# Ejemplo de análisis de sistemas: La suspensión de una motocicleta

9 de diciembre de 2003

## 1. Funcionamiento de las suspensiones[1]

Las suspensiones son uno de los sistemas más desconocidos por los motoristas, a pesar de que todos las consideramos fundamentales, especialmente si exigimos una mínima eficacia en conducción deportiva.

Sin embargo, las suspensiones no son tan complicadas como pueden parecer, y conocer sus principios básicos de funcionamiento es fundamental para poder comprenderlas y dominarlas.

Es evidente que para poder ajustar perfectamente estos sistema no sólo hay que disponer de los conocimientos necesarios, sino también de las reacciones de la moto, y, sobre todo, tener la sensibilidad adecuada para interpretar la información que se recibe de la misma.

### 1.1. Suspensión

Básicamente una suspensión tiene dos misiones principales:

1. Mantener las ruedas en contacto con el suelo en todo momento.
2. Procurar que las partes de la moto que están ancladas a las ruedas, es decir, todo aquello que no son las ruedas y la parte fija a ellas, (que se denomina masa no suspendida) se mantenga en una trayectoria rectilínea con respecto al suelo.

Para lograrlo las suspensiones disponen de dos sistemas, el resorte y el freno hidráulico. El primero suele ser un muelle helicoidal, aunque a veces se trabaja con ballestas, elastómeros o barras de torsión. Su función es absorber la energía que se produce durante el desplazamiento de la masa suspendida (ruedas y la parte de la suspensión fija a ellas), para devolverla a su posición inicial una vez que ha cesado la causa que produce el desplazamiento (baches, fuerza centrífuga en las curvas, inercia al acelerar o frenar, ...).

[1] Información extraída de los cursillos de conducción del Action Team sobre cómo regular las suspensiones.

El problema puede venir de las inercias de los resortes y del movimiento en el que liberan la energía ya que viene sucedido por oscilaciones de extensión y compresión. Para evitar que las suspensiones vayan extendiéndose y comprimiéndose constantemente mientras la moto circula, se instala un freno a estos movimientos parásitos: es el sistema hidráulico.

Mientras el recorrido del muelle depende de la fuerza que se te aplique, el sistema hidráulico depende de la velocidad del desplazamiento. Un muelle se comprime más conforme aumenta la carga sobre él, un sistema hidráulico se endurece cuando aumenta la velocidad del desplazamiento. Esto es muy importante, porque separa la regulación de ambos sistemas dependiendo del problema. Si este está causado por la fuerza que provoca el movimiento (topes o falta de recorrido en la suspensión), es el muelle el factor a considerar. Si, por el contrario, el problema es la velocidad de trabajo (oscilaciones, rebotes, movimientos parásitos, ...) es el hidráulico el sistema a regular.

## 1.2. Ajuste

El ajuste de una suspensión es un trabajo metódico que requiere experiencia, sensibilidad y método. Hay que realizar las diferentes operaciones por pasos y ser capaz de observar las diferencias que tienen lugar, ya que muchas veces no es fácil comprender que problema. En general un mismo resultado puede obtenerse por diversos procedimientos, por lo que vamos a referirnos únicamente a una regulación convencional sobre una moto se serie a la que no se van a modificar parámetros como la dureza interna del muelle, la viscosidad del aceite o el valvulado interno. Un método de trabajo suele comenzar por adecuar el muelle.

Para ello hay que comprobar que no hace topes ni trabaja con un recorrido excesivamente pequeño (que puede originar una perdida de agarre al acelerar o incluso sacudidas en los semimanillares). Es sencillo instalar una pequeña brida plástica que indique el recorrido empleado, que debe ser cercano al máximo, pero no completo. En este caso lo único que se puede regular es la precarga inicial, es decir, la carga necesaria para que el resorte comience a comprimirse. Es importante que la suspensión disponga de un cierto hundimiento con el piloto para evitar despegues de las ruedas en agujeros o cambios de rasante, pero la medida varía dependiendo del tipo de moto, de su peso y del que tenga el piloto. Como media en una moto deportiva de cilindrada media podemos considerar que debe hundirse unos 30 mm, pero este valor es muy variable y no puede tomarse una referencia válida en todos los casos.

Una vez obtenido un compromiso de muelle hay que regular el hidráulico, pero hay que tener en cuenta que en muchas ocasiones la regulación de los amortiguadores de serie no es excesivamente precisa. Una observación en parado de la velocidad de rebote o de compresión de las suspensiones empujando con las manos sólo es valida para comprobar si el estado es

desastroso y además a baja velocidad, pero hay que comenzar por comprobar que tanto la compresión como la extensión se realizan con un cierto freno, y que no hay variaciones a lo largo del recorrido.

