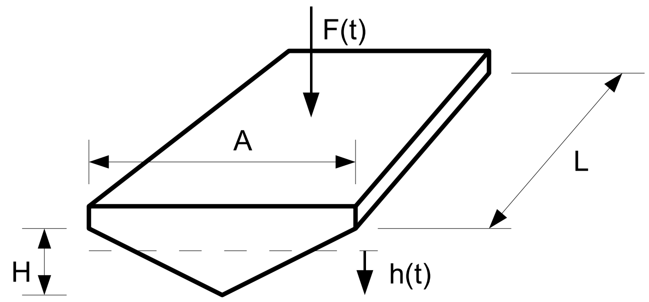
Problema

Una barcaza para transporte fluvial de carga tiene el aspecto y las dimensiones mostradas en la siguiente figura:

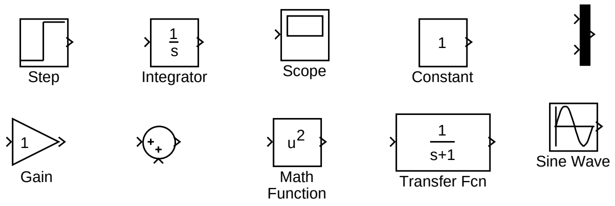


Sus dimensiones son: largo $L = 9\,\mathrm{m}$, ancho $A = 4\,\mathrm{m}$, altura de la parte triangular de la sección transversal $H = 1{,}5\,\mathrm{m}$, masa (barcaza descargada) $M = 4000\,\mathrm{kg}$. Otros datos: densidad del agua $\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$, aceleración de la gravedad $g = 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$. Se pide:

1. Obtener las ecuaciones que relacionan la altura de barcaza sumergida $h(t)$ con la fuerza vertical ejercida sobre ella $F(t)$ según se muestra en la figura (considerar barcaza sin carga).

2. Dibujar aproximadamente la evolución de la altura de barcaza sumergida $h(t)$ cuando se le quita un último elemento de carga de peso 5000 N, identificando claramente el valor de la frecuencia de oscilación de dicha respuesta. PISTA: no considerar los efectos de la carga en la masa del sistema.

3. Dibujar el esquema que se usaría para resolver el apartado anterior por simulación en Simulink, usando los siguientes elementos (repetidos tantas veces se necesite, no hace falta usarlos todos, representando en su interior los valores que tendrán).



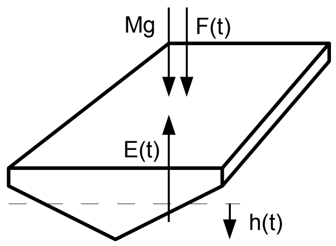
Principio de Arquímedes : Todo cuerpo sumergido en un fluído experimenta un empuje vertical y hacia arriba igual al peso del fluído desalojado.

Soluciones

Problema

Apartado 1

Aparte de $F(t)$, las únicas fuerzas que aparecen son el peso Mg y el empuje del agua $E(t)$, con los sentidos que se muestran en la figura:



El módulo de $E(t)$ es igual al peso de agua equivalente al volumen sumergido de la barcaza. Dicho volumen corresponde al de un prisma recto de base triangular, es decir, el producto del área del triángulo de la base:

$$\frac{Ah^2}{2H}$$

por la longitud del prisma L, quedando como peso total del volumen equivalente de agua, equivalente al empuje vertical, como:

$$E(t) = \frac{A\rho g L}{2H} h^2(t)$$

Aplicando $\sum F_i = ma$ al esquema de fuerzas anterior:

$$F(t) + Mg - E(t) = Ma_h(t)$$

siendo $a_h(t)$ la aceleración vertical con sentido positivo hacia abajo, y sustituyendo para que nos aparezcan sólo las variables que nos interesan, $F(t)$ y $h(t)$:

$$F(t) + Mg - \frac{A\rho g L}{2H} h^2(t) = M\frac{d^2h(t)}{dt^2}$$

Apartado 2

Se trata de un sistema no lineal debido al término con $h^2(t)$ y se está pidiendo la respuesta a un escalón $\Delta F(t)$ de amplitud $-5000N$ (se pasa de $F(t) = 5000$ a $F(t) = 0$). Podemos obtener una solución aproximada por linealización en torno al punto de equilibrio inicial. El punto de equilibrio inicial se obtiene por anulación de todas las derivadas, sabiendo que inicialmente la fuerza $F(t)$ vale $F_0 = 5000$:

$$F_0 + Mg - \frac{A\rho g L}{2H} h_0^2 = 0$$

y despejando queda:

$$h_0 = \sqrt{\frac{(F_0 + Mg)2H}{A\rho g L}} = 0{,}613\,\mathrm{m}$$

Hay que linealizar la ecuación:

$$\ddot{h}(t) - \frac{A\rho g L}{2HM}h^2(t) - \frac{1}{M}F(t) - g = 0$$

y por tanto nos queda una función de tres variables:

$$f(\ddot{h}, h, F) = 0$$

que linealizada:

$$\Delta\ddot{h}(t) - \frac{A\rho g L}{HM}h_0\Delta h(t) - \frac{1}{M}\Delta F(