Respuesta dinámica

Ignacio Díaz Blanco

Master en Ingeniería Mecatrónica / EU4M. Escuela Politécnica de Ingeniería de Gijón (EPI Gijón)

Universidad de Oviedo

Contenidos

- Linealidad y Superposición
- Noción de Convolución (demostración gráfica)
- Función de Transferencia
- Transformada de Laplace y propiedades
- Cálculo de antitransformadas
- Modos transitorios

Linealidad y Superposición

Un sistema es ***lineal*** si y solo si verifica el principio de ***superposición***:

si

$$u_1(t) \longrightarrow y_1(t)$$

$$u_2(t) \longrightarrow y_2(t)$$

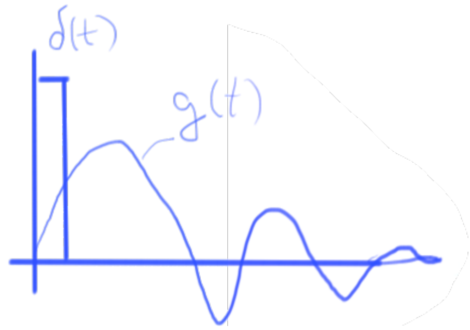
entonces

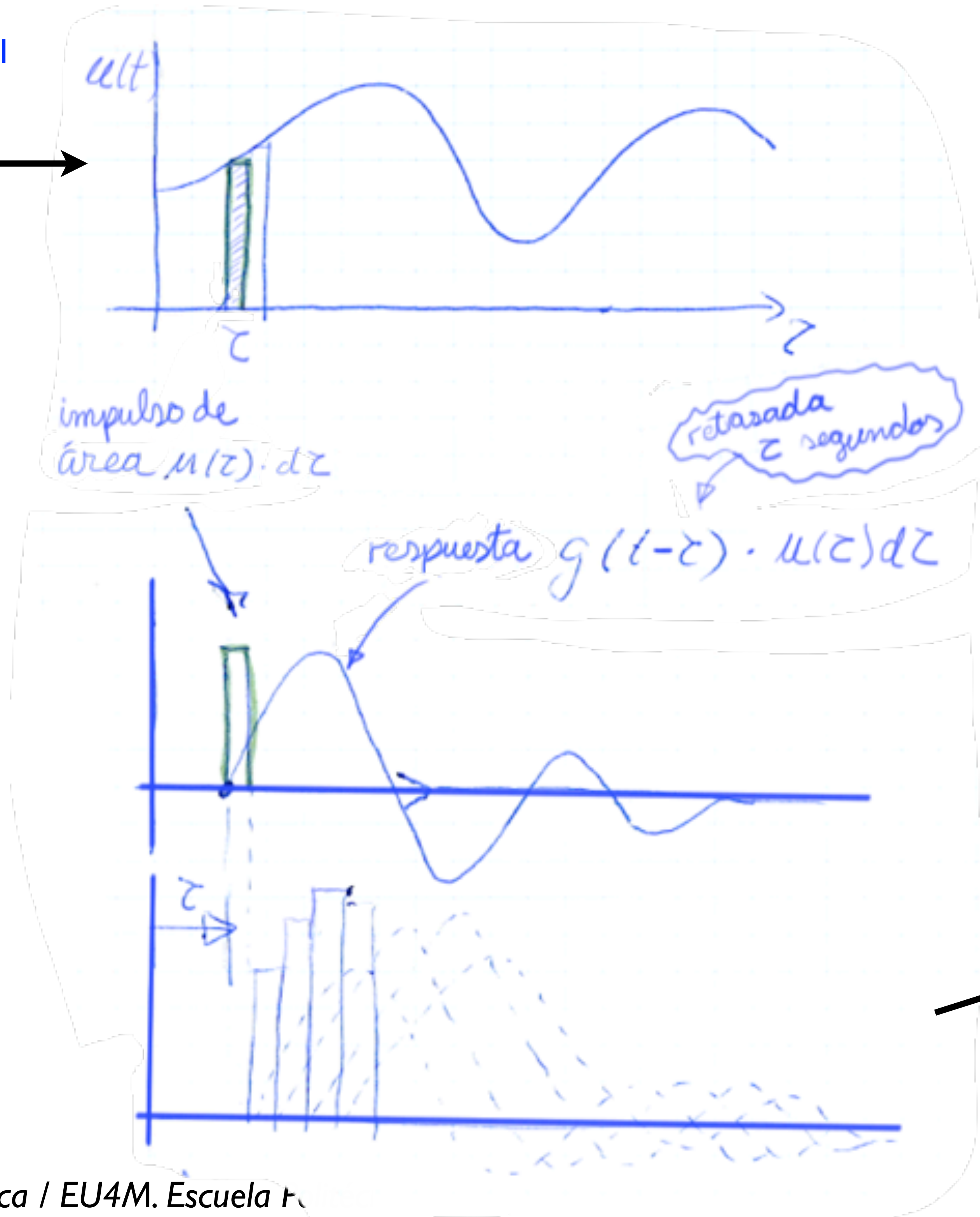
$$\alpha u_1(t) + \beta u_2(t) \longrightarrow \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$$