La regulación de los parámetros de hidráulico para llegar a ajustes precisos obliga a probar, averiguar que es lo realmente hace la moto, y actuar. Podemos dar unas ciertas bases, pero es importante probar. Si un ajuste en una dirección empeora el funcionamiento hay que volver y dirigirse en el sentido contrario. Igualmente es fundamental no trabajar con todo a la vez, sino con un parámetro cada vez, ya que dos modificaciones pueden afectarse mutuamente y hacer imposible la regulación.

## 2. Un modelo sencillo

En su versión más sencilla, podemos considerar cada uno de los amortiguadores como un conjunto masa-muelle del tipo de la siguiente figura:

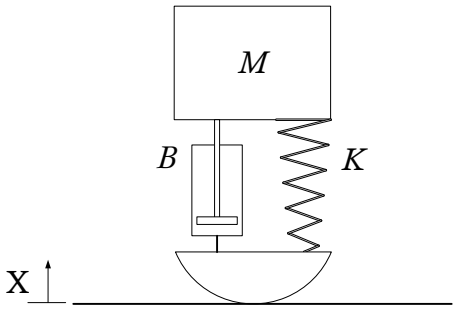


Figura 1: Modelo sencillo de la suspensión de una de las ruedas de una motocicleta.

donde $M$ es la mitad de la masa del conjunto moto-piloto, $K$ es la constante elástica del muelle y $B$ la viscosidad del amortiguador.

Nos interesa analizar cómo varía la posición de la masa (moto) cuando cambia la posición de la carretera, como se indica anteriormente.

Si denotamos la posición del suelo como $x_s(t)$ (entrada al sistema) y la de la masa suspendida de la moto por $x_m(t)$ (salida del sistema) y teniendo en cuenta que se debe cumplir $\sum F = Ma$, entonces se tiene la siguiente ecuación para este sistema físico:

$$M\ddot{x}_m(t) = -B(\dot{x}_m(t) - \dot{x}_s(t)) - K(x_m(t) - x_s(t)) + Mg$$

La ecuación es no lineal, luego deberemos de linealizarla en torno a un punto de funcionamiento, dado por la posición de la masa en reposo. En este caso $x_s^0 = 0$ y $x_m^0 = Mg/K$.

La transformada de Laplace de la ecuación queda:

$$Ms^2X_m(S) = -Bs(X_m(s) - X_s(s)) - K(X_m(s) - X_s(s))$$

y la función de transferencia queda:

$$\frac{X_m(s)}{X_s(s)} = \frac{Bs + K}{Ms^2 + Bs + K}$$

## 2.1. Análisis de la función de transferencia

### 2.1.1. Posición de polos y ceros

El sistema (que es evidentemente estable) tiene ganancia 1, como era de esperar, ya que tiende (en régimen permanente) a mantener la distancia entre la carretera y la masa suspendida de la moto. Este sistema tiene un cero en $s = -K/B$ y dos polos, que son complejos si el término $B^2 - 4MK \leq 0$ y son reales en otro caso; es decir: los valores de $B$ y $K$ modifican la posición de los polos y ceros del sistema y, por tanto, su comportamiento dinámico.

### 2.1.2. Análisis en el dominio de la frecuencia

Si analizamos el sistema en el dominio de la frecuencia, se observa que el cero aporta pendiente de +20dB/dec para frecuencias superiores a $K/B$ rad/s.

Los polos, cuando son complejos conjugados, aportan una pendiente de $-40$dB/dec para frecuencias superiores a $\omega_n = \sqrt{K/M}$ rad/s y si son reales aportan pendientes de $-20$dB/dec cada uno para frecuencias superiores a sus respectivos valores en radianes por segundo.

De esto se deduce que la dureza del muelle afecta directamente al ancho de banda del sistema resultante: los valores elevados de $K$ aumentan el ancho de banda del sistema, con lo que se filtraría menos las altas frecuencias. Sin embargo hay que destacar que también el valor de $B$ modifica el ancho de banda, lo que dificulta el análisis en conjunto.

