Tema 4

Análisis de Sistemas en el Dominio de la Frecuencia

Indice

- 4.1. Respuesta en frecuencia
- 4.2. Representaciones de la respuesta frecuencial
  - 4.2.1. Diagrama de Bode
  - 4.2.2. Diagrama Magnitud-Fase
  - 4.2.3. Diagrama Polar
- Apéndice I: Relación Análisis Temporal-Análisis Frecuencial
- Apéndice II: Aplicación del diagrama de Bode

Análisis en el Dominio de la Frecuencia

- Respuesta de los sistemas ante entradas de tipo senoidal.
- **Entrada**: Señales senoidales de distinta frecuencia f (o pulsación ω=2π·f) y, generalmente, de la misma amplitud M.

$$x(t) = M \cdot sen(\omega \cdot t) \cdot u_0(t) \qquad \omega : 0 \rightarrow \infty$$

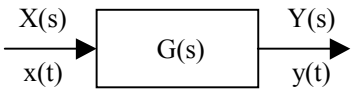
- **Salida**:

Régimen transitorio: La señal se va convirtiendo poco a poco en una senoide.

Régimen permanente: La señal es una senoide de igual frecuencia que la entrada, pero con distinta amplitud y fase. La diferencia es función de la frecuencia.

$$y_{RP}(t) = |G(j\omega)| \cdot M \cdot sen(\omega \cdot t + \underline{|G(j\omega)})$$

Respuesta a una Entrada Senoidal (I)



$$x(t) = M \cdot \text{sen}(\omega \cdot t) \cdot u_0(t)$$

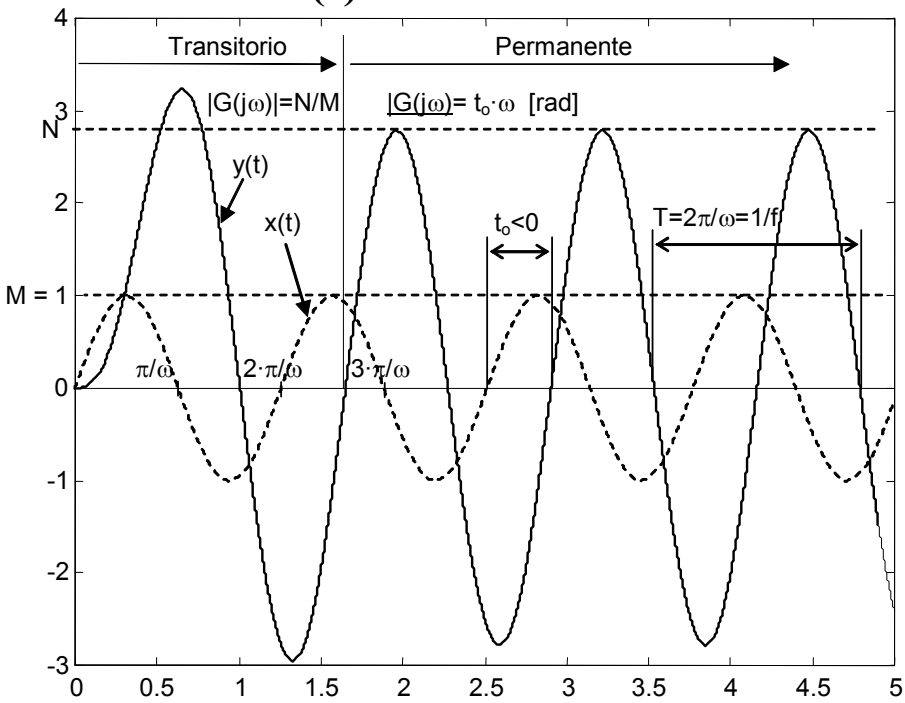
$$M = 1 \quad \omega = 5\,[rad/s]$$

$$G(s) = \frac{75}{s^2 + 5s + 15}$$

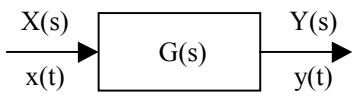
$$G(j\omega) = G(s)\big]_{s=j\omega}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{N}{M}$$

$$\underline{|G(j\omega)} = t_o \cdot \omega \quad [rad]$$



Respuesta a una Entrada Senoidal (II)



$$x(t) = M \cdot \text{sen}(\omega \cdot t) \cdot u_0(t)$$

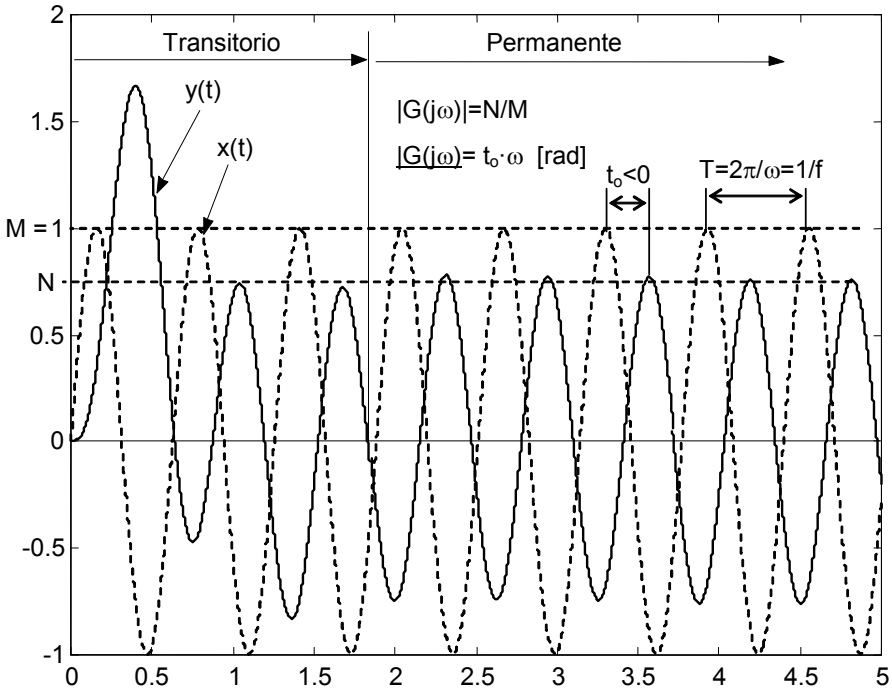
$$M = 1 \quad \omega = 10\,[rad/s]$$

$$G(s) = \frac{75}{s^2 + 5s + 15}$$

$$G(j\omega) = G(s)\big]_{s=j\omega}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{N}{M}$$

$$\underline{|G(j\omega)} = t_o \cdot \omega \quad [rad]$$



Representaciones de la Respuesta Frecuencial

- **Diagrama de Bode**:

  Dos curvas en función de la frecuencia f [Hz] o de la pulsación ω [rad/s], en escala logarítmica.

  –Relación de amplitudes $A(\omega) = 20 \cdot \log|G(j\omega)|$ [dB]

  –Angulo de fase $\Psi(\omega) = \underline{|G(j\omega)}$ [º]

- **Diagrama Magnitud-Fase**:

  Relación de amplitudes A(ω) [dB] en función del Angulo de fase Ψ(ω) [º] con la frecuencia o pulsación como parámetro.

- **Diagrama Polar**:

  Lugar geométrico de los afijos de los vectores G(jω) cuando $\omega: 0 \rightarrow \infty$

Diagrama de Bode (I)

- La relación de amplitudes en decibelios [dB]:

$$A(\omega) = 20 \cdot \log |G(j\omega)| \quad [dB]$$

- El ángulo de fase en grados [º]:

$$\Psi(\omega) = \underline{|G(j\omega)}\, rad \cdot \frac{180^{\circ}}{\pi\, rad} \quad [^{\circ}]$$

- La frecuencia f [Hz] o la pulsación ω [rad/s] en escala logarítmica
- Multiplicar o dividir por 10 a |G(jω)| supone sumar o restar 20 dB a A(ω).
- Multiplicar por 10 la frecuencia supone subir una **década** y por 2 una **octava.**