$$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Noción de Convolución

Respuesta ante un impulso de área 1





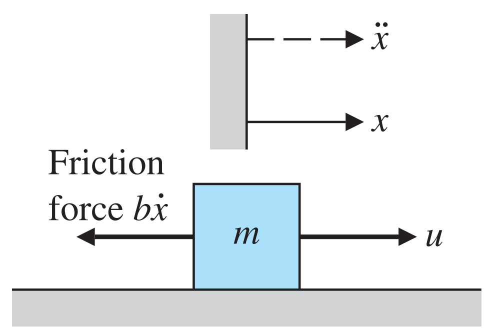
$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

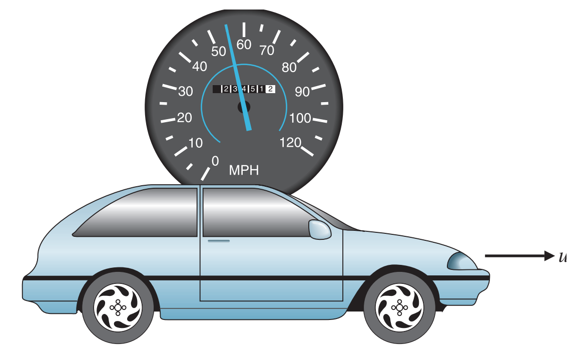
Sumando
todas las contribuciones

Concepto de Función de Transferencia

Modelo dinámico (E.D.) del movimiento:

$$\dot{v} + \frac{b}{m}v = \frac{u}{m}$$





Ejemplo: modelo de control de velocidad de crucero (Ejemplo 2.1 de Franklin)

Si suponemos una solución particular

$$\begin{aligned} u &= U_0 e^{st} \\ v &= V_0 e^{st} \end{aligned}$$

Derivando tenemos que

$$\dot{v} = sV_0 e^{st}$$

Sustituyendo

$$\left(s + \frac{b}{m}\right) V_0 e^{st} = \frac{1}{m} U_0 e^{st}$$

Ganancia salida/entrada

para una entrada "genérica"
de tipo
exponencial (compleja)

$$\frac{V_0}{U_0} = \frac{1/m}{s + b/m}$$

Concepto de Función de Transferencia

Noción de ganancia compleja

$$u(t) = e^{st}$$

$$\begin{aligned} y(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau &= \int_0^t g(\tau)u(t-\tau)d\tau \\ &= \int_0^t g(t-\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau \\ &= \int_0^t g(\tau)e^{st}e^{-s\tau}d\tau \\ &= e^{st}\int_0^t g(\tau)e^{-s\tau}d\tau \\ &= H(s)e^{st} \end{aligned}$$