## 2.2. Ajuste del muelle: valor de $K$

Como se indica en la sección anterior, al tener dos parámetros distintos, resulta más sencillo fijar uno primero y estudiar la influencia del segundo sobre el sistema resultante. El comportamiento deseable para la suspensión indica que deben de filtrarse lo más posible altas frecuencias (baches de la carretera), haciendo que la suspensión trabaje en todo el recorrido posible, pero sin dejar el muelle demasiado blando para que no se alcancen los topes (zona no lineal del sistema). Esto nos fija un valor de $K$ adecuado dependiendo del peso del conjunto moto-piloto. Siguiendo los consejos dados anteriormente podemos deducir este valor del siguiente modo:

Una CBR-600F, por ejemplo, pesa en seco unos 170 Kg. Suponiendo un piloto de 80 Kg de peso tenemos un total de 250 Kg, luego la mitad del peso total es $M = 125$ Kg y $Mg \approx 1225$ N. Si tenemos que la moto debe hundirse unos 30 mm con el peso propio más el del piloto, el valor de la constante $K$ puede calcularse como:

$$K = \frac{1225}{0'03} \approx 40800 \text{ N/m}$$

## 2.3. Ajuste del hidráulico: valor de $B$

Ajustar el valor del hidráulico ($B$) es más complejo. El efecto de aumentar o reducir su valor varía la posición de los polos y el cero del sistema, variando (por tanto) su comportamiento. En la figura 2 se puede apreciar esta variación.

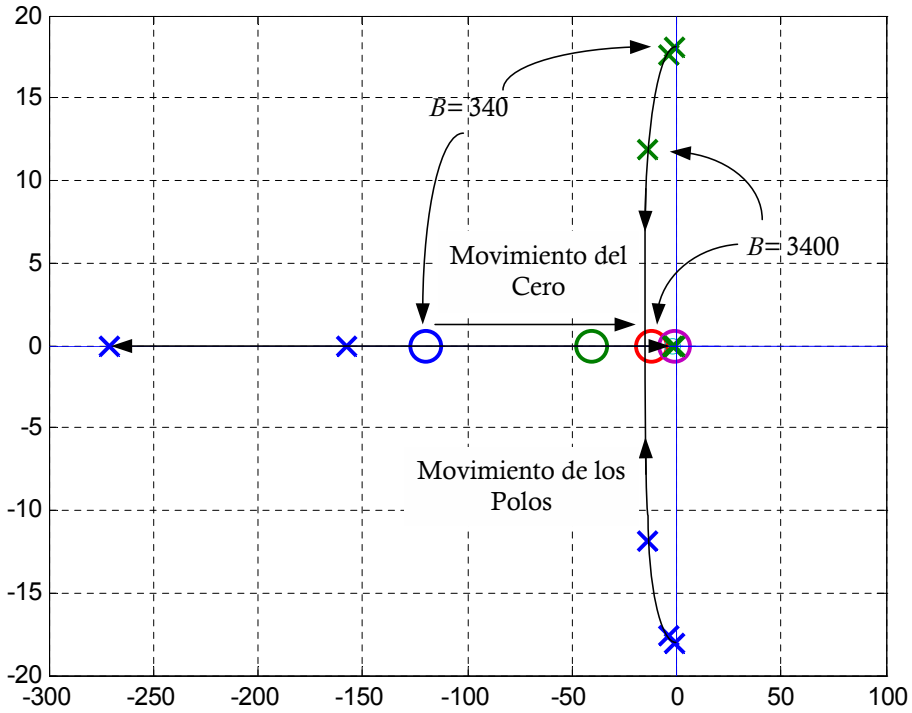


Figura 2: Variación de la situación de los polos y el cero en el plano complejo, para diferentes valores de $B$

A medida que aumentamos el valor de $B$ el valor del amortiguamiento $\xi$ aumenta y por tanto disminuye el ángulo $\theta$ que marca la sobreoscilación del sistema. A partir de un valor dado, se alcanza el amortiguamiento crítico y el sistema deja de sobreoscilar, al tiempo que uno de los polos se acerca al origen (lo que ralentizaría el sistema de no ser por el efecto del cero), mientras que el otro se aleja.

El valor de $B$ que hace que el sistema deje de sobreoscilar se puede calcular como:

$$B^2 - 4MK \leq 0 \Rightarrow B \geq \sqrt{4MK} \Rightarrow B \geq 4516$$

o bien, a través del amortiguamiento:

$$\xi = \frac{B}{2M}\sqrt{\frac{M}{K}} \approx 2,2 \cdot 10^{-4} B \geq 1 \Rightarrow B \geq 4500(\text{aprox.})$$

Al mismo tiempo el cero del sistema se hace cada vez más dominante, acercándose al eje imaginario. Mientras el valor de la $\sigma$ del cero sea mayor que el valor de la de los polos, la pendiente aportada por el mismo en el diagrama de Bode, producirá la amplificación de determinadas frecuencias (como se veía anteriormente). Al contrario, para valores de $B$ bajos, donde este efecto no aparece, la resonancia debida a la posición de los polos es demasiado elevada. Para valores de $B$ muy altos, la posición del cero es muy cercana a la del polo dominante, contrarrestando sus efectos y resultando en un sistema rápido (con elevado ancho de banda) y, por tanto, más incómodo para el piloto.

