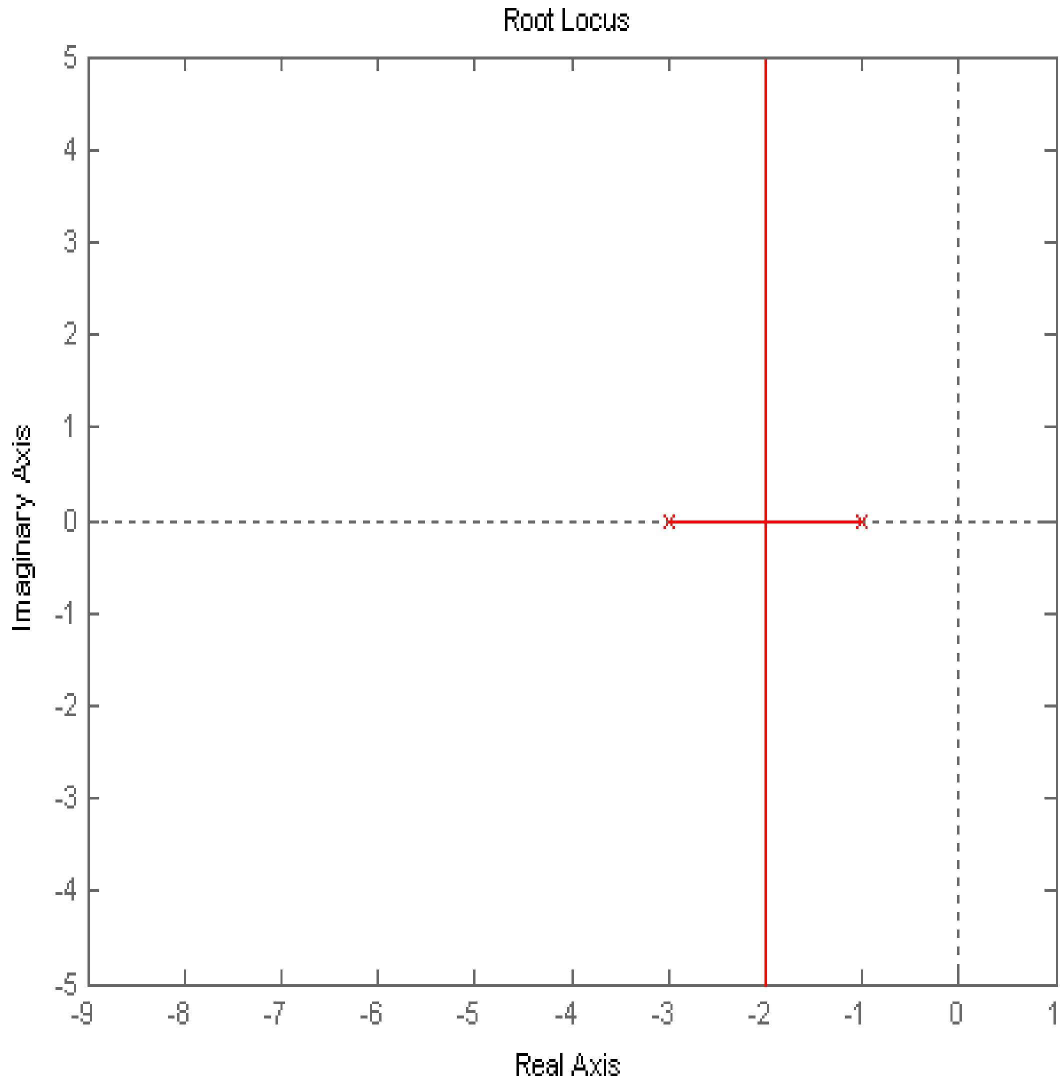


Lugares de las Raíces básicos

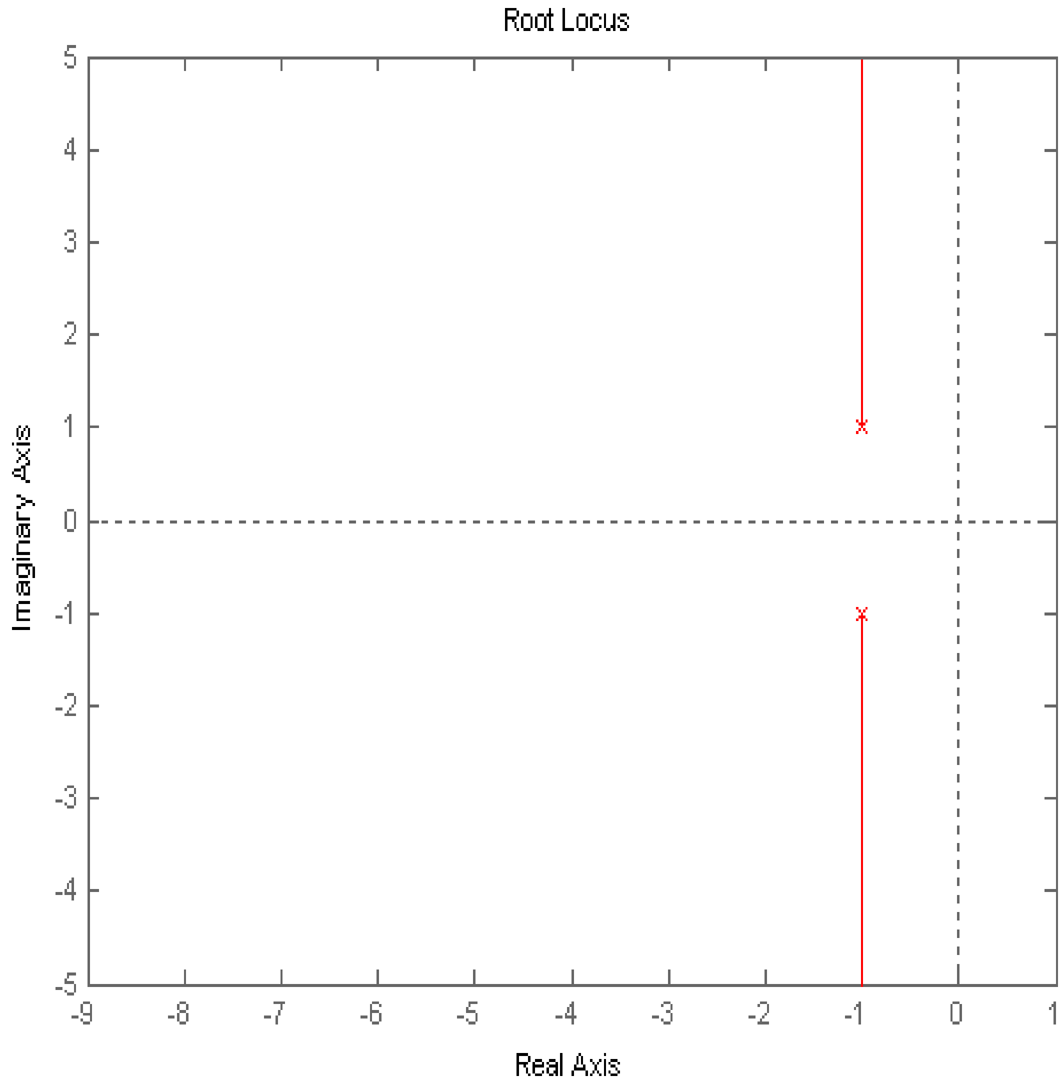
LR básicos: 1 polo real



