Modos transitorios

Ignacio Díaz Blanco

Universidad de Oviedo

Cálculo de antitransformadas

Método directo:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\omega}^{\sigma + j\omega} F(s) e^{st} ds$$

Afortunadamente
casi siempre, *F(s)* es una expresión racional
(un polinomio dividido por otro)

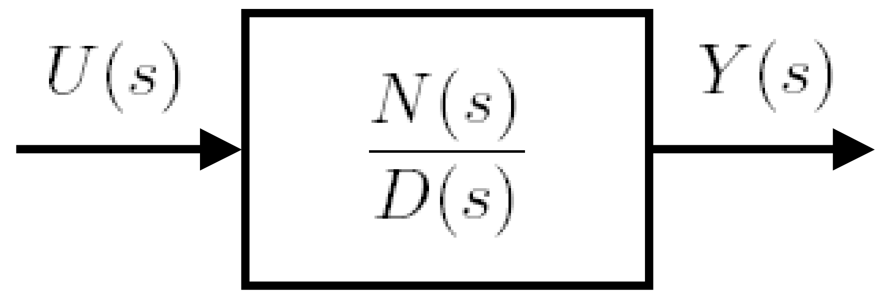
↓

descomposición
en fracciones simples

Universidad de Oviedo

Cálculo de antitransformadas

Descomposición en fracciones simples



$$Y(s) \quad = \quad \frac{N(s)}{D(s)} \cdot U(s) = \text{Expresión Racional} = \frac{\prod (s - z_i)}{\prod (s - p_i)}$$

$$Y(s) = \frac{A_1}{s - p_1} + \frac{A_2}{s - p_2} + \cdots + \frac{B_k}{(s - p_k)^r} + \cdots \qquad p_i \in \mathbb{C}$$

tablas *tablas* *tablas*

Universidad de Oviedo

Cálculo de antitransformadas

Descomposición en fracciones simples

Procedimiento:
descomponer la expresión racional *F(s)*
en funciones más sencillas
cuyas transformadas conocemos por tablas

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s) + \cdots + F_n(s)$$

F(s) puede descomponerse en funciones $F_i(s)$
cuyas transformadas son conocidas:

raíces distintas		*raíces múltiples*
$\dfrac{A_i}{s-p_i}$		$\dfrac{a_k}{(s-p_i)^k}$
$\downarrow \mathcal{L}^{-1}$	**← Tablas →**	$\downarrow \mathcal{L}^{-1}$
$A_i e^{p_i t}$		$\dfrac{a_k}{(k-1)!} \cdot t^{k-1} e^{p_i t}$

Universidad de Oviedo

Cálculo de antitransformadas

Descomposición en fracciones simples

Aplicando la linealidad de la T. de Laplace
se obtiene la expresión de *f(t)*
como suma de funciones $f_i(t)$ conocidas

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}[F_1(s)] + \mathcal{L}^{-1}[F_2(s)] + \cdots + \mathcal{L}^{-1}[F_n(s)]$$

tablas *tablas* *tablas*

Universidad de Oviedo

Cálculo de antitransformadas

Descomposición en fracciones simples

$$F(s) = \frac{A_1}{s-p_1} + \frac{A_2}{s-p_2} + \cdots \qquad\qquad p_i \in \mathbb{C}$$

multiplicando por *(s-p*$_i$*)*

$$(s-p_i)F(s) = A_1\frac{s-p_i}{s-p_1} + A_2\frac{s-p_i}{s-p_2} + \cdots + A_i\cancelto{1}{\frac{s-p_i}{s-p_i}} + \cdots A_n\frac{s-p_i}{s-p_n}$$

evaluando en *s=p*$_i$

$$(s-p_i)F(s)|_{s=p_i} = A_1\frac{0}{s-p_1} + A_2\frac{0}{s-p_2} + \cdots + A_i + \cdots A_n\frac{0}{s-p_n}$$

de donde...

$$\boxed{A_i = (s-p_i)F(s)|_{s=p_i}}$$

Universidad de Oviedo

Cálculo de antitransformadas

Descomposición en fracciones simples

Las fracciones resultantes tienen antitransformada conocida

$$\frac{A_i}{s - p_i} \quad \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \quad A_i e^{p_i t}$$

esto permite obtener *f(t)* por linealidad

$$f(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \cdots$$

Universidad de Oviedo

Cálculo de antitransformadas

Descomposición en fracciones simples

Raíces complejas → modos oscilatorios

aunque dos de las raíces sean complejas,
no se trata de ningún caso especial.