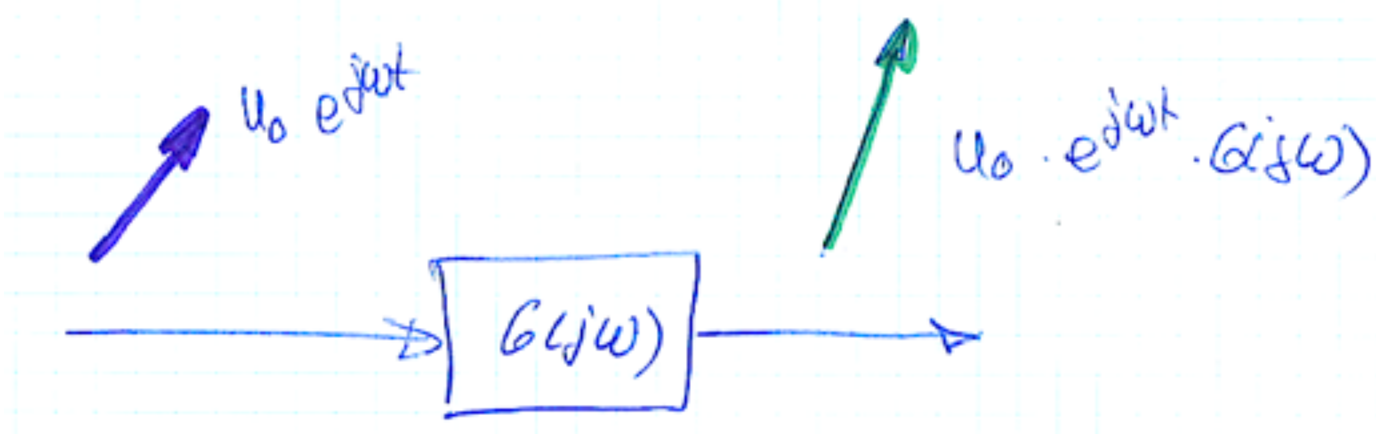
Ganancia Compleja

escala y gira
es decir
modifica amplitud y fase

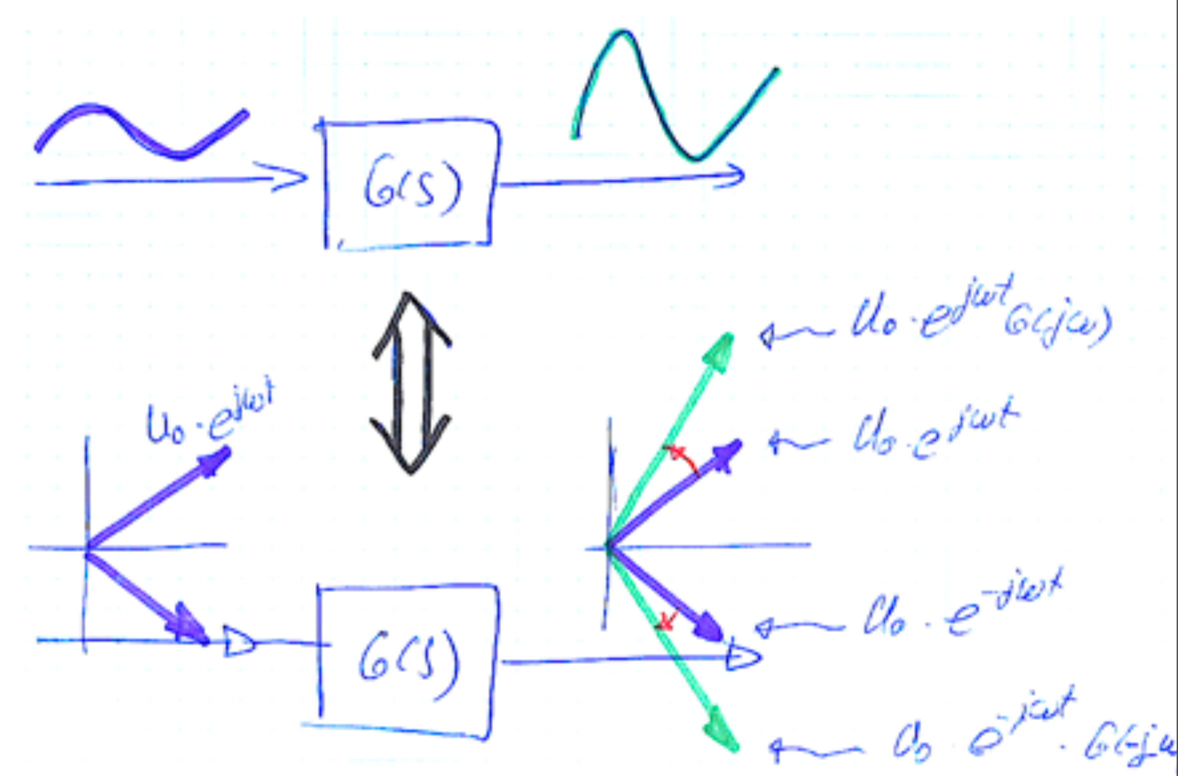
$$u(t) = e^{st} \quad \rightarrow \quad y(t) = H(s)e^{st}$$