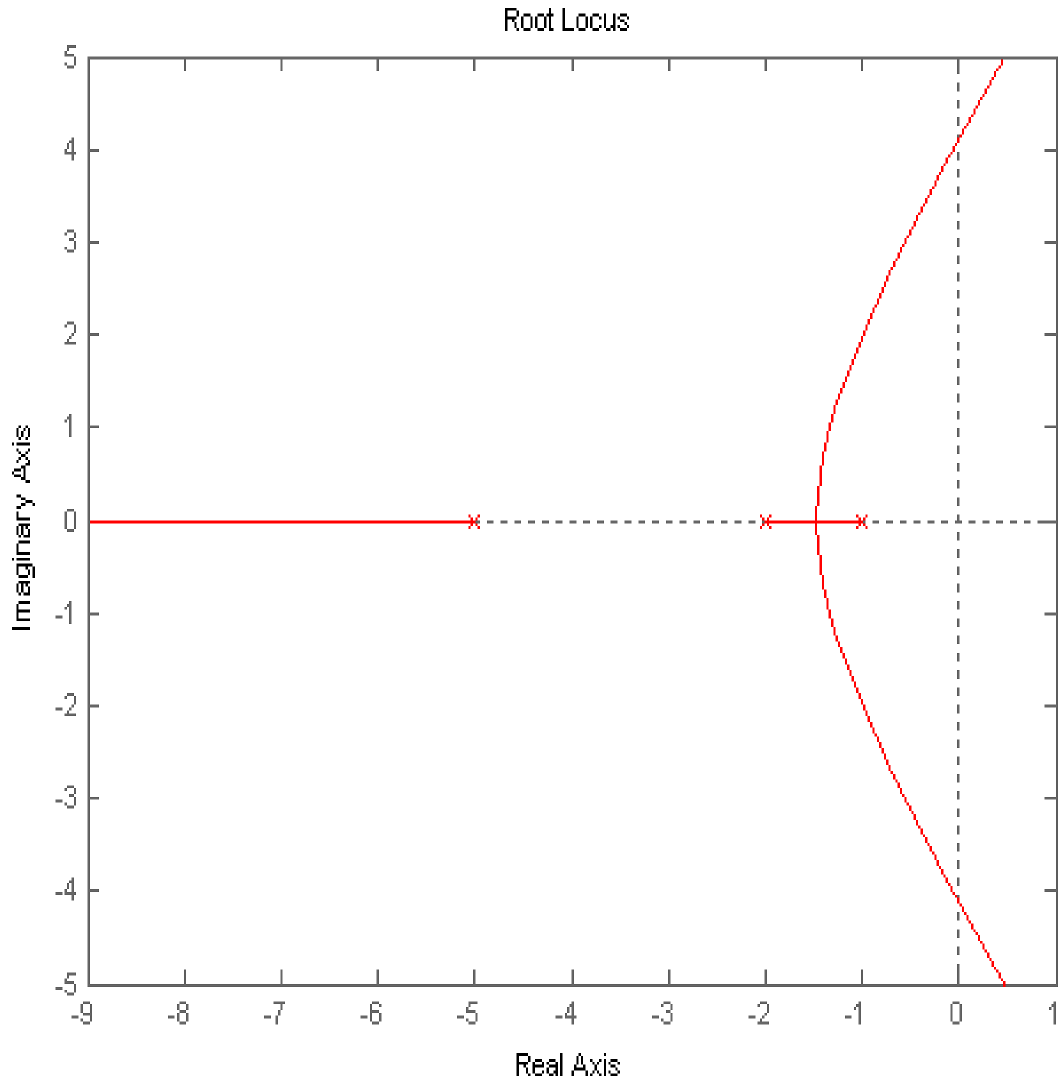
LR básicos: 2 polos reales



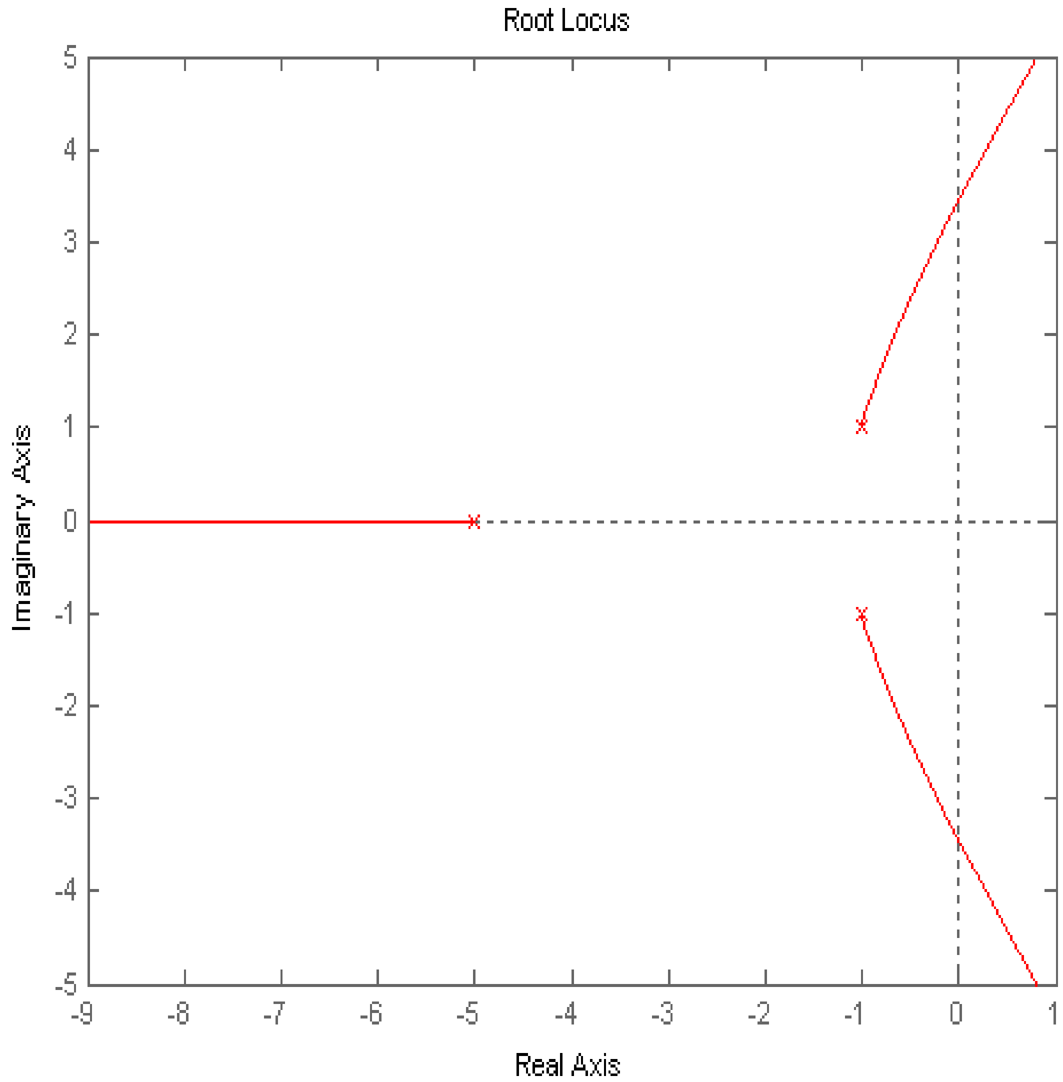
LR básicos: 2 polos complejos