En efecto, supongamos dos raíces complejas
(siempre vienen en pares conjugados):

$$p_i = \sigma + j\omega, \quad p_i^* = \sigma - j\omega$$

Al aplicar Heaviside, nos van a quedar
dos coeficientes también conjugados (comprobarlo en casa):

$$p_i, p_i^* \longrightarrow C_i, C_i^*$$

Universidad de Oviedo

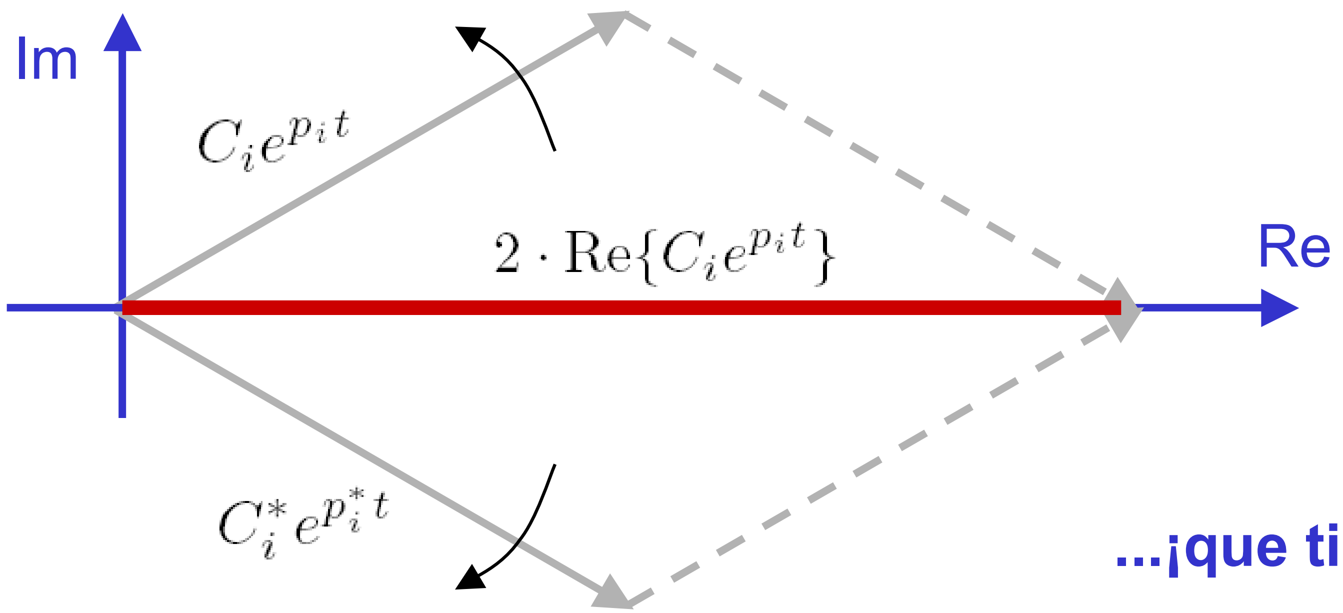
Cálculo de antitransformadas

Descomposición en fracciones simples

Raíces complejas → modos oscilatorios

Agrupando las dos funciones básicas resultantes por parejas
queda siempre una función real...

$$C_i e^{p_i t} + C_i^* e^{p_i^* t} = 2 \cdot \mathrm{Re}\{C_i e^{p_i t}\} = 2|C_i| e^{\sigma t} \cos(\omega t + \arg\{C_i\})$$



Nota:

$$C_i = |C_i| e^{j \arg\{C_i\}}$$

$$e^{p_i t} = e^{(\sigma + j\omega)t} = e^{\sigma t} e^{j\omega t}$$

...¡que tiene carácter oscilatorio!