Concepto de Función de Transferencia

Senoides complejas ($s=j\omega$)

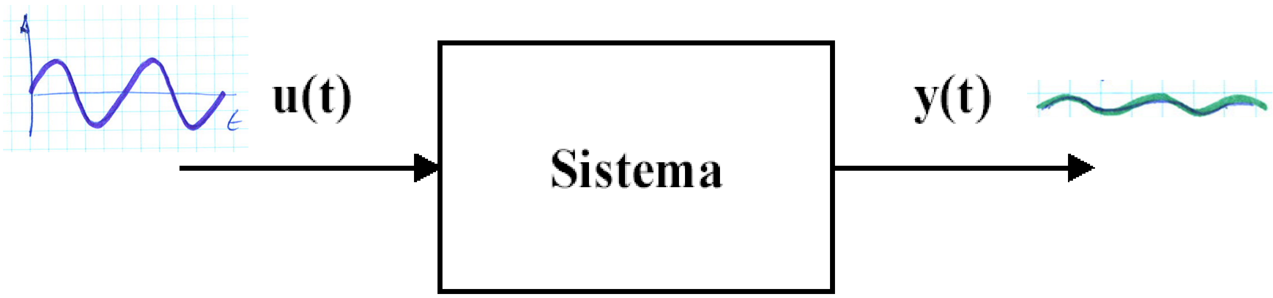


Senoides reales



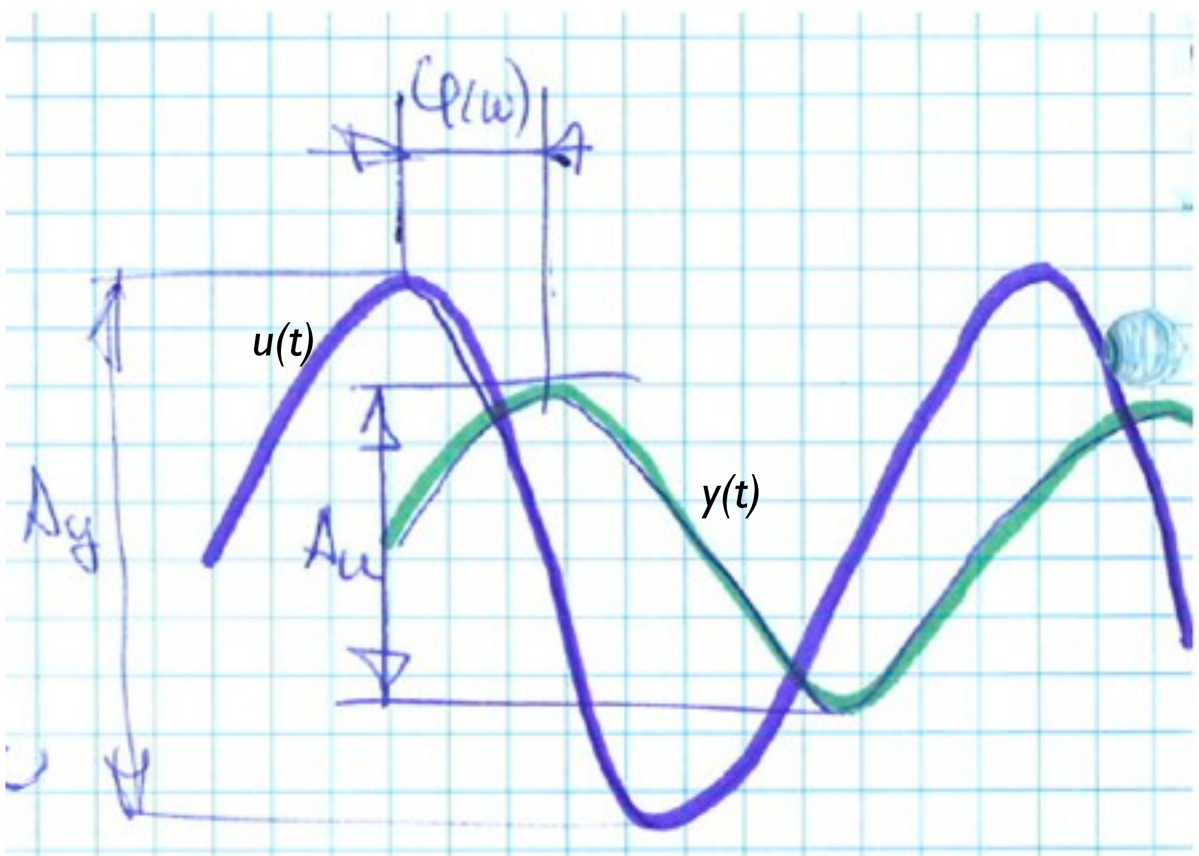
Material relacionado:
Sección 3.1.2 de Franklin
Ejemplos 3.3 y 3.4 de Franklin