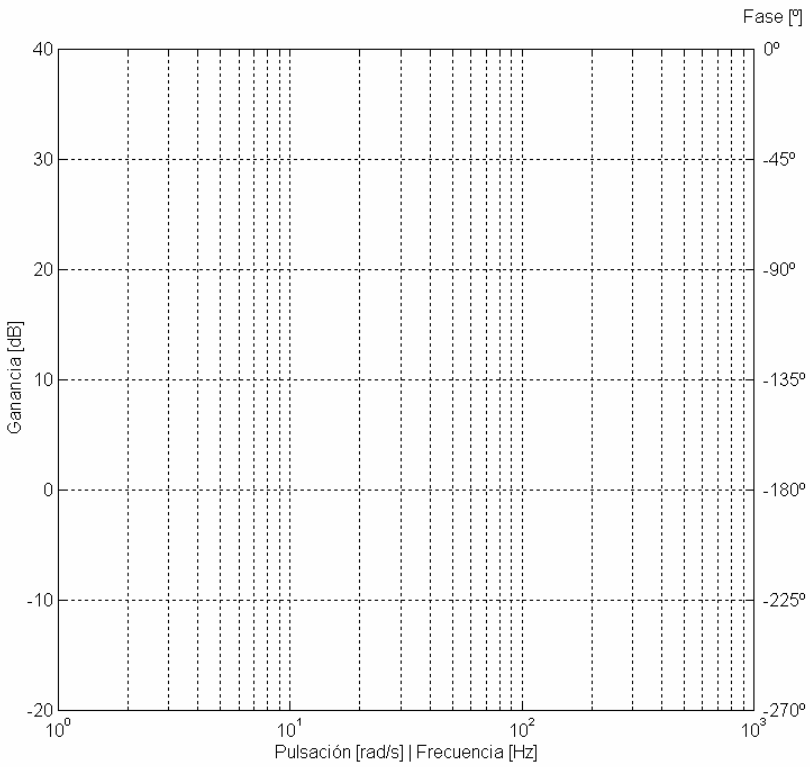


Diagrama de Bode (II)

- Para trabajar con el diagrama de Bode se sustituye s=jω en la función de transferencia del sistema y se expresa con los términos independientes de cada polinomio iguales a 1.

$$G(s) = \frac{K \cdot \prod_{p=1}^{P} (1 + T_p \cdot s) \cdot \prod_{q=1}^{Q} \left[1 + \frac{2 \cdot \xi_q}{\omega_{nq}} \cdot s + \left(\frac{s}{\omega_{nq}} \right)^2 \right]}{s^N \cdot \prod_{l=1}^{L} (1 + T_l \cdot s) \cdot \prod_{m=1}^{M} \left[1 + \frac{2 \cdot \xi_m}{\omega_{nm}} \cdot s + \left(\frac{s}{\omega_{nm}} \right)^2 \right]} \qquad G(j\omega) = \frac{K \cdot \prod_{p=1}^{P} (1 + T_p \cdot j\omega) \cdot \prod_{q=1}^{Q} \left[1 + \frac{2 \cdot \xi_q}{\omega_{nq}} \cdot j\omega + \left(\frac{j\omega}{\omega_{nq}} \right)^2 \right]}{(j\omega)^N \cdot \prod_{l=1}^{L} (1 + T_l \cdot j\omega) \cdot \prod_{m=1}^{M} \left[1 + \frac{2 \cdot \xi_m}{\omega_{nm}} \cdot j\omega + \left(\frac{j\omega}{\omega_{nm}} \right)^2 \right]}$$

- Se puede estudiar la respuesta en frecuencia del sistema analizando por separado la respuesta de cada uno de los elementos de la función de transferencia. La suma de todos los resultados será la respuesta del conjunto.

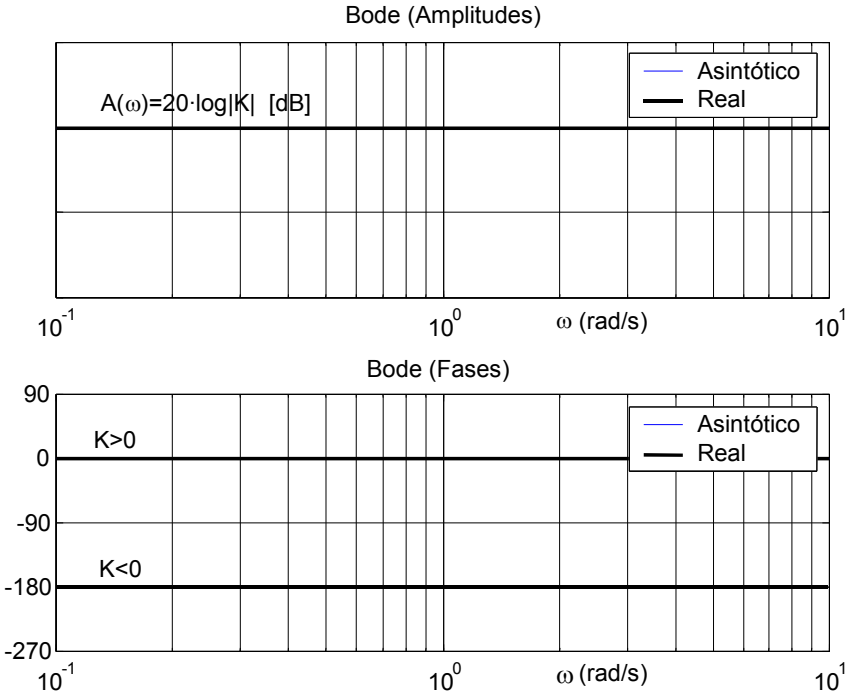
$$K\,;\ (1 + T \cdot j\omega)\,;\ \left[1 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_n} \cdot j\omega + \left(\frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2 \right];\ \frac{1}{(j\omega)^N}\,;\ \frac{1}{(1 + T \cdot j\omega)}\,;\ \frac{1}{\left[1 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_n} \cdot j\omega + \left(\frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]}$$

Respuesta de un término constante

$$G(s) = K \quad G(j\omega) = K$$

$$A(\omega) = 20\cdot\log|G(j\omega)| = 20\cdot\log|K|$$

$$\psi(\omega) = \underline{|G(j\omega)} = \begin{cases} 0^{\circ}\ si\ K > 0 \\ -180^{\circ}\ si\ K < 0 \end{cases}$$



Respuesta de un polo en el origen

$$G(s) = \frac{1}{s} \quad G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$$

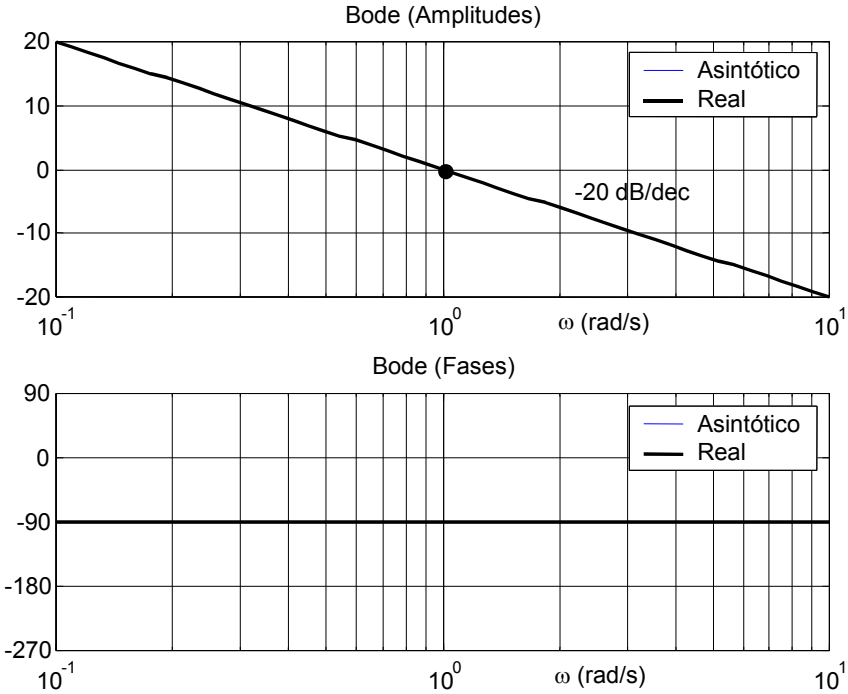
$$A(\omega) = 20\cdot\log|G(j\omega)| = 20\cdot\log\left|\frac{1}{j\omega}\right| =$$

$$= 20\cdot\log 1 - 20\cdot\log\omega = -20\cdot\log\omega$$

$$\begin{cases} \omega = 0.1 \Rightarrow A(0.1) = 20\,dB \\ \omega = 1 \Rightarrow A(1) = 0\,dB \\ \omega = 10 \Rightarrow A(10) = -20\,dB \end{cases}$$

$$\Psi(\omega) = \underline{|G(j\omega)} = \underline{\left|\frac{1}{j\omega}\right.} = \underline{|1} - \underline{|j\omega} = -90^{\circ}$$