Universidad de Oviedo

Cálculo de antitransformadas

Descomposición en fracciones simples

Caso especial: raíces múltiples

$$\begin{aligned}F(s) \quad = \quad & \frac{A_1}{s-p_1}+\frac{A_2}{s-p_2}+\cdots+\frac{A_{i-1}}{s-p_{i-1}} \\ & +\frac{a_1}{(s-p_i)}+\frac{a_2}{(s-p_i)^2}+\cdots\frac{a_r}{(s-p_i)^r} \\ & +\frac{A_{i+1}}{s-p_{i+1}}+\cdots+\frac{A_n}{s-p_n}\end{aligned}$$

Universidad de Oviedo

Cálculo de antitransformadas

Descomposición en fracciones simples

Caso especial: raíces múltiples

Supongamos:

$$F(s) = \cdots \frac{a_1}{s-p_i} + \frac{a_2}{(s-p_i)^2} + \frac{a_3}{(s-p_i)^3} + \frac{A_{i+1}}{s-p_{i+1}} + \cdots$$

entonces...

$$(s-p_i)^3 F(s)\big|_{s=p_i} = \cdots a_1\cancelto{0}{(s-p_i)^2} + a_2\cancelto{0}{(s-p_i)} + a_3 + A_{i+1}\cancelto{0}{\frac{(s-p_i)^3}{s-p_{i+1}}} + \cdots$$

$$\frac{d}{ds}\left[(s-p_i)^3 F(s)\right]\Big|_{s=p_i} = \cdots 2a_1\cancelto{0}{(s-p_i)} + a_2 + 0 + \frac{d}{ds}\left[A_{i+1}\cancelto{0}{\frac{(s-p_i)^3}{s-p_{i+1}}}\right] + \cdots$$

$$\frac{d^2}{ds^2}\left[(s-p_i)^3 F(s)\right]\Big|_{s=p_i} = \cdots 2a_1 + 0 + 0 + \frac{d^2}{ds^2}\left[A_{i+1}\cancelto{0}{\frac{(s-p_i)^3}{s-p_{i+1}}}\right] + \cdots$$

Universidad de Oviedo

Cálculo de antitransformadas

Descomposición en fracciones simples

Caso especial: raíces múltiples

$$
\begin{aligned}
a_r &= \left\{F(s)(s-p_i)^r\right\}_{s=p_i} \\
a_{r-1} &= \left\{\frac{d}{ds}\left[F(s)(s-p_i)^r\right]\right\}_{s=p_i} \\
a_{r-2} &= \frac{1}{2!}\left\{\frac{d^2}{ds^2}\left[F(s)(s-p_i)^r\right]\right\}_{s=p_i} \\
a_{r-3} &= \frac{1}{3!}\left\{\frac{d^3}{ds^3}\left[F(s)(s-p_i)^r\right]\right\}_{s=p_i} \\
\vdots \quad &\quad \vdots \\
a_1 &= \frac{1}{(r-1)!}\left\{\frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}}\left[F(s)(s-p_i)^r\right]\right\}_{s=p_i}
\end{aligned}
$$

Universidad de Oviedo

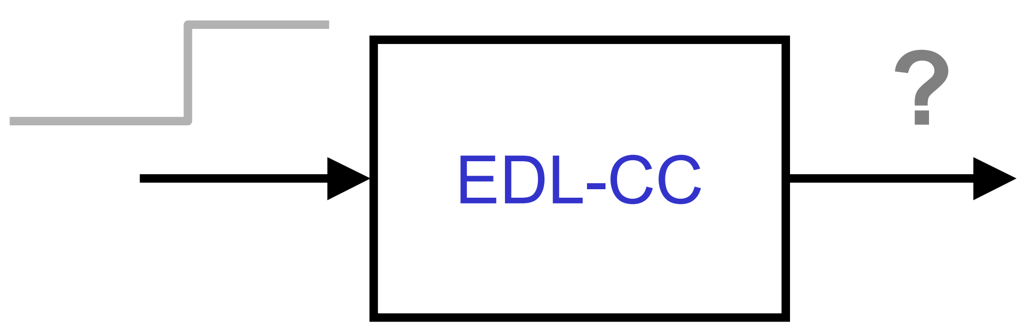
Cálculo de antitransformadas

Ejemplo

dado el sistema lineal definido por

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{d^2u(t)}{dt^2} + 6\frac{du(t)}{dt} + 8u(t)$$

determinar la respuesta ante un escalón unitario



Universidad de Oviedo

Cálculo de antitransformadas

Ejemplo

La transformada de Laplace de un escalón unitario es

$$1(t) \longrightarrow \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = G(s)\frac{1}{s} = \frac{(s+2)(s+4)}{s(s+1)(s+3)}$$