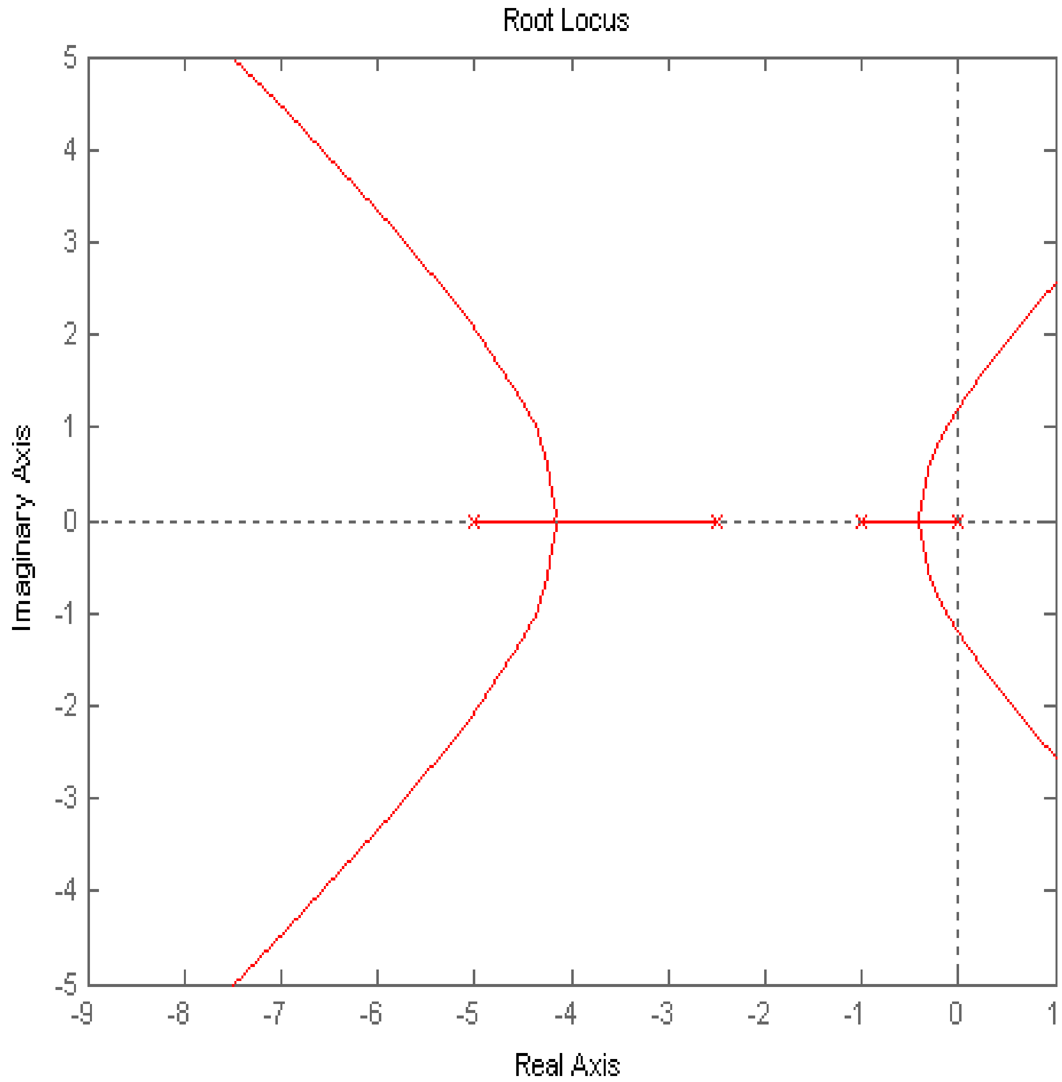
LR básicos: 3 polos reales



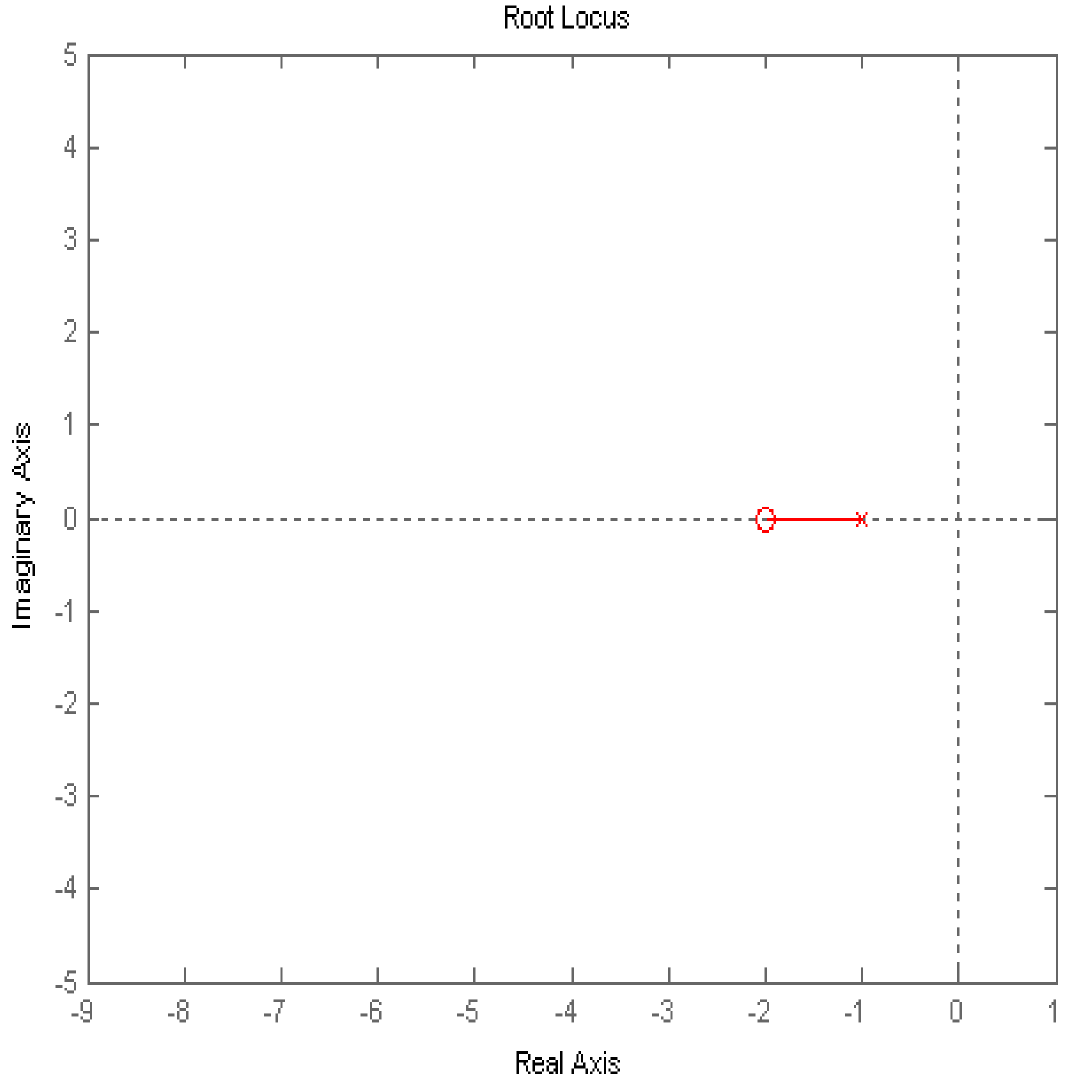
LR básicos: 3 polos (2 complejos + 1 real)