$$\forall\omega;\ \omega : 0 \to \infty$$

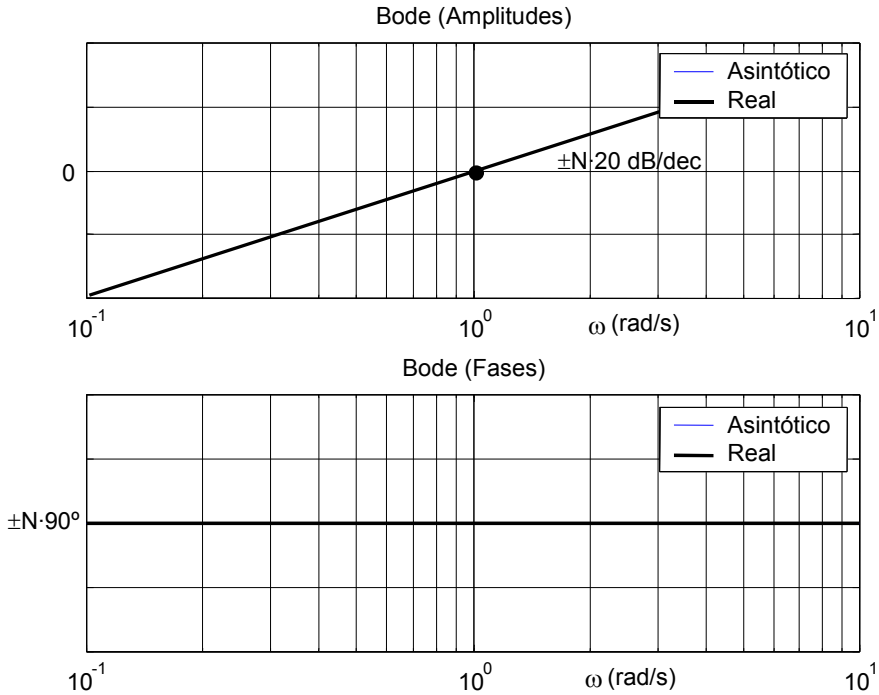


Respuesta de más de un cero o polo en el origen

$$G(s) = s^{\pm N} \qquad G(j\omega) = (j\omega)^{\pm N}$$

$$A(\omega) = 20\cdot\log\left|G(j\omega)\right| =$$
$$= 20\cdot\log\left|(j\omega)^{\pm N}\right| = \pm N\cdot 20\cdot\log\omega$$
$$(\omega = 1 \Rightarrow A(1) = 0\,dB)$$

$$\Psi(\omega) = \underline{\left|G(j\omega)\right.} = \underline{\left|(j\omega)^{\pm N}\right.} =$$
$$= \pm N\cdot\underline{\left|j\omega\right.} = \pm N\cdot 90^{\circ}$$



Respuesta de un polo real

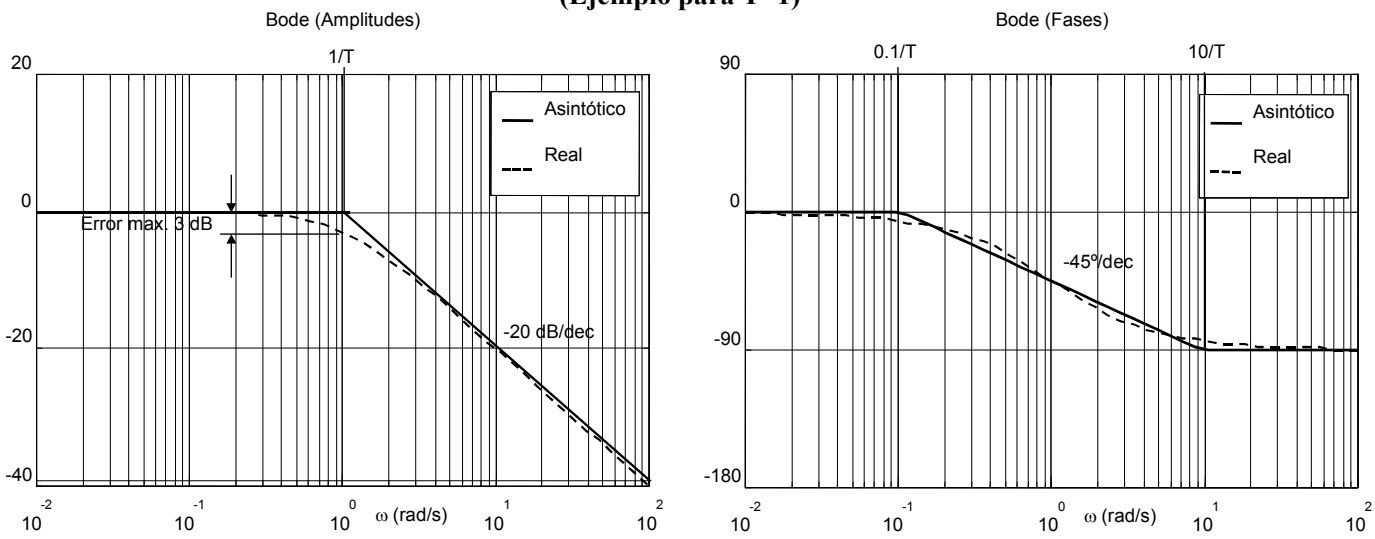
$$G(s) = \frac{1}{1+T\cdot s} \qquad G(j\omega) = \frac{1}{1+T\cdot j\omega}$$

$$\Psi(\omega) = -\operatorname{arctg}(\omega\cdot T)$$

$$\begin{cases} \text{Si} \quad \omega \to 0 \Rightarrow \Psi(\omega) \to 0^{\circ} \\ \text{Si} \quad \omega \to \infty \Rightarrow \Psi(\omega) \to -90^{\circ} \end{cases}$$

$$A(\omega) = -20\cdot\log\sqrt{1+(\omega\cdot T)^2}$$

(Ejemplo para T=1)



Respuesta de un cero real

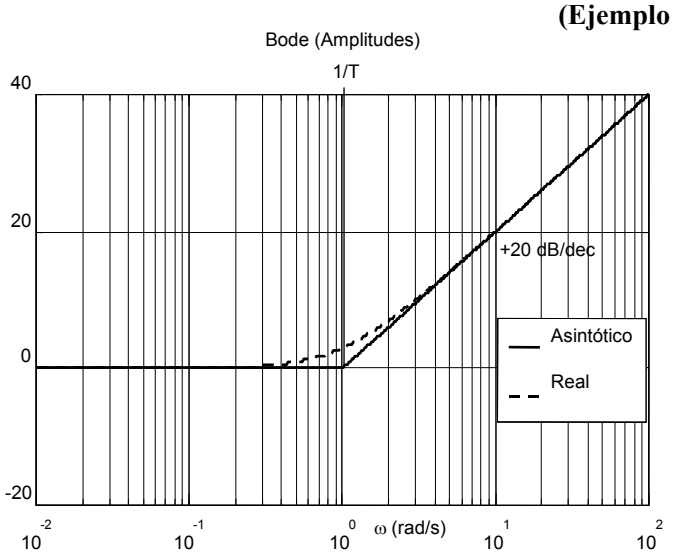
$$G(s) = 1 + T \cdot s \qquad G(j\omega) = 1 + T \cdot j\omega$$

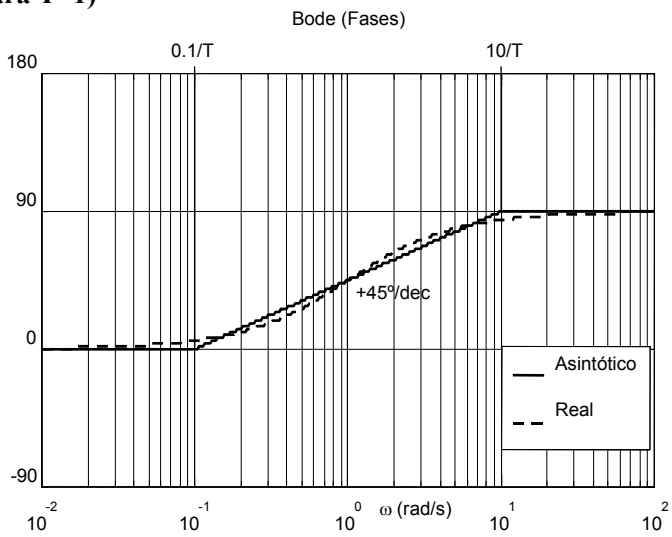
$$A(\omega) = 20 \cdot \log \sqrt{1 + (\omega \cdot T)^2}$$

$$\Psi(\omega) = \mathrm{arctg}(\omega \cdot T)$$

$$\begin{cases} \text{Si} \quad \omega \to 0 \Rightarrow \Psi(\omega) \to 0^{\circ} \\ \text{Si} \quad \omega \to \infty \Rightarrow \Psi(\omega) \to 90^{\circ} \end{cases}$$

(Ejemplo para T=1)





Respuestas de otros ceros o polos reales

- Para N polos o ceros con la misma frecuencia de corte, las pendientes de los trazados asintóticos de cada representación se multiplican por N. También se multiplica por N el error de representación.