Para fijar un valor de $B$ podemos fijarnos en la resonancia del sistema. El sistema presenta resonancia en caso de que:

$$\xi = \frac{1}{\omega_n}\frac{B}{2M} = 2'2 \cdot 10^{-4} > 0'707$$

luego $B > 3214$ para que no se produzca resonancia. Podemos ajustar $B$ a un valor de 3400 y analizar el bode del sistema resultante (figura 3). Como se puede apreciar aún se tiene una ligera amplificación de las frecuencias inferiores a $25'3$ rad/s (4 Hz aproximadamente) debida al efecto del cero. El ancho de banda del sistema es de $38'2$ rad/s (aproximadamente 6 Hz).

Su respuesta a escalón unitario, muestra la evolución de la posición de la moto ante un bache brusco en la carretera, según se muestra en la figura 4. Una variación, pues, de la carretera de 2 cm de altura, produce una respuesta relativamente lenta de la posición de la motocicleta con respecto al suelo, con una sobreoscilación de un 19 % (3'8 mm) a los 0'12 segundos para, en un tiempo de menos de 0'3 segundos, estabilizarse en el nuevo valor de la altura, incrementado en 2 cm, lo que mantiene constante la distancia entre la moto y el suelo.

La respuesta con esta configuración, puede ser demasiado brusca para el conductor, reduciendo el confort de la motocicleta. Para mejorar este aspecto puede reducirse el valor de la constante $B$, lo que reduce el ancho de banda del sistema. Sin embargo, esto es perjudicial para otros factores, como la tracción de los neumáticos y la estabilidad global, haciendo que las oscilaciones ante las irregularidades de la carretera sean mayores, y reduciendo también las sensaciones del piloto con respecto al asfalto y los movimientos de la moto.

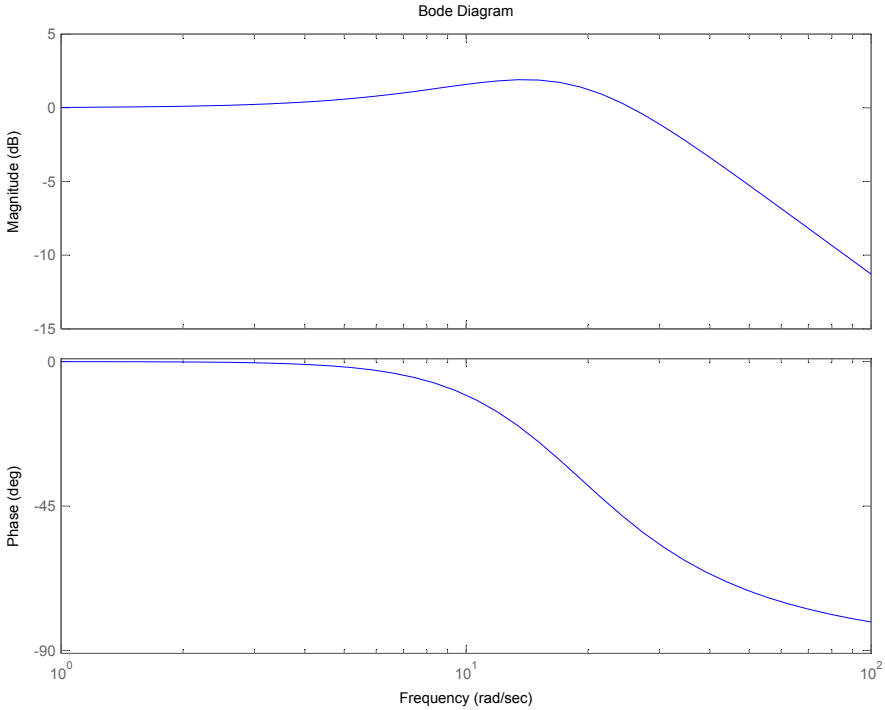


Figura 3: Bode resultante para un ajuste de B=3400.