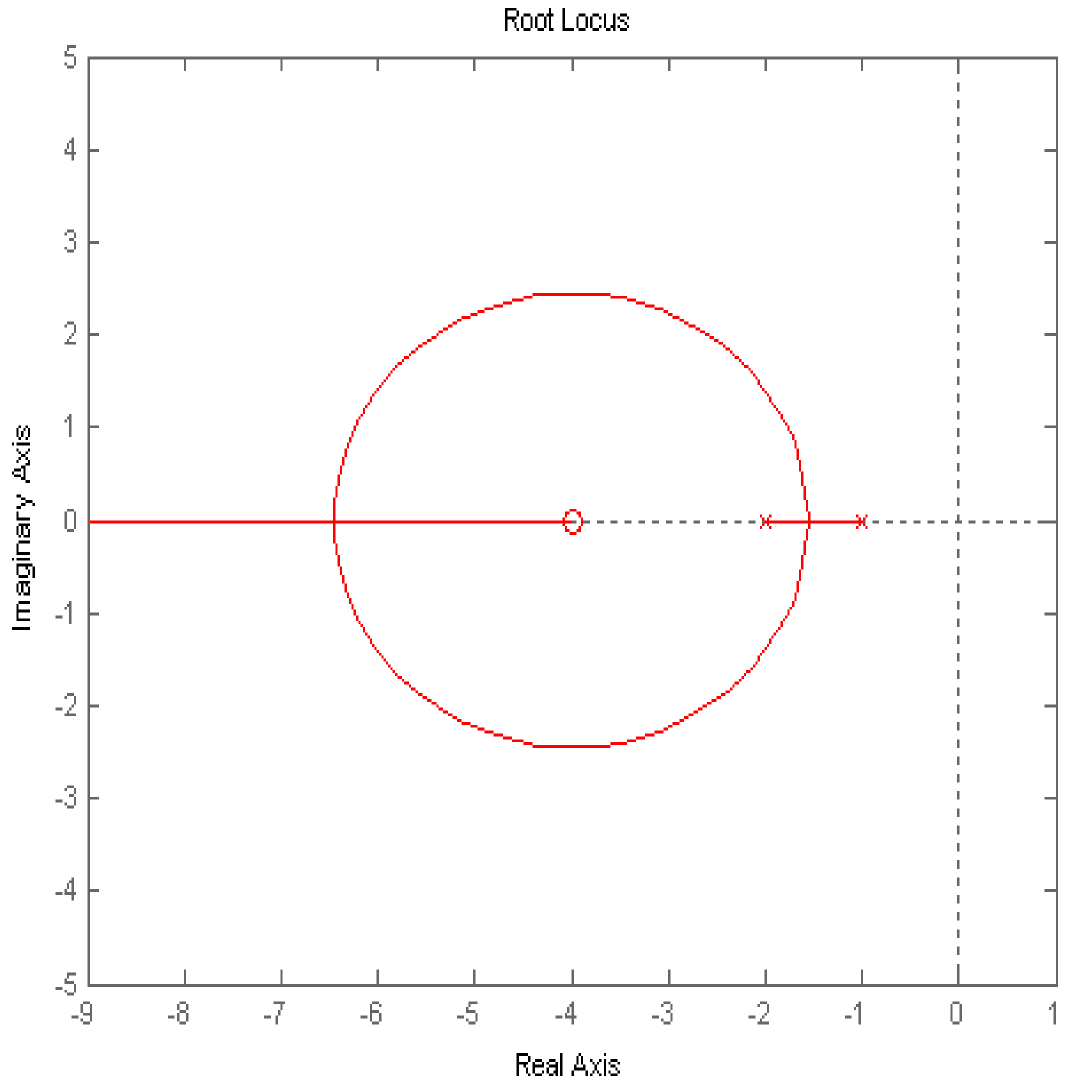
LR básicos: 4 polos



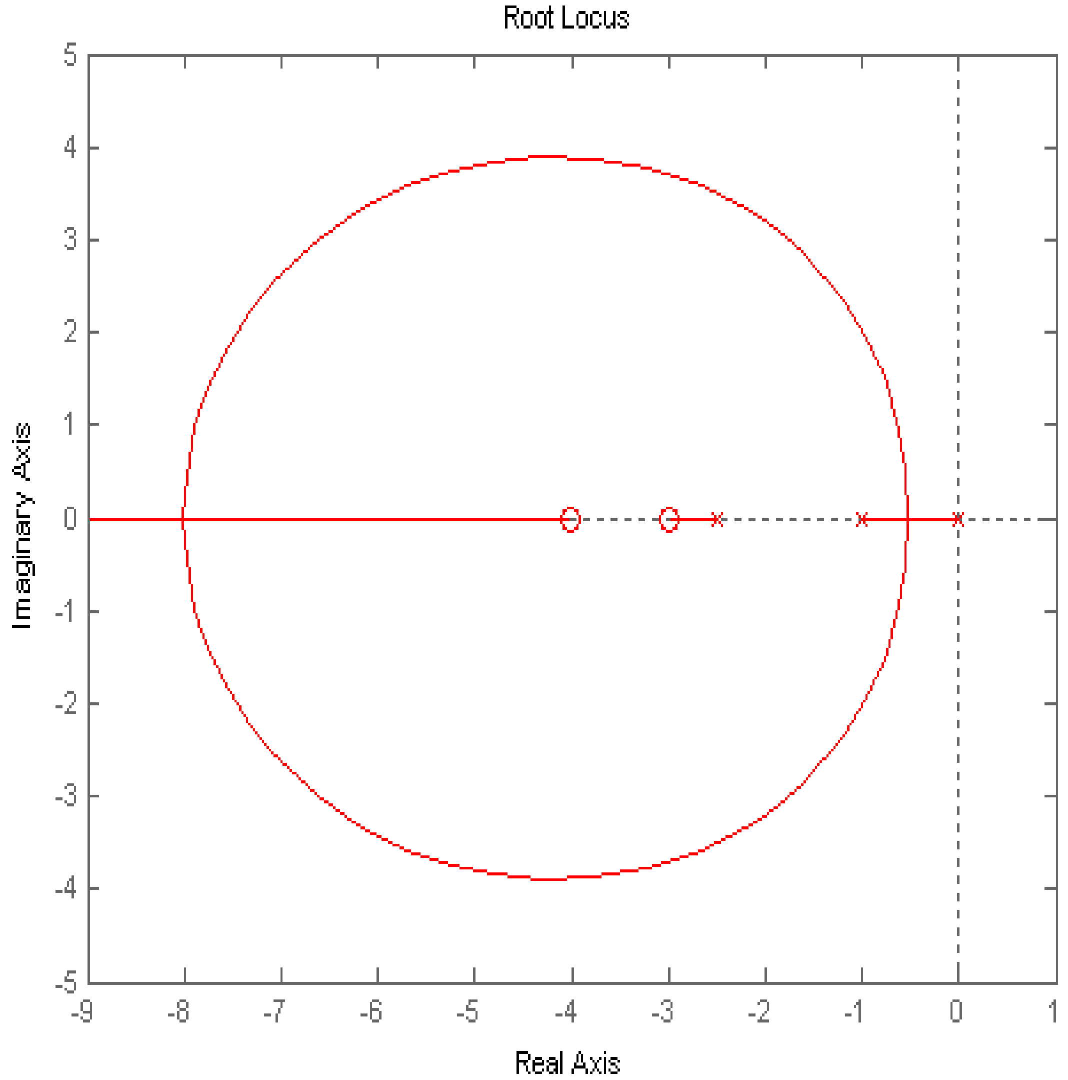
LR básicos: 1 polo + 1 cero



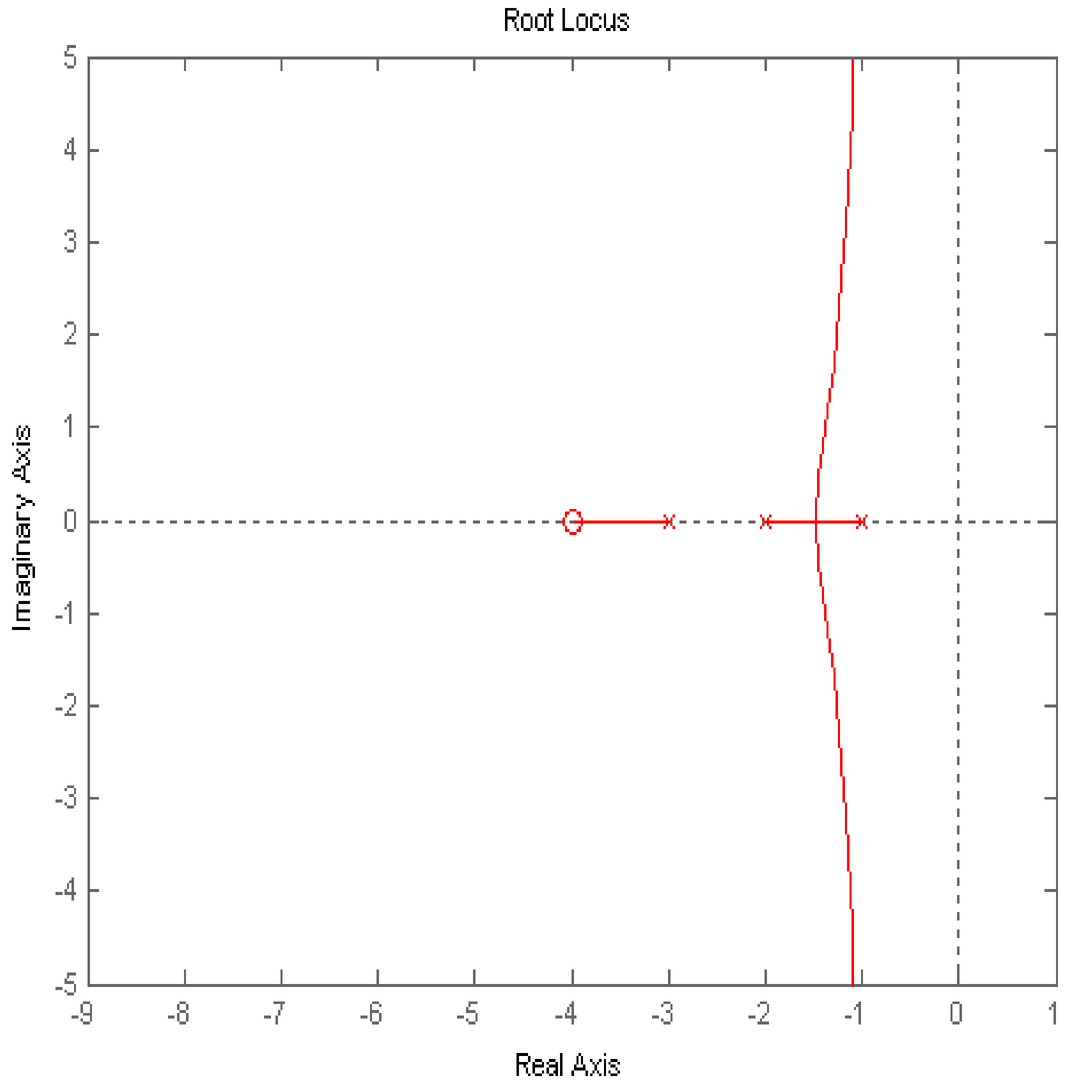
LR básicos: 2 polos + 1 cero



LR básicos: 3 polos + 2 ceros



LR básicos: 3 polos + 1 cero



Lugar Inverso de las Raíces $(K < 0)$

- La condición general, como en el caso de $K > 0$ es

$$K \cdot \frac{\prod_j (s - z_j)}{\prod_i (s - p_i)} = -1$$

aunque, como $K < 0$, el *criterio del argumento* se modifica

$$\sum_j^m \theta_{z_j} - \sum_i^n \theta_{p_i} = 2q\pi$$

El *criterio del módulo* sigue siendo el mismo

$$K = \frac{\prod_{i=1}^n |s - p_i|}{\prod_{j=1}^m |s - z_j|} = \frac{\prod_{i=1}^n d_{p_i}}{\prod_{j=1}^m d_{z_j}}$$