- Si los signos del los coeficientes del polinomio que representa al polo o cero real cambian, la curva de relación de amplitudes no cambia, pero la de fases si.

Ceros	ω→0		ω→∞	Polos	ω→0		ω→∞
(1+T·jω)	0º	→	90º	1/(1+T·jω)	0º	→	-90º
(1-T·jω)	0º	→	-90º	1/(1-T·jω)	0º	→	90º
(-1+T·jω)	180º	→	90º	1/(-1+T·jω)	-180º	→	-90º
(-1-T·jω)	-180º	→	-90º	1/(-1-T·jω)	180º	→	90º

Respuesta de un par de polos complejos (I)

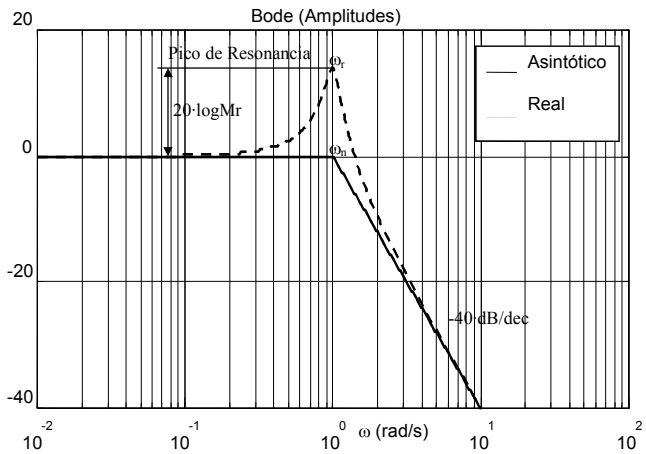
$0 < \xi < 1$

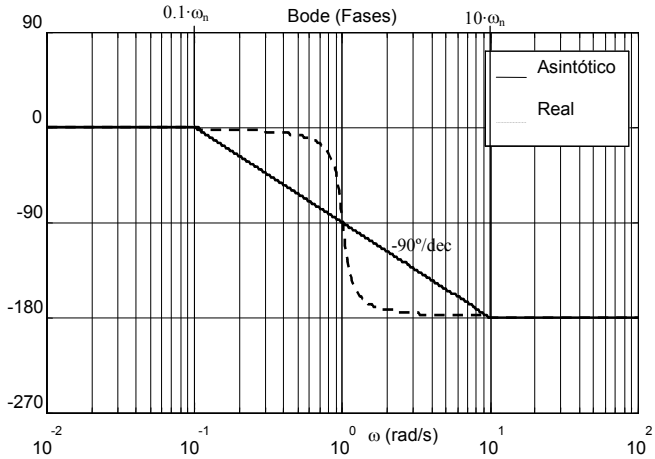
$$G(s) = \frac{1}{1 + (2\cdot\xi/\omega_n)\cdot s + (1/\omega_n)^2\cdot s^2} \qquad G(j\omega) = \frac{1}{1 + (2\cdot\xi/\omega_n)\cdot j\omega + (1/\omega_n)^2\cdot (j\omega)^2} \qquad A(\omega) = -20\cdot\log\sqrt{\left[1-(\omega/\omega_n)^2\right]^2 + 4\cdot\xi^2\cdot(\omega/\omega_n)^2}$$

$$si \quad 0 < \xi < 0.707 \begin{cases} M_r = \dfrac{1}{2\cdot\xi\cdot\sqrt{1-\xi^2}} & \leftarrow \text{Pico de Resonancia} \\ \omega_r = \omega_n\cdot\sqrt{1-2\cdot\xi^2} & \leftarrow \text{Frecuencia de Resonancia} \end{cases}$$

$$\Psi(\omega) = -\text{arctg}\left[\frac{2\cdot\xi\cdot(\omega/\omega_n)}{1-(\omega/\omega_n)^2}\right] \begin{cases} \text{Si} \quad \omega \to 0 \Rightarrow \Psi(\omega) \to 0^o \\ \text{Si} \quad \omega \to \infty \Rightarrow \Psi(\omega) \to -180^o \end{cases}$$

(Ejemplo para ω_n=1, ξ=0.1)



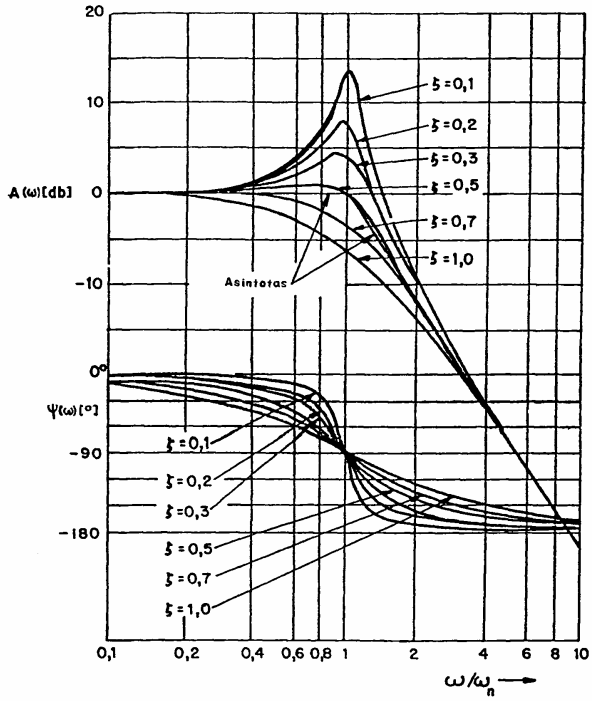


Respuesta de un par de polos complejos (II)

$$G(s) = \frac{1}{1 + (2\cdot\xi/\omega_n)\cdot s + (1/\omega_n)^2\cdot s^2}$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + (2\cdot\xi/\omega_n)\cdot j\omega + (1/\omega_n)^2\cdot (j\omega)^2}$$

Comparación de la respuesta en frecuencia cuando se modifica el parámetro ξ



Ejemplo de diagrama de Bode de un sistema (I)

$$G(s)=\frac{32\cdot(s+0.25)}{s\cdot(s+0.1)\cdot(s^2+2\cdot s+4)} \qquad G(s)=\frac{20\cdot(1+4\cdot s)}{s\cdot(1+10\cdot s)\cdot(1+0.5\cdot s+0.25\cdot s^2)}$$

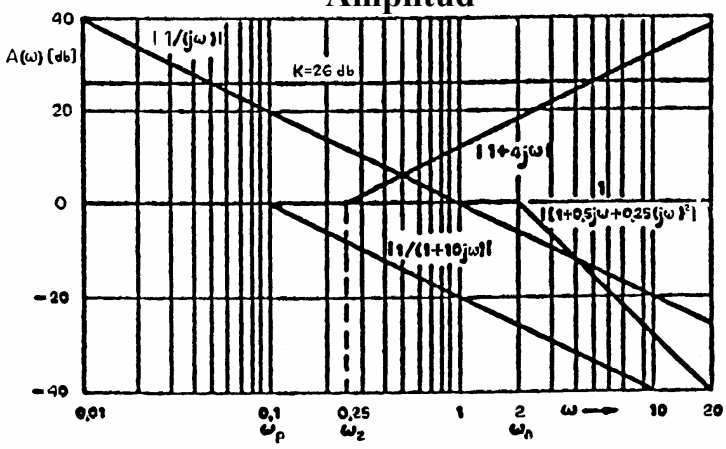
$$G(j\omega)=\frac{20\cdot(1+4\cdot j\omega)}{j\omega\cdot(1+10\cdot j\omega)\cdot(1+0.5\cdot j\omega+0.25\cdot(j\omega)^2)}$$