descomponiendo en fracciones simples

$$Y(s) = \frac{C_1}{s} + \frac{C_2}{s+1} + \frac{C_3}{s+3}$$

Universidad de Oviedo

Cálculo de antitransformadas

Ejemplo

Aplicando Heaviside para las raíces *s={0,-1,-3}*

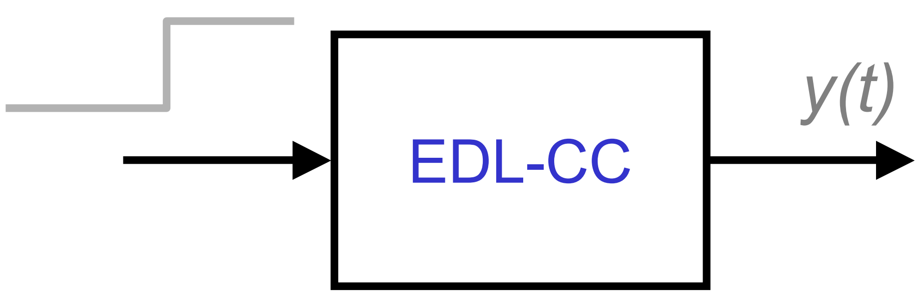
$$
\begin{aligned}
C_1 &= s \cdot G(s)\big|_{s=0} = \left.\frac{(s+2)(s+4)}{(s+1)(s+3)}\right|_{s=0} = 8/3 \\
C_2 &= (s+1) \cdot G(s)\big|_{s=-1} = \left.\frac{(s+2)(s+4)}{s(s+3)}\right|_{s=-1} = -3/2 \\
C_3 &= (s+3) \cdot G(s)\big|_{s=-3} = \left.\frac{(s+2)(s+4)}{s(s+1)}\right|_{s=-3} = -1/6
\end{aligned}
$$

$$y(t) = \frac{8}{3} \cdot 1(t) - \frac{3}{2} \cdot e^{-t} - \frac{1}{6} \cdot e^{-3t}$$

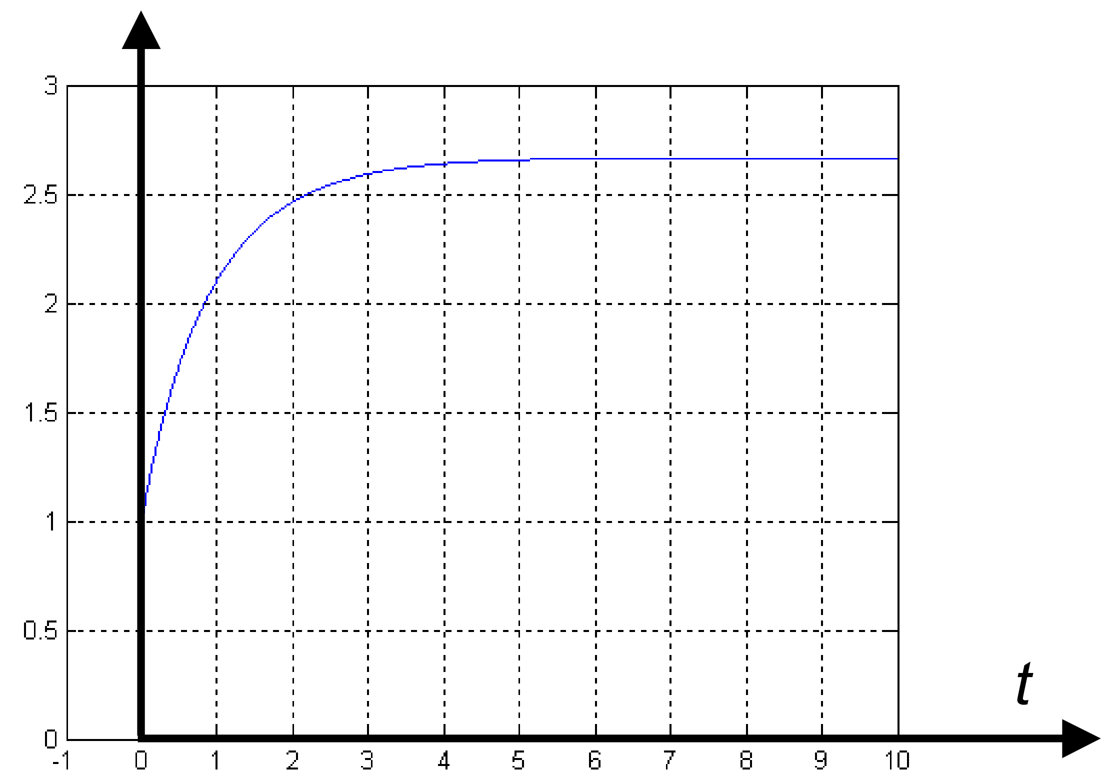
Universidad de Oviedo

Cálculo de antitransformadas

Ejemplo



$$y(t) = \frac{8}{3} \cdot 1(t) - \frac{3}{2} \cdot e^{-t} - \frac{1}{6} \cdot e^{-3t}$$