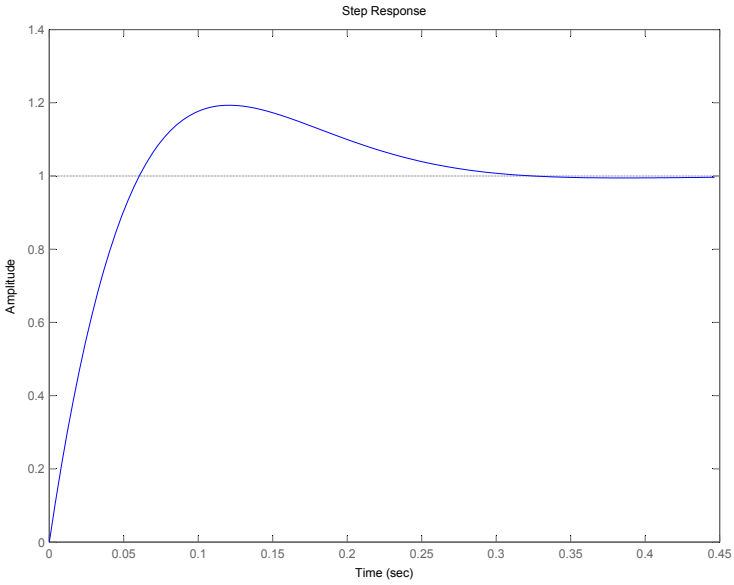


Figura 4: Respuesta ante un escalón para un ajuste de B=3400.

# 3. Conclusiones

Con el modelo simplificado visto anteriormente, se ilustra el problema de la regulación de las suspensiones de una motocicleta desde el punto de

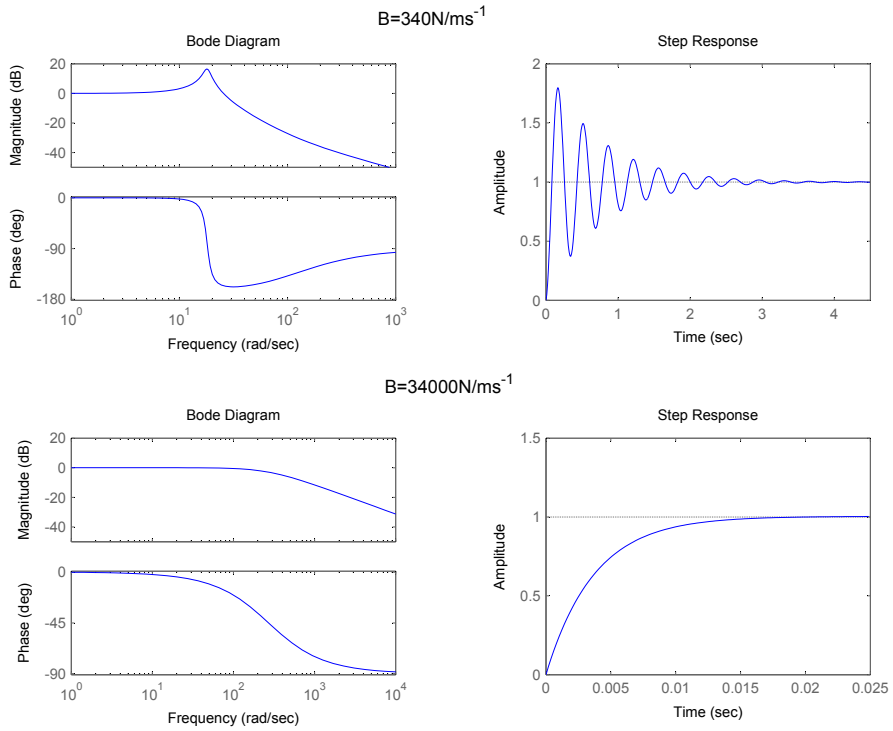


Figura 5: Diagramas de bode y respuesta a escalón para $B = 340$ (arriba) y $B = 34000$ (abajo).

vista del análisis dinámico de sistemas, siendo evidente la relación entre el análisis en el tiempo y en frecuencia.

Es necesario llegar a un compromiso entre confort (ancho de banda bajo, respuesta lenta y oscilada) y buen comportamiento, manteniendo la tracción y la transmisión de información al piloto (ancho de banda más alto, respuesta rápida).

También puede verse que a partir del Bode es posible hacerse una idea del estado y reglaje de las suspensiones, examinando el ancho de banda y la resonancia. Es precisamente esto lo que se realiza en la inspección técnica de vehículos (ITV) para determinar el estado de las suspensiones de un vehículo.