Frecuencias de corte

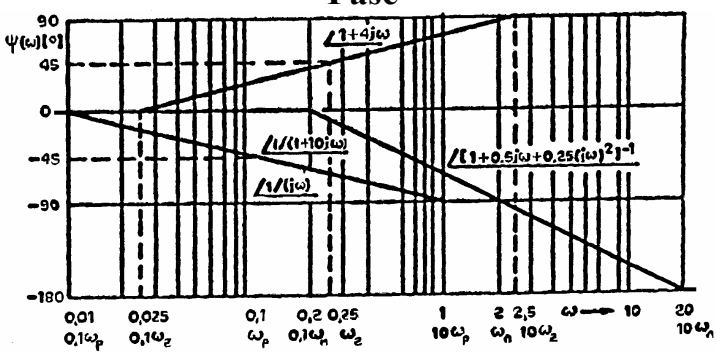
$A(\omega)$		$\Psi(\omega)$
$\omega_p=0.1$	$0.1\cdot\omega_p=0.01$	$10\cdot\omega_p=1$
$\omega_z=0.25$	$0.1\cdot\omega_z=0.025$	$10\cdot\omega_z=2.5$
$\omega_n=2$	$0.1\cdot\omega_n=0.2$	$10\cdot\omega_n=20$

Pico de Resonancia $\begin{cases}\omega_n=2\\ \xi=0.5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}M_r=1.15\Rightarrow 1.24\ dB\\ \omega_r=1.41\quad rad/s\end{cases}$

Amplitud



Fase



Ejemplo de diagrama de Bode de un sistema (II)

- Tabla para el trazado asintótico de A(ω)

Elemento	Frecuencia de corte	Cambio de pendiente	Pendiente acumulada
K=20 ≡ 26 [dB]	No tienen, frecuencia de corte. Su representación es una recta de pendiente -20db/dec que pasa por 26 dB para ω=1	0 dB/dec	-20 dB/dec (pendiente inicial)
1/(j·ω) (ω=1 ⇒ 0 dB)		-20 dB/dec	
1/(1+10·j·ω)	ω_p=0.1	-20 dB/dec	-40 dB/dec
(1+4·j·ω)	ω_z=0.25	+20 dB/dec	-20 dB/dec
1/(1+0.5· j·ω +0.25·(j·ω)^2)	ω_n=2	-40 dB/dec	-60 dB/dec

- Tablas para el trazado asintótico de Ψ(ω)

Elemento	ω→0		ω→∞
K=20>0	0º	→	0º
1/(j·ω)	-90º	→	-90º
1/(1+10·j·ω)	0º	→	-90º
(1+4·j·ω)	0º	→	90º
1/(1+0.5· j·ω +0.25·(j·ω)^2)	0º	→	-180º
Total	-90º	→	-270º

Elemento	Frecuencia de corte	Cambio de pendiente	Pendiente acumulada
K=20>0 (0º)	No tienen. Es una horizontal por -90º	0º/dec	0º/dec (inicial)
1/(j·ω) (-90º)		0º/dec	
1/(1+10·j·ω)	0.1·ω_p=0.01	-45º/dec	-45º/dec
(1+4·j·ω)	0.1·ω_z=0.025	+45º/dec	0º/dec
1/(1+0.5· j·ω +0.25·(j·ω)^2)	0.1·ω_n=0.2	-90º/dec	-90º/dec
1/(1+10·j·ω)	10·ω_p=1	+45º/dec	-45º/dec
(1+4·j·ω)	10·ω_z=2.5	-45º/dec	-90º/dec
1/(1+0.5· j·ω +0.25·(j·ω)^2)	10·ω_n=20	+90º/dec	0º/dec

Ejemplo de diagrama de Bode de un sistema (III)

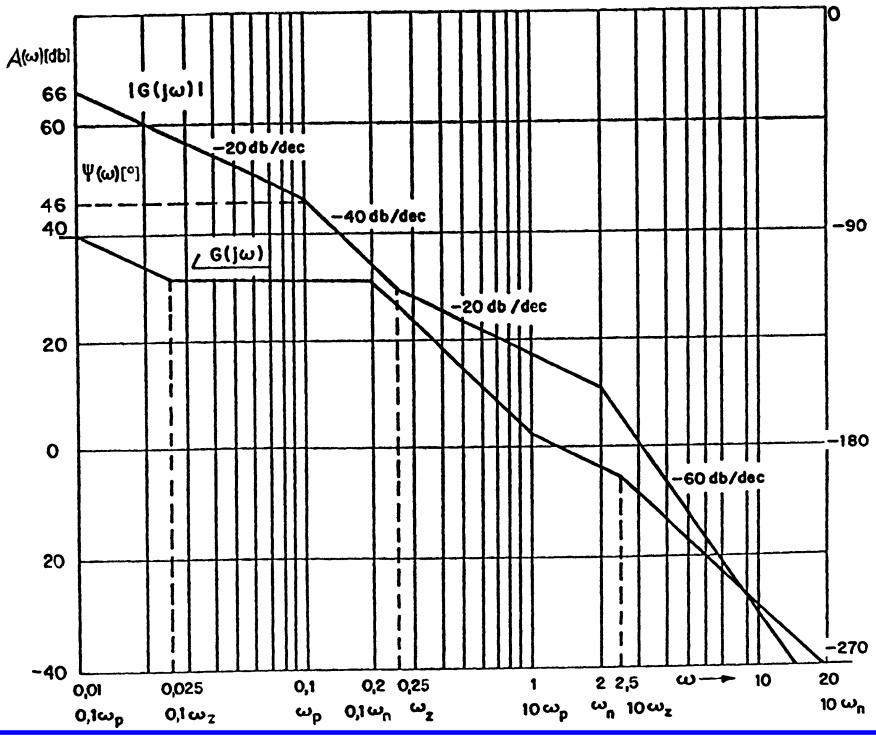


Diagrama Magnitud-Fase

$$G(s) = \frac{32\cdot(s+0.25)}{s\cdot(s+0.1)\cdot(s^2+2\cdot s+4)}$$

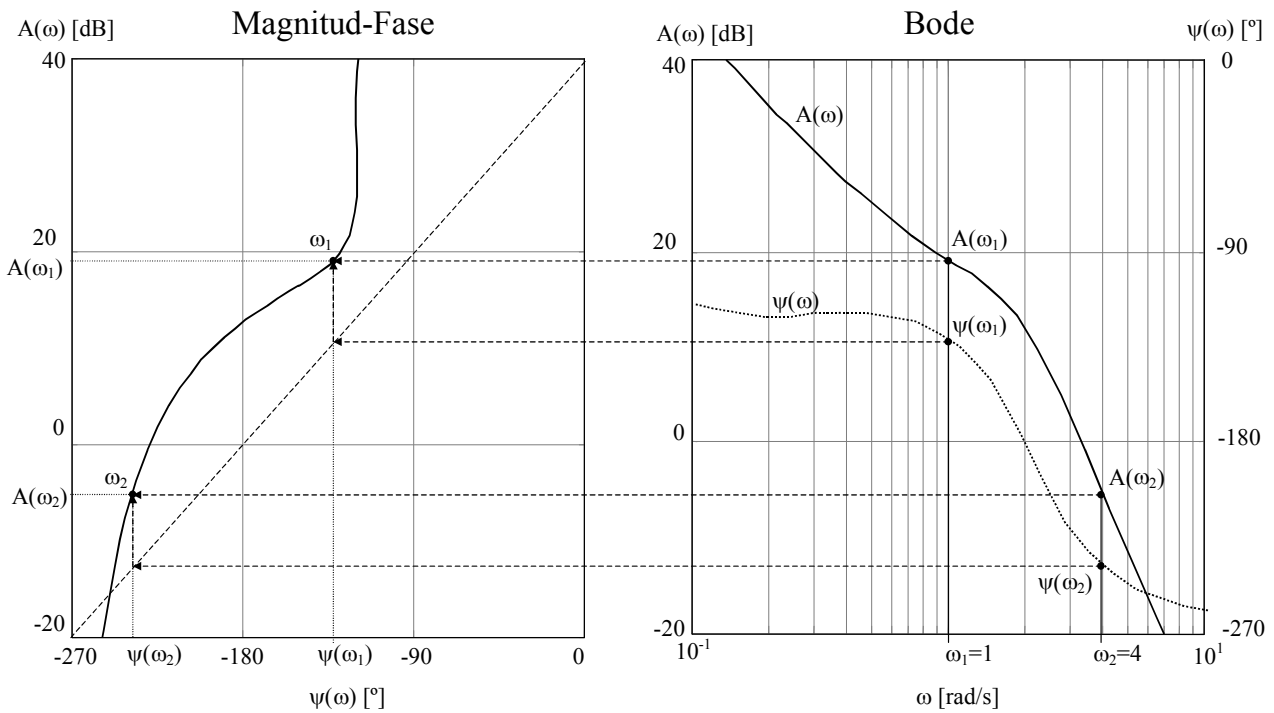
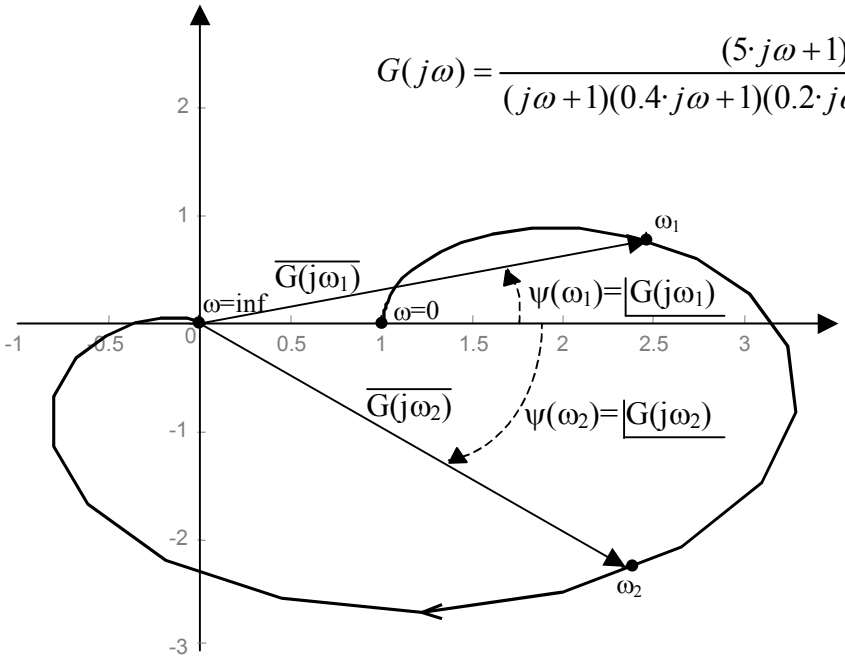