Universidad de Oviedo

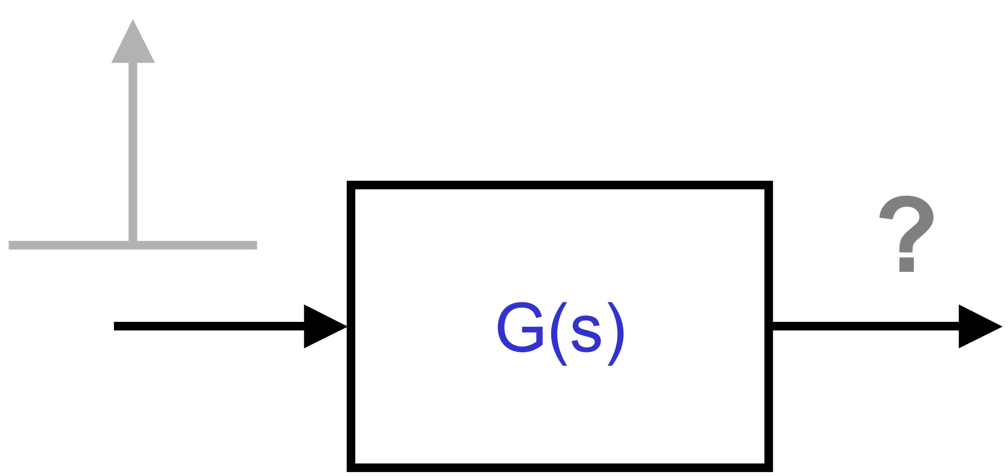
Cálculo de antitransformadas

Ejemplo

dado el sistema lineal definido por su función de transferencia

$$G(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)^2}$$

determinar la respuesta ante un impulso



Universidad de Oviedo

Cálculo de antitransformadas

Ejemplo

La transformada de Laplace de un impulso $\delta(t)$ es

$$\delta(t) \longrightarrow 1$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = G(s) = G(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)^2}$$