Respuesta en Frecuencia



Las ganancias y desfases
que produce el sistema
cambian con la frecuencia

Podemos representarlas gráficamente



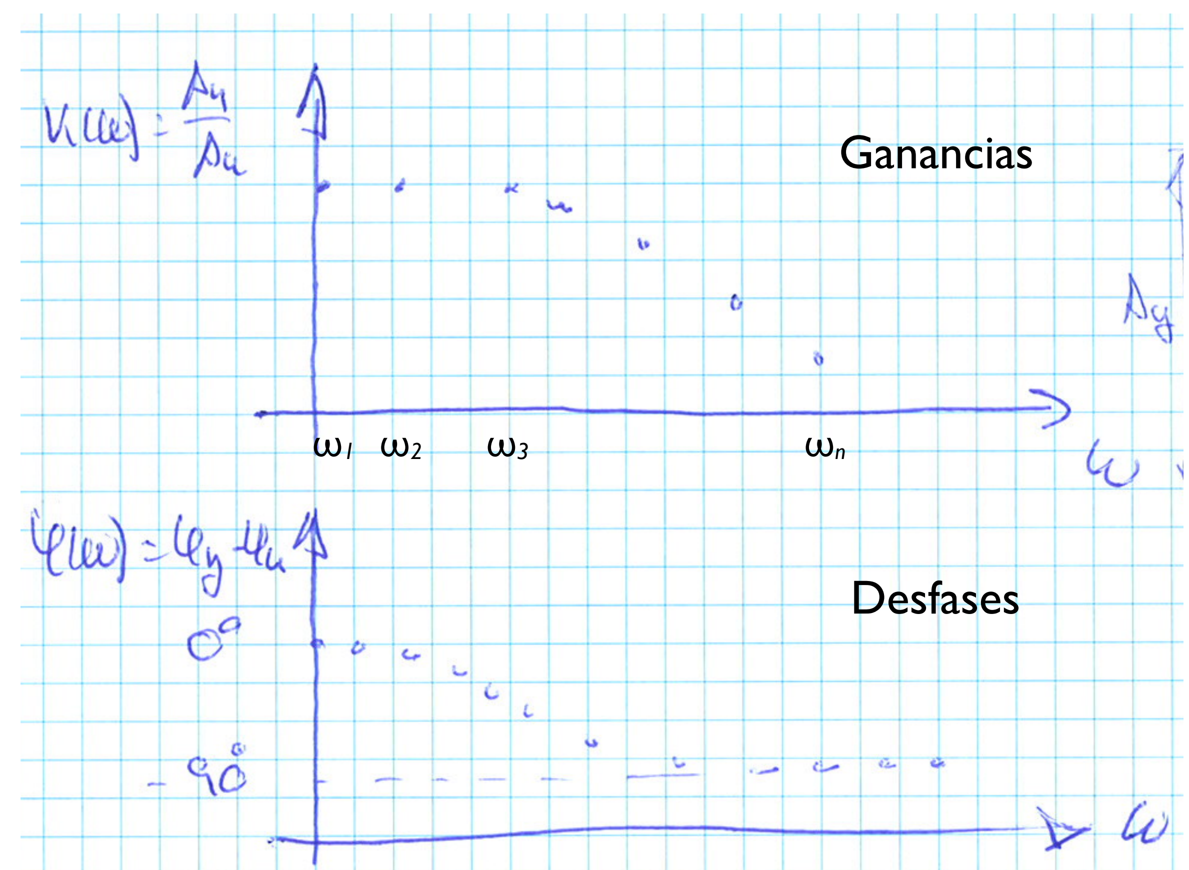
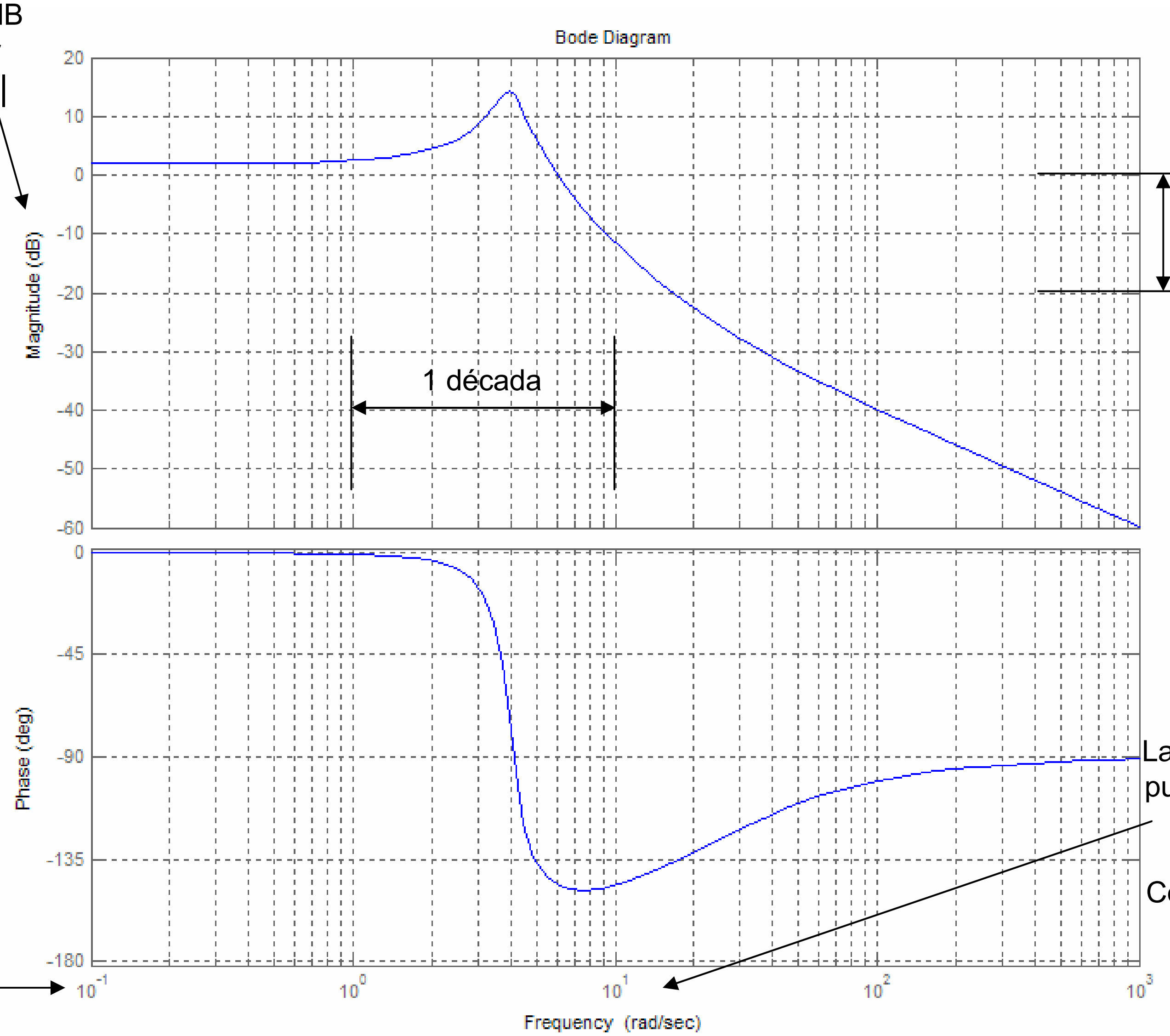