- La variación en el criterio del argumento repercute en algunas de las otras reglas:

  a) *Lugar en el eje real*: pertenecen al LR los puntos del eje real que dejan a la derecha un número par de singularidades-

  b) *Asíntotas del lugar*:

$$\sum_{j}^{m} \theta - \sum_{i}^{n} \theta = 2q\pi$$

  c) *Ángulos de arranque de polos y llegada de ceros*:

$$\begin{aligned}
\theta_{p_k} &= +\sum_{j\neq k}^{m} \arg\{p_k - z_j\} - \sum_{i\neq k}^{n} \arg\{p_k - p_i\} - 2q\pi \\
\theta_{z_k} &= -\sum_{j\neq k}^{m} \arg\{z_k - z_j\} + \sum_{i\neq k}^{n} \arg\{z_k - p_i\} - 2q\pi
\end{aligned}$$

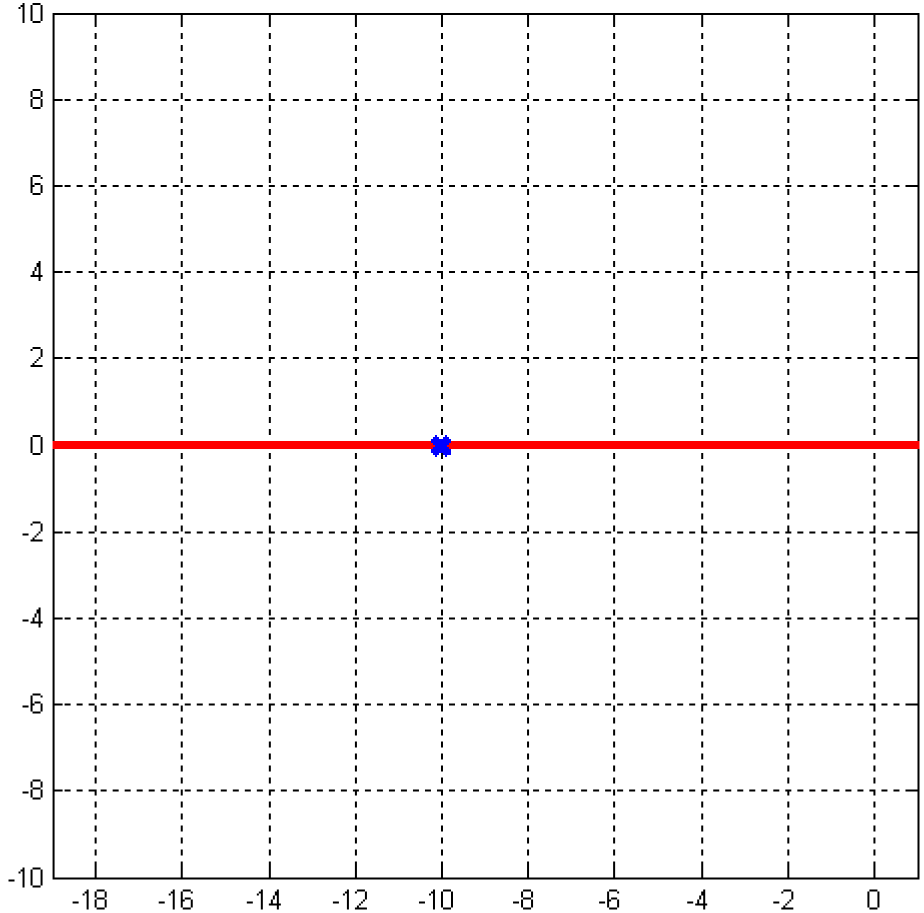
- Con el trazado del LR y del LR inverso tenemos un conjunto de curvas que describen la localización de *todas* las posibles soluciones de $1 + G(s)H(s) = 0$