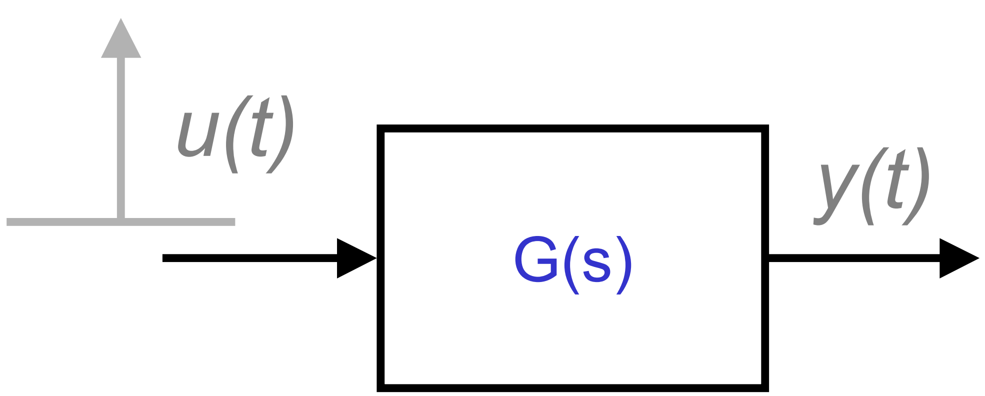
descomponiendo en fracciones simples

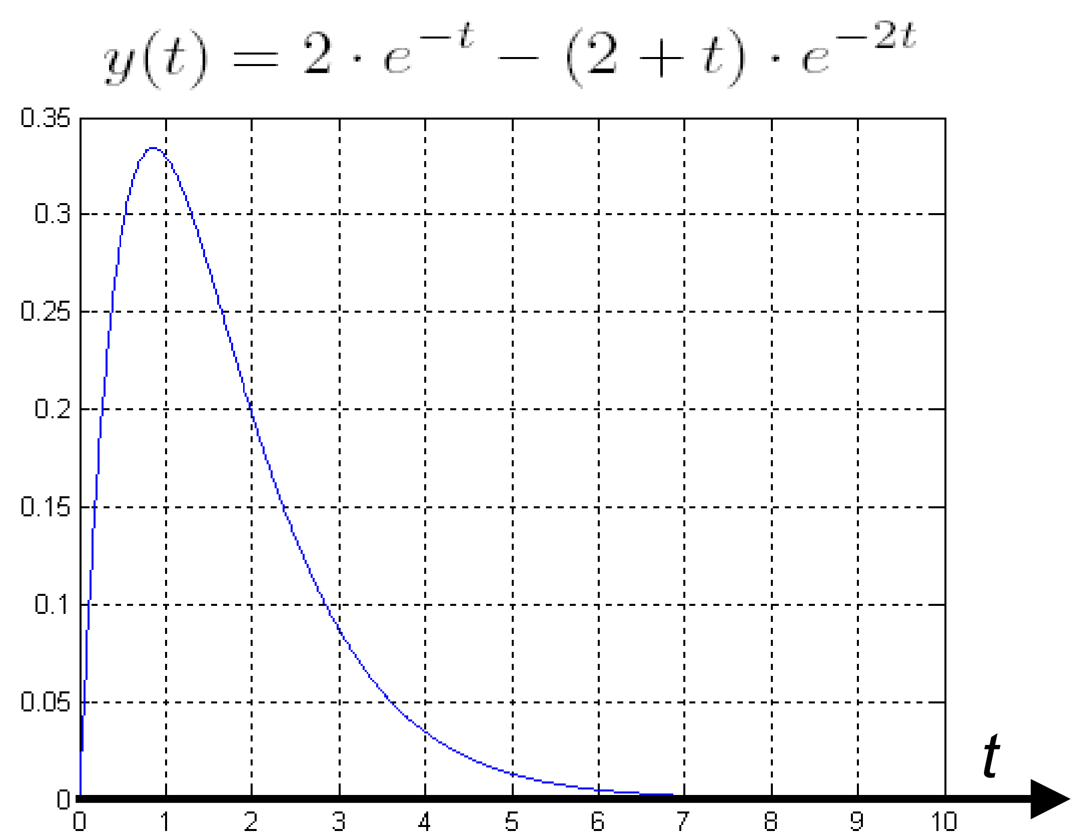
$$Y(s) = \frac{C_1}{s} + \frac{C_{21}}{s+2} + \frac{C_{22}}{(s+2)^2}$$

Universidad de Oviedo

Cálculo de antitransformadas

Ejemplo





Universidad de Oviedo

Cálculo de antitransformadas

Ejemplo

Dado el siguiente sistema lineal

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 7\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 12\frac{dy(t)}{dt} = 3\frac{du(t)}{dt} + 6u(t)$$

Suponiendo que en t=0 el sistema está en equilibrio
y que tanto u(0) como y(0) valen cero

a) obtener su función de transferencia
b) obtener su respuesta temporal ante una señal de tipo impulso

Universidad de Oviedo

Cálculo de antitransformadas

Ejemplo

a) función de transferencia

para calcular la T. de Laplace de las derivadas
$d^k y/dt^k$, $d^k u/dt^k$ que aparecen en la EDL-CC utilizamos

0 *(cond. iniciales nulas)*

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t)) \quad = \quad s^n F(s) - \sum_{k=1}^{n} f^{(k-1)}(0) s^{n-k}$$

entonces...

$$s^3 Y(s) + 7s^2 Y(s) + 12 s Y(s) = 3sU(s) + 6U(s)$$

$$(s^3 + 7s^2 + 12s) Y(s) = 3(s+2) U(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{3(s+2)}{s(s^2+7s+12)} = \frac{3(s+2)}{s(s+3)(s+4)}$$

Universidad de Oviedo

Cálculo de antitransformadas

Ejemplo

b) Respuesta impulsional

$$y(t) = g(t) * \delta(t)$$

$$y(s) = G(s) \cdot 1(s) = \frac{3(s+2)}{s(s+3)(s+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+3} + \frac{C}{s+4}$$

$$\begin{aligned} A &= sG(s)|_{s=0} = \frac{1}{2} \\ B &= (s+3)G(s)|_{s=-3} = 1 \\ C &= (s+4)G(s)|_{s=-4} = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