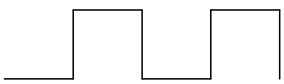
Diagrama Polar

$$G(j\omega) = \frac{(5\cdot j\omega+1)}{(j\omega+1)(0.4\cdot j\omega+1)(0.2\cdot j\omega+1)(0.1\cdot j\omega+1)}$$



Relación Análisis Temporal – Análisis Frecuencial

Amplitud 1
Frecuencia 1 Hz.



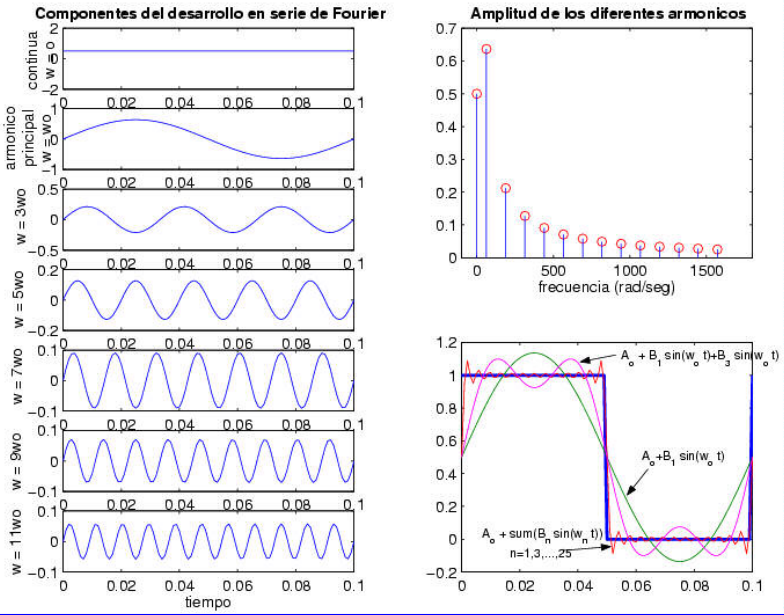
$$G(s) = \frac{100}{s+100}$$

¿y(t)?

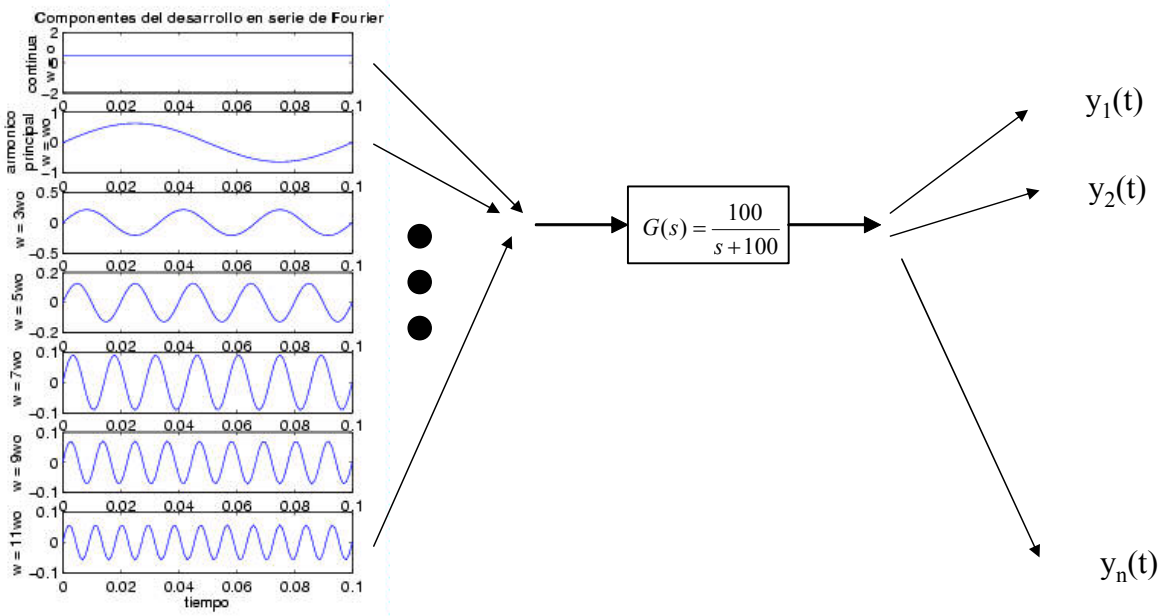
1. Descomposición de Fourier de la señal de excitación.
2. Obtención de la respuesta del sistema a cada una de las senoidales.
3. Suma de las respuestas para obtener y(t) según el principio de superposición.

1. Descomposición de Fourier de la señal de excitación

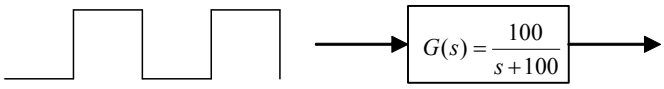
$$u(t) = 0.5 + \sum_n \frac{2}{n\pi} \sin(20\pi n t), \quad n = 1, 3, 5, \ldots$$



2. Obtención de la respuesta del sistema cada una de las senoidales

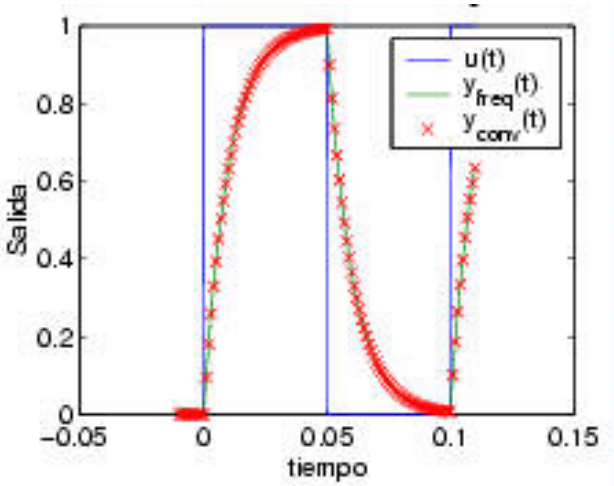


3. Suma de las respuestas para obtener y(t)

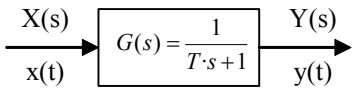


$y(t)=sum(y_i(t))$

Las respuestas temporal y frecuencial de un sistema pueden relacionarse a partir del desarrollo enserie de Fourier.