- Ahora *nacen dos ramas de cada polo*: una rama del LR parte de cada cero en una dirección para $K > 0$ y otra rama en otra dirección para $K < 0$

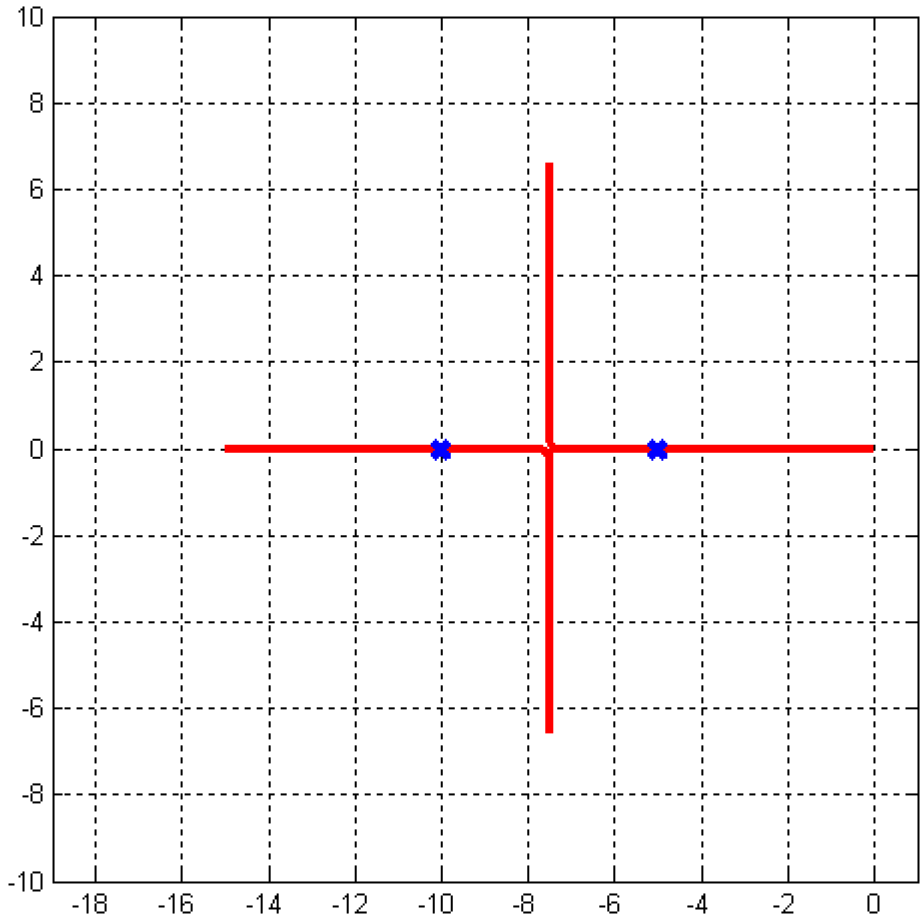
- Análogamente, *llegan dos ramas a cada cero*: una rama llega a cada cero para $K > 0$ y otra llega en otra dirección para $K < 0$

- Habrá $2(n - m)$ asíntotas: las $n - m$ del LR inverso estarán a 180^o del las $n - m$ del lugar directo