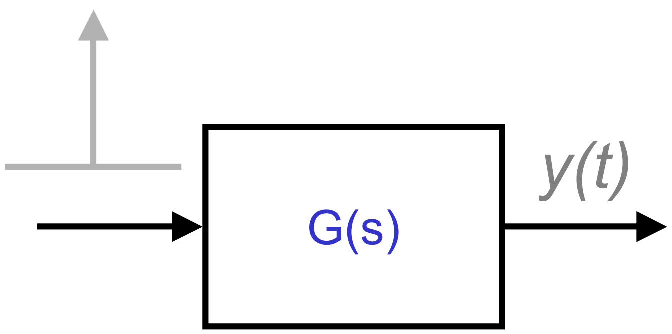
de donde, aplicando la T. inversa de Laplace

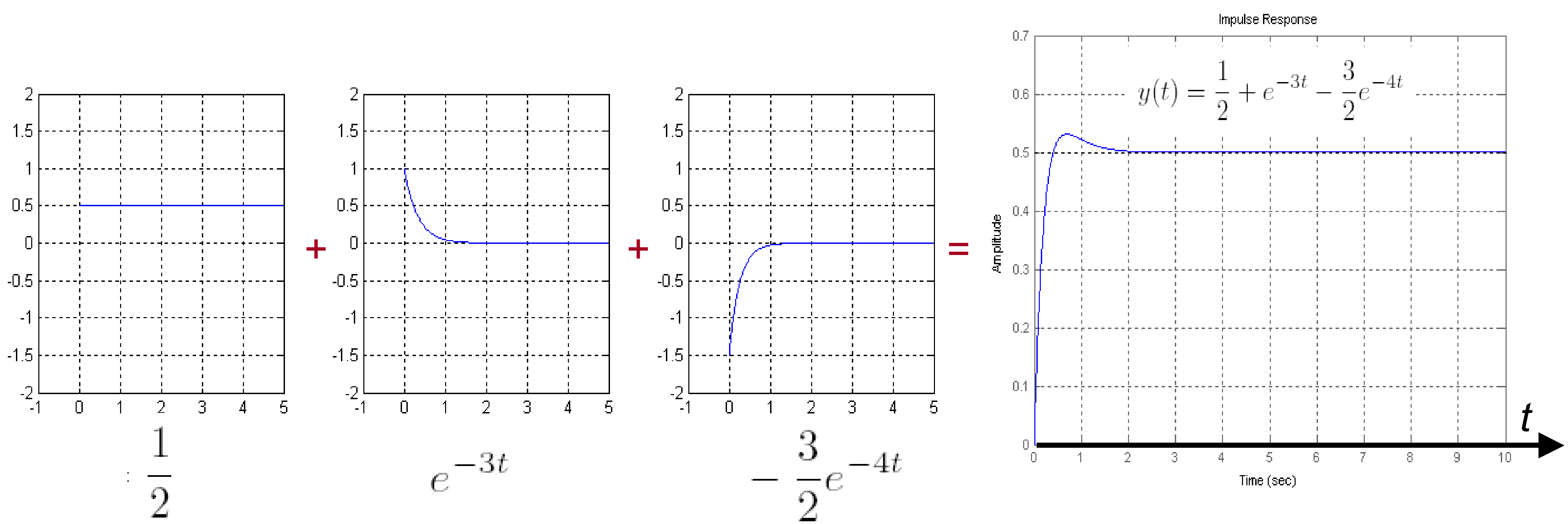
$$y(t) = \frac{1}{2} + e^{-3t} - \frac{3}{2}e^{-4t}$$

Universidad de Oviedo

Cálculo de antitransformadas

Ejemplo





Universidad de Oviedo

Modos transitorios

- Resultados importantes:

  1) La respuesta $f(t)$ de un sistema es suma de funciones elementales (*modos transitorios*) asociadas a los polos de $F(s)$.

  2) La posición de los polos en el plano complejo marca la dinámica de los modos transitorios

- El plano complejo o plano S constituye un verdadero "mapa" de la dinámica del sistema