Diagrama de Bode

La ganancia en dB
Viene dada por
$20 \cdot \log_{10}|A_y/A_u|$



Bajar/subir 20 dB equivale a dividir/multiplicar por 10

La escala de frecuencias pueden venir en Hz o en rads/seg (pulsación).

Como trabajamos con w emplearemos rads/s

Eje logarítmico de frecuencias

Transformada de Laplace

- La linealización nos lleva a una EDL de coeficientes constantes

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_0 u + b_1 \frac{du}{dt} + \cdots + b_m \frac{d^m u}{dt^m}$$

- La transformada de Laplace convierte EDL-CC en un problema polinómico

- Definición:

$$\begin{aligned} f(t) \quad &\rightarrow \quad F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt \\ F(s) \quad &\rightarrow \quad f(t) = \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(s) e^{st} ds \end{aligned}$$

Transformaciones típicas

- Escalón

$$u(t) = \begin{cases} 1, t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{cases} \rightarrow U(s) = \int_0^\infty 1 \cdot e^{-st} = \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^\infty = \frac{1}{s}$$

- Rampa

$$r(t) = \begin{cases} 1, t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{cases} \rightarrow R(s) = \frac{1}{s^2}$$

- Exponencial

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\sigma t}, t \geq 0 \\ 0, \quad\quad t < 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow F(s) = \int_0^\infty e^{-\sigma t} \cdot e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{-(\sigma + s)t} dt = \left[-\frac{1}{s+\sigma} e^{-(s+\sigma)t} \right]_0^\infty = \frac{1}{s+\sigma}$$

- Seno

$$f(t) = \sin(\omega t) \rightarrow F(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Propiedades

- Linealidad

$$\mathcal{L}(\alpha f(t) + \beta g(t)) = \alpha\mathcal{L}(f(t)) + \beta\mathcal{L}(g(t))$$

- Desplazamiento en s

$$F(s+\alpha) = \mathcal{L}(e^{-\alpha t} f(t))$$

- Desplazamiento en el tiempo

$$\mathcal{L}[f(t-T)u(t-T)] = e^{-sT}F(s), \qquad T > 0, \quad f(t) = 0, \forall t < 0$$

Propiedades

- Diferenciación en t

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(\dot{f}(t)) &= sF(s) - f(0^+) \\
&\cdots \\
\mathcal{L}(f^{(n)}(t)) &= s^n F(s) - \sum_{k=1}^{n} f^{(k-1)}(0^+) s^{n-k}
\end{aligned}
$$

- Teorema del valor inicial

$$
f(0^+) = \lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{s \to \infty} sF(s)
$$

- Teorema del valor final

$$
f(\infty) = \lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s)
$$

Convolución

- Convolución entre dos funciones

$$f * g = c(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

- Teorema de Convolución

$$C(s) = \mathcal{L}[f * g] = F(s) \cdot G(s)$$

Concepto de Función de Transferencia

- La linealización nos da EDL-CC:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_0 u + b_1 \frac{du}{dt} + \cdots + b_m \frac{d^m u}{dt^m}$$

- Suponiendo condiciones iniciales nulas y haciendo $\mathcal{L}$[expresión]

$$a_n s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \cdots a_0 Y(s) =$$
$$= b_0 U(s) + b_1 s U(s) + \cdots b_m s^m U(s)$$

reagrupando queda,

$$\left(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots a_0\right) Y(s) = \left(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0\right) U(s)$$

Finalmente,

$$Y(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0} U(s)$$