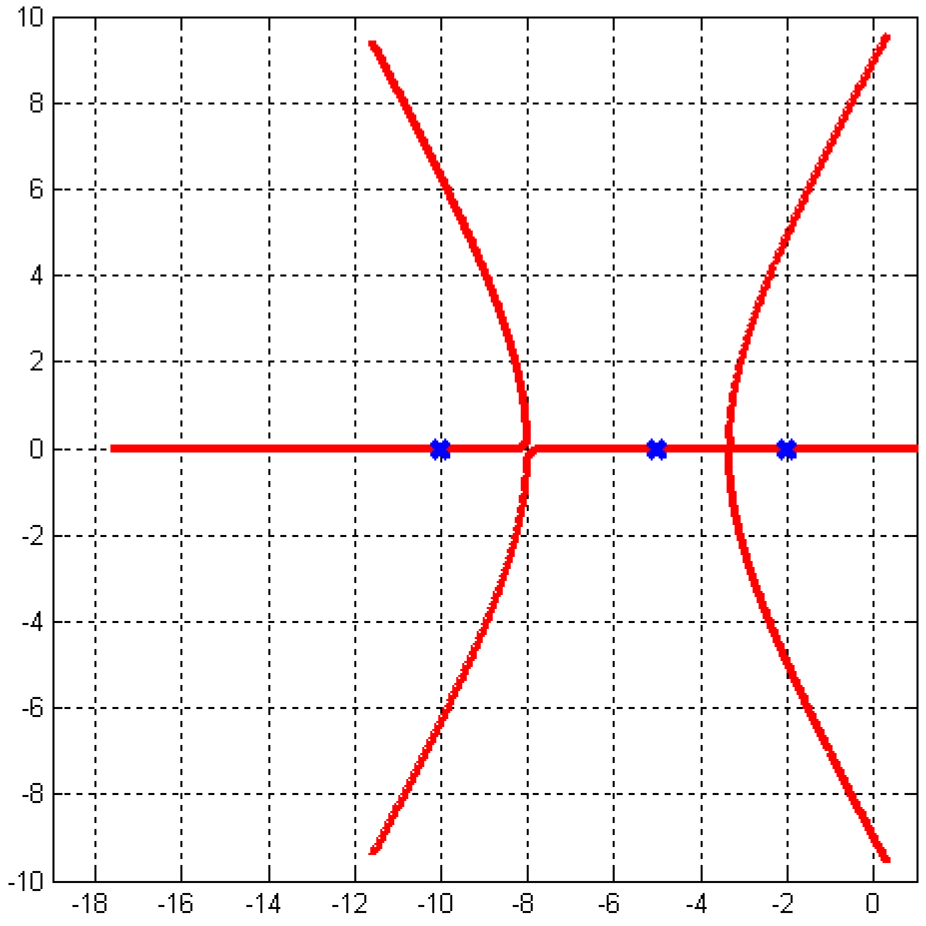
LR-i básicos: 1 polo



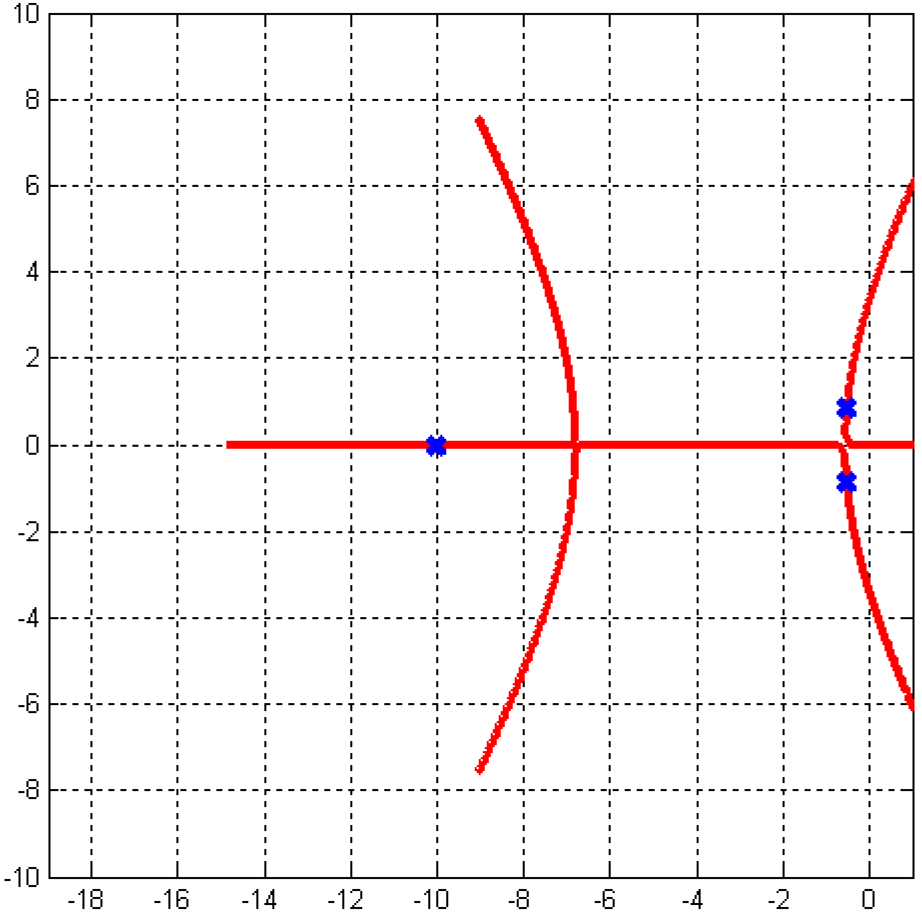
LR-i básicos: 2 polos reales



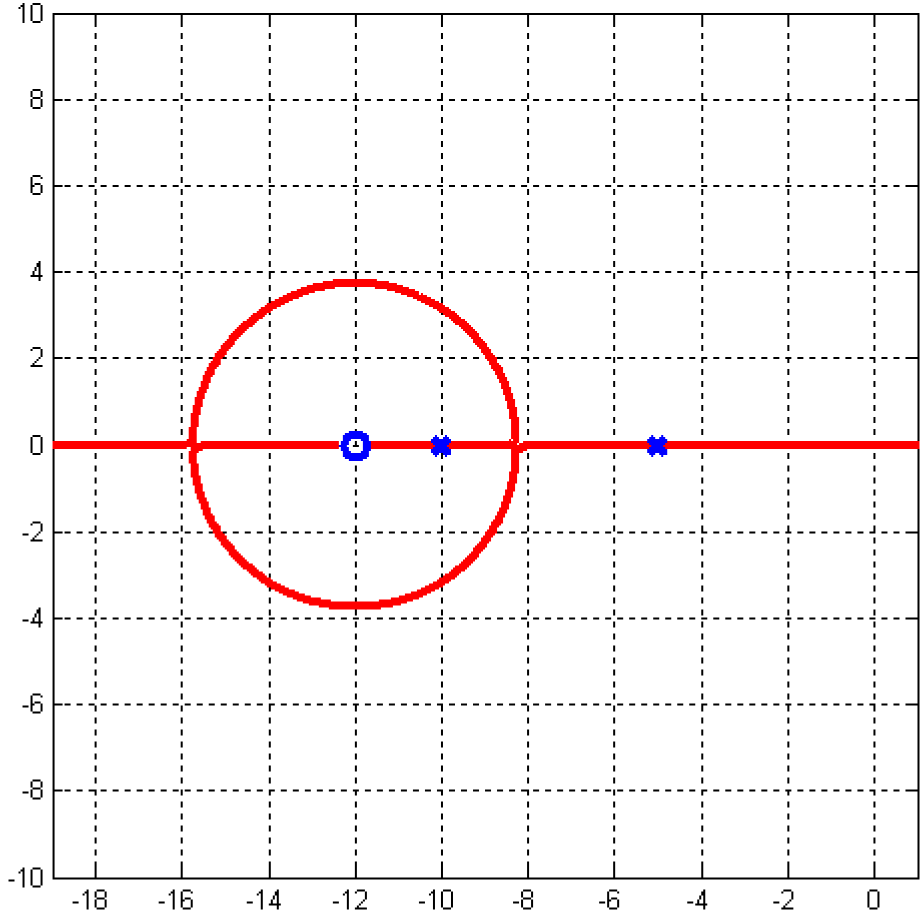
LR-i básicos: 3 polos reales



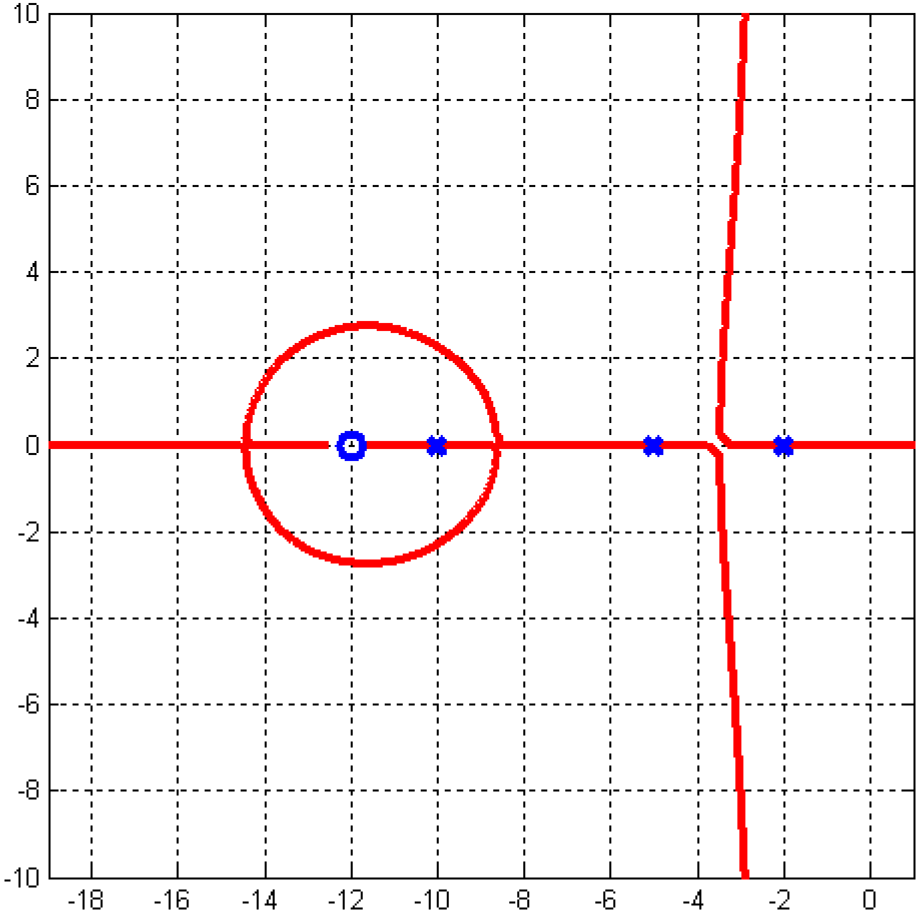
LR-i básicos: 1 polo real + 2 polos complejos



LR-i básicos: 2 polos reales + 1 cero



LR-i básicos: 3 polos reales + 1 cero



Contorno de las raíces

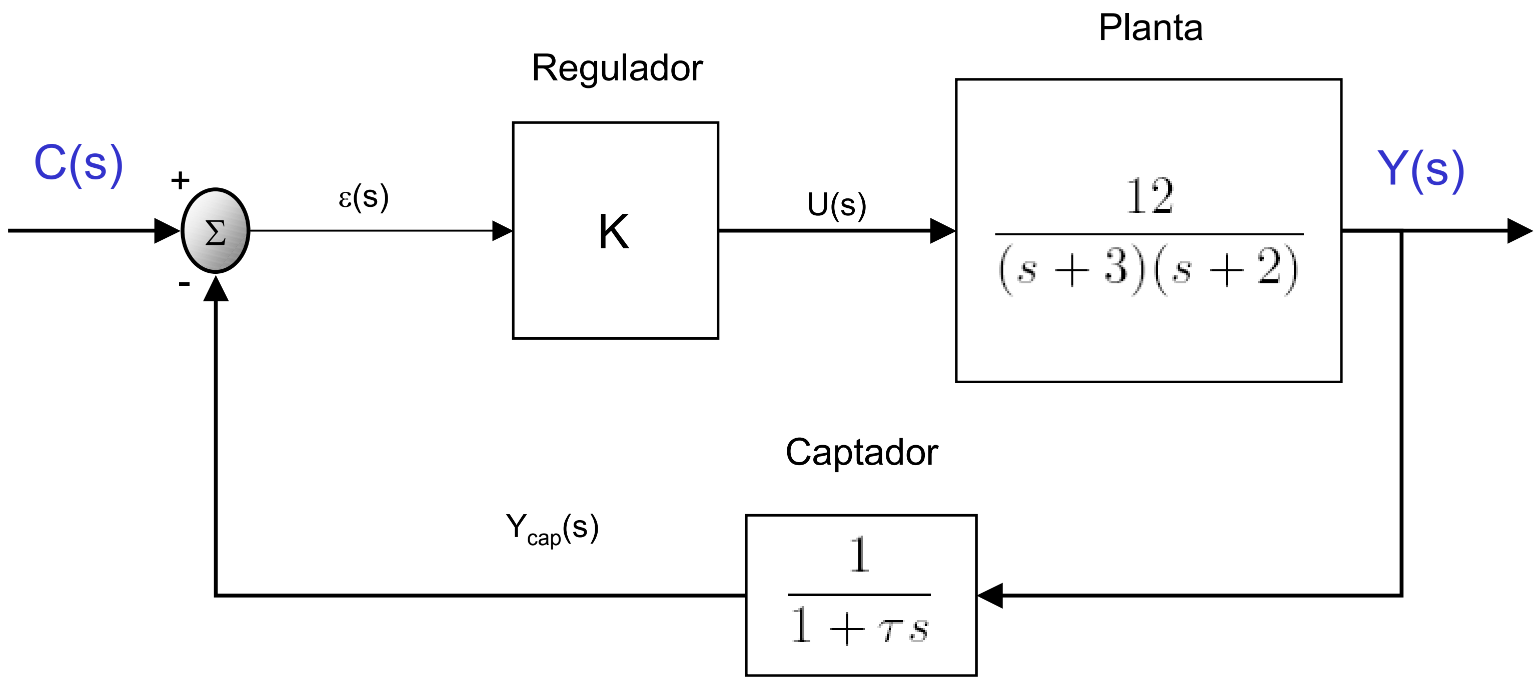
- El LR es muy versátil si podemos expresar un problema dado en términos de una ecuación del tipo

$$1 + a\frac{N(s)}{D(s)} = 0$$

o bien,

$$D(s) + a \cdot N(s) = 0$$

Ejemplo de contorno de las raíces



Determinar el comportamiento del sistema realimentado en función de la constante de tiempo, τ, del captador para K=1

Solución:

$$GH(s) = \frac{12}{(s+2)(s+3)(1+\tau s)}$$

La ecuación característica será:

$$(s+2)(s+3)(1+\tau s) + 12 = 0$$

Reordenando términos…

$$(s+2)(s+3) + (s+2)(s+3)\tau s + 12 = 0$$

$$[(s+2)(s+3) + 12] + (s+2)(s+3)\tau s = 0$$

El problema queda planteado en términos de un LR:

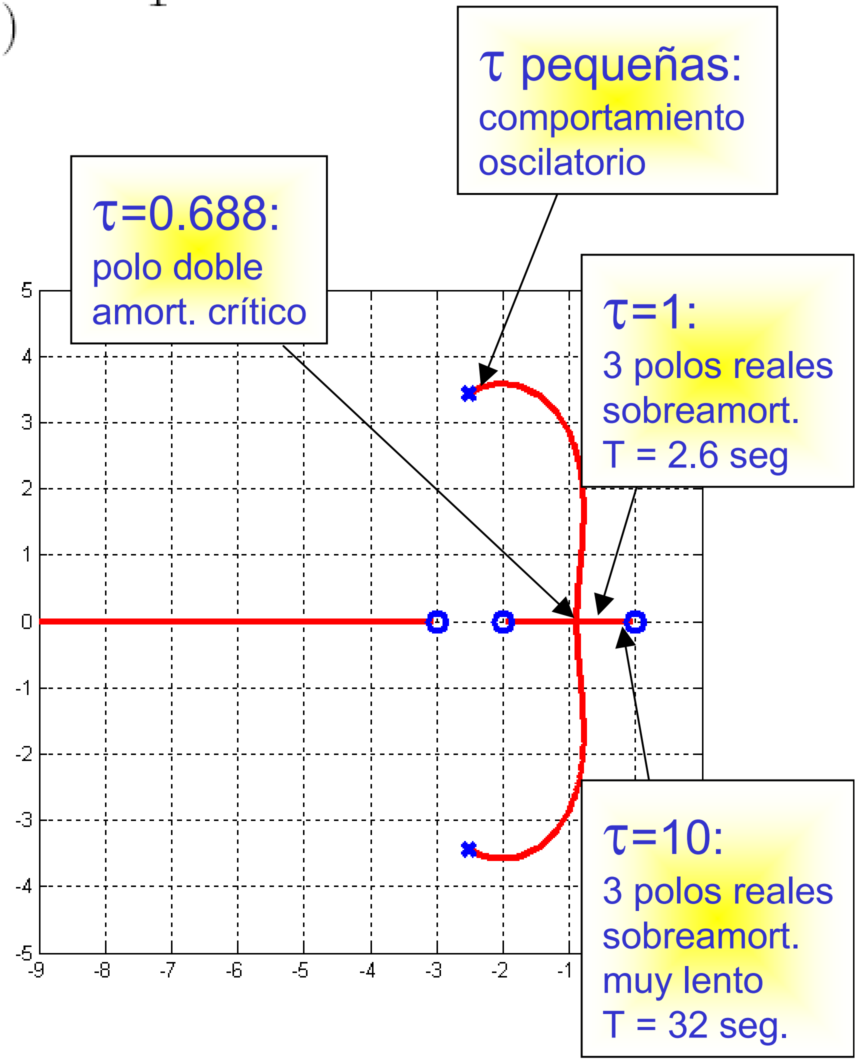
$$\tau \frac{s(s+3)(s+2)}{(s^2+5s+18)} = -1$$

El LR tiene 3 ceros…

$$z_j = \{0, -3, -2\}$$

… y dos polos

$$p_i = -2.5000 \pm 3.428j$$



Conclusión

Vemos cómo un captador lento influye negativamente en el comportamiento del lazo ralentizándolo