Universidad de Oviedo

Modos transitorios

Si expresamos la raíz p_i como:

$$p_i = \sigma + j\omega.$$

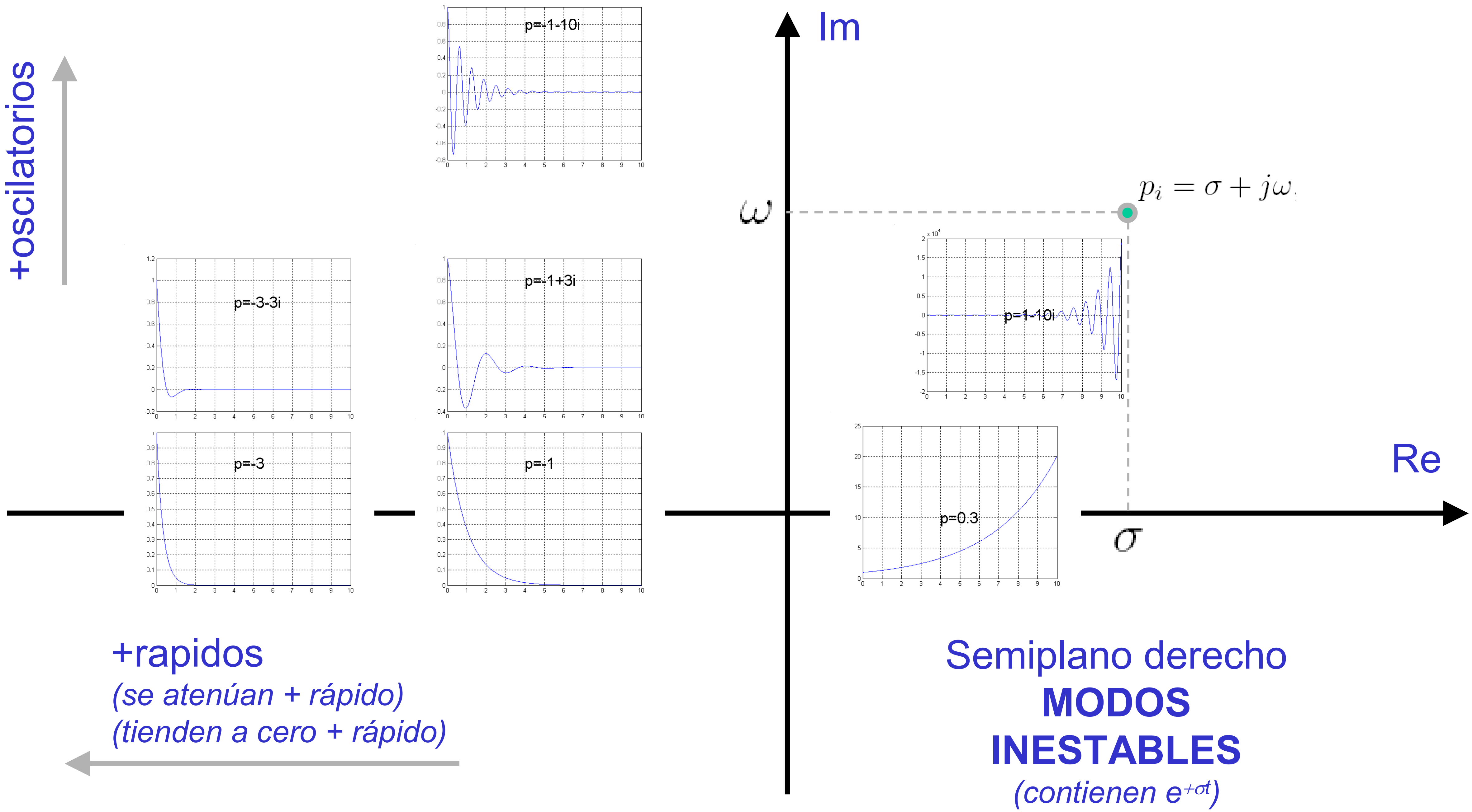
En general:

- Si p_i es real da lugar a una exponencial
  - *si σ > 0 será creciente y no acotada (inestable)*
  - *si σ < 0 será decreciente y tenderá a cero*
  - *Cuanto mayor sea $|\sigma|$, más rápido crece o decrece*

- Si p_i tiene parte imaginaria dará lugar a modos oscilatorios
  - *crecientes y no acotados si σ > 0*
  - *decrecientes (tienden a cero) si σ < 0*
  - *cuanto mayor sea ω más frecuencia de oscilación*
  - *cuanto mayor sea $|\sigma|$ más rápido tiende a cero (o a infinito si σ > 0)*
  - *La proporción entre σ y ω nos indica el "grado de oscilación"*
  - *Para sistemas estables:*
    - → *Si $\sigma \gg \omega$ se hace cero antes de que le de tiempo a completar un ciclo (poco oscilatorio)*
    - → *Si $\omega \gg \sigma$ oscila muchas veces antes de tender a cero (muy oscilatorio)*

Universidad de Oviedo

Mapa de modos transitorios



Universidad de Oviedo