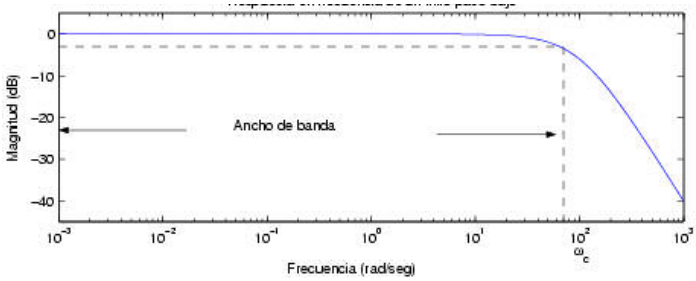


Ancho de Banda de un Sistema



(Ganancia K = 1 para el ejemplo)

Frecuencia en la cual la ganancia está 3 dB por debajo de su valor de frecuencia 0.



Frecuencia superiores al ancho de banda sufren una atenuación proporcional a su alejamiento de tal frecuencia. Frecuencias inferiores pasan casi sin alteración.

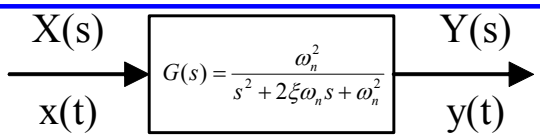
$$y(t)=1-e^{-\frac{t}{T}}$$

$$T\uparrow \Rightarrow \textit{Sistema Lento} \qquad w_c\downarrow \Rightarrow \textit{Sistema Lento}$$

$$T\downarrow \Rightarrow \textit{Sistema Rápido} \qquad w_c\uparrow \textit{Sistema Rápido}$$

$$w_c=1/T$$

Resonancia de un Sistema



$$G(s)=\frac{1}{1+(2\cdot\xi/\omega_n)\cdot s+(1/\omega_n)^2\cdot s^2} \qquad G(j\omega)=\frac{1}{1+(2\cdot\xi/\omega_n)\cdot j\omega+(1/\omega_n)^2\cdot(j\omega)^2}\rightarrow A(w),\Psi(w)$$

$$si \quad 0<\xi<0.707 \begin{cases} \omega_r=\omega_n\cdot\sqrt{1-2\cdot\xi^2} \\ M_r=\dfrac{1}{2\cdot\xi\cdot\sqrt{1-\xi^2}}=\dfrac{1}{2\cdot\cos(\vartheta)\cdot\sqrt{1-\cos^2(\vartheta)}}=\dfrac{1}{2\cdot\cos(\vartheta)\cdot sen(\vartheta)}=\dfrac{1}{2\cdot sen(2\vartheta)} \end{cases}$$

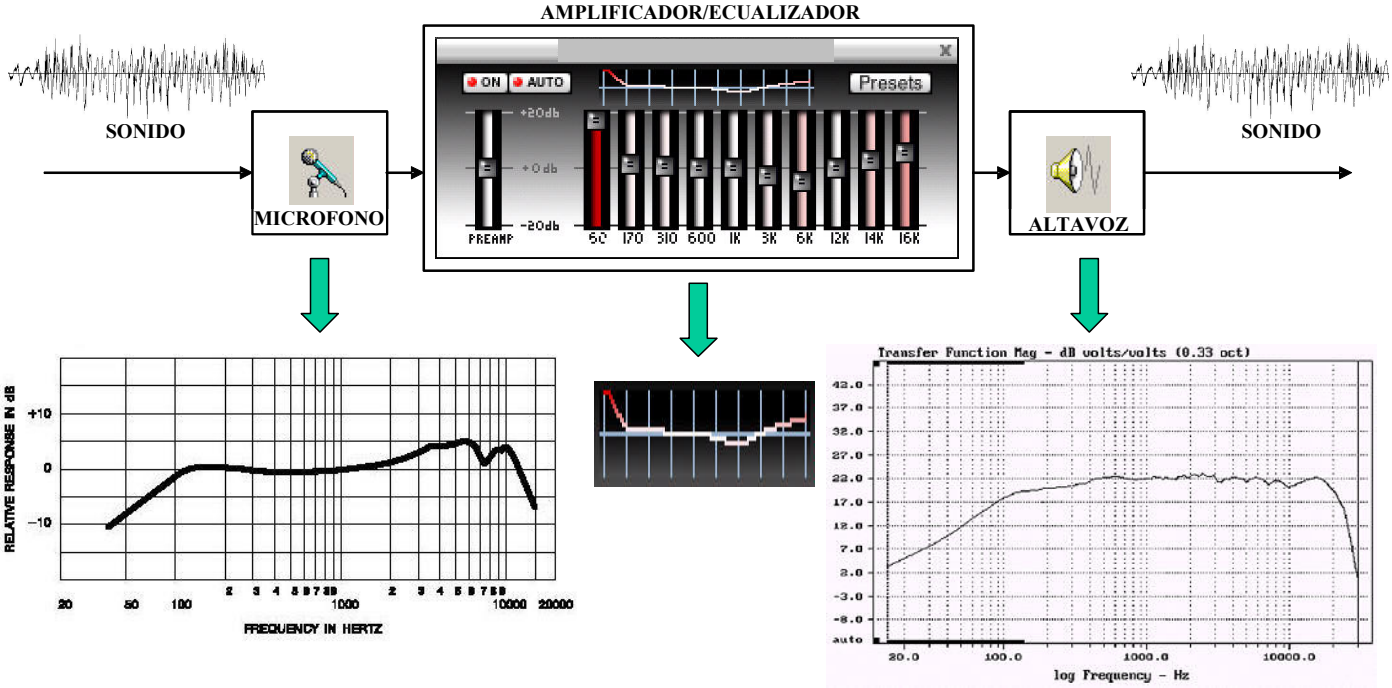
Sobreoscilación :

$$M_p=e^{-\pi\cdot\mathrm{cotg}\theta}\cdot 100[\%] \quad\rightarrow\quad M_r\uparrow\Rightarrow M_p\uparrow$$

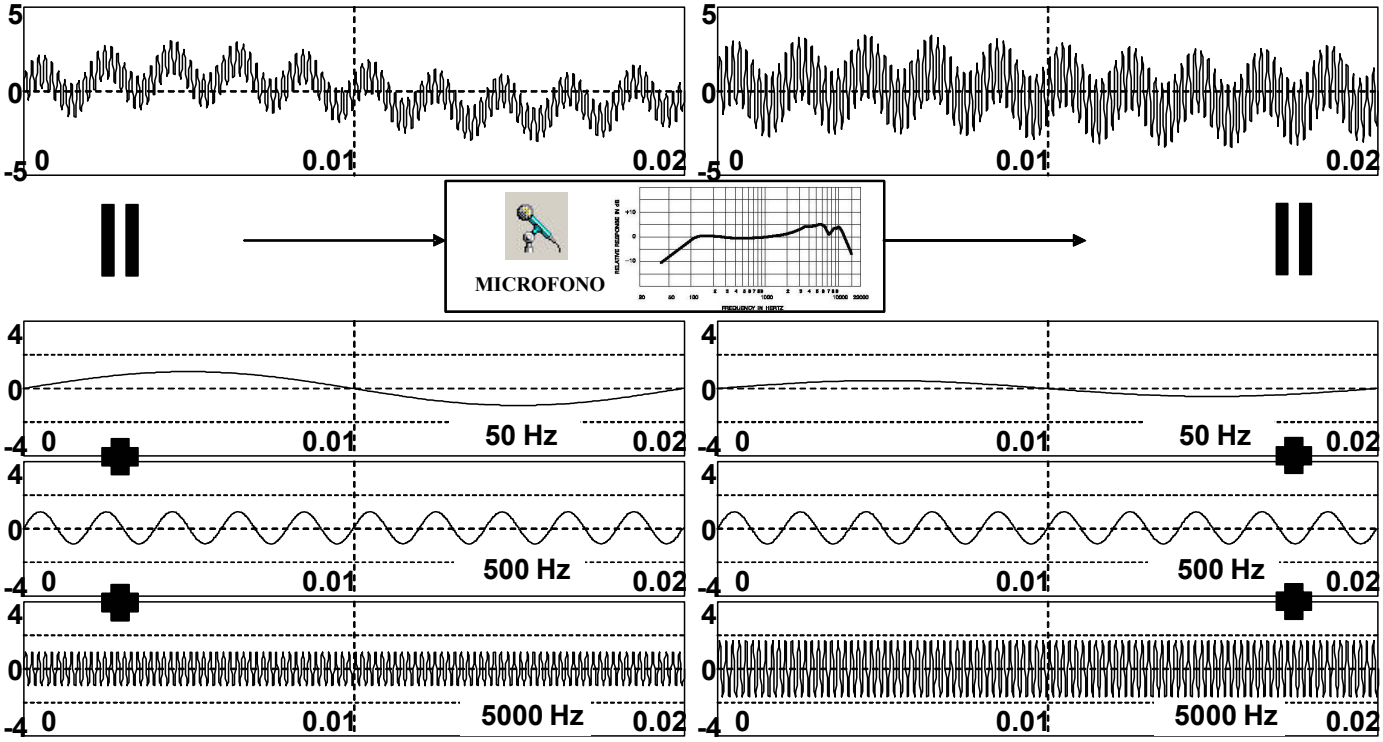
Tiempo de pico :

$$t_p=\frac{\pi}{\omega_d}=\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}=\frac{\pi}{\dfrac{\omega_r}{\sqrt{1-2\xi^2}}\sqrt{1-\xi^2}}=\frac{\pi\sqrt{1-2\xi^2}}{\omega_r\sqrt{1-\xi^2}} \quad\rightarrow\quad \xi\downarrow\Rightarrow\begin{cases}\omega_d\approx\omega_n\approx\omega_r \\ t_d=\dfrac{\pi}{\omega_d}\approx\dfrac{\pi}{\omega_n}\approx\dfrac{\pi}{\omega_r}\end{cases}$$

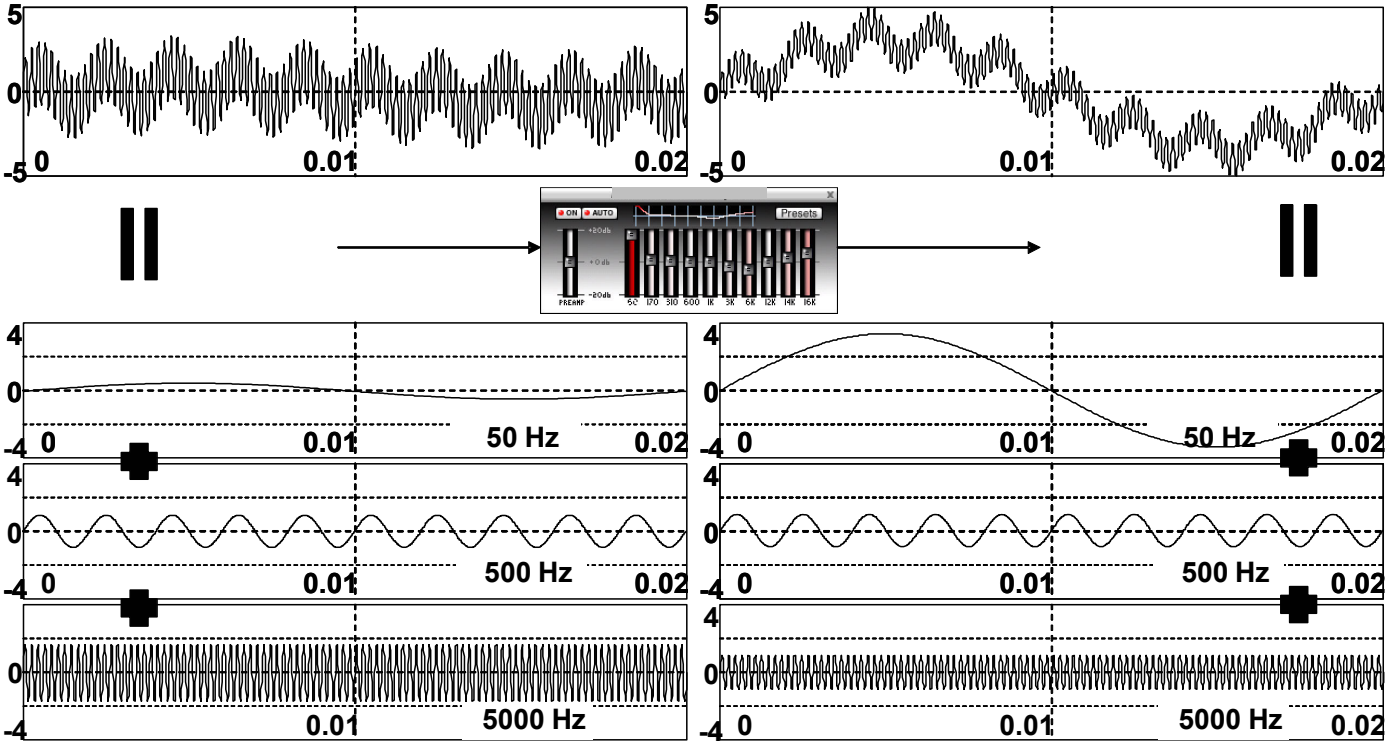
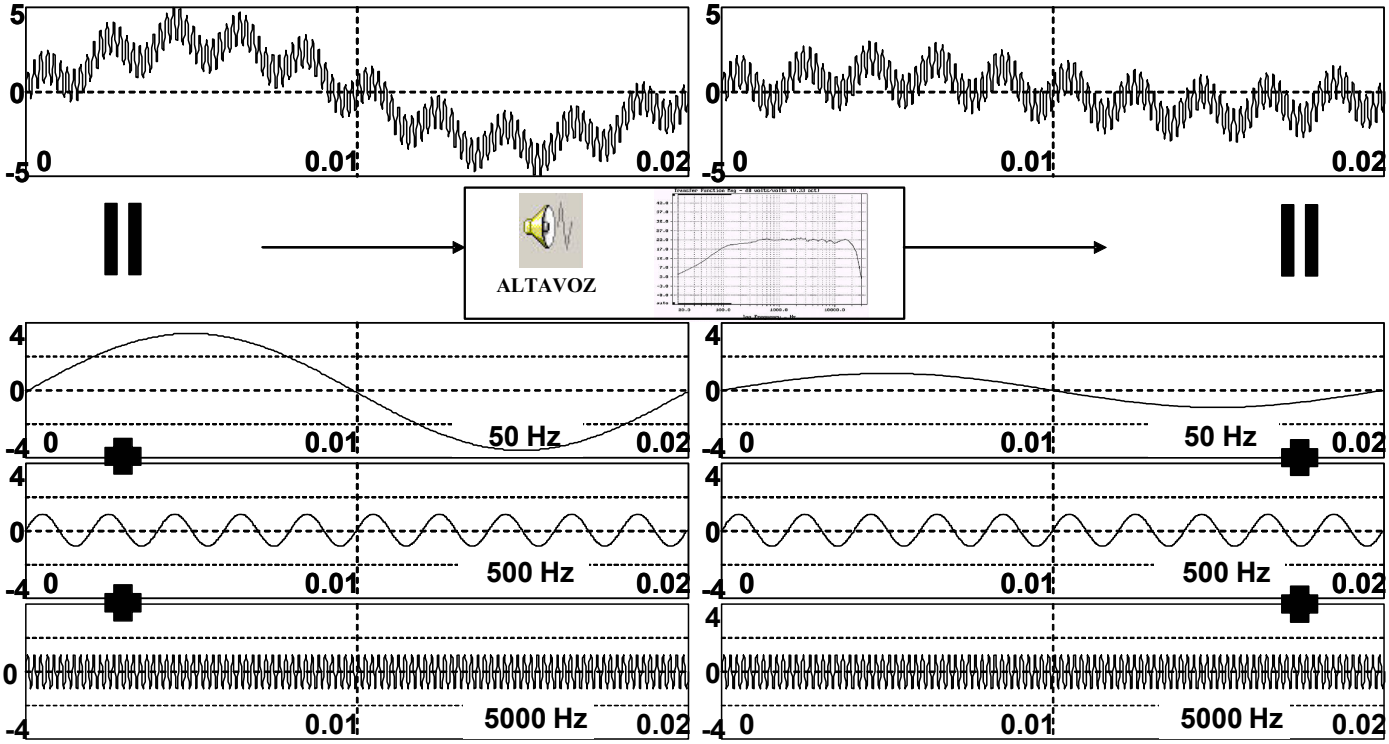
Ejemplo de aplicación del diagrama de Bode (I)



Ejemplo de aplicación del diagrama de Bode (II)



Ejemplo de aplicación del diagrama de Bode (III)



Ejemplo de aplicación del diagrama de Bode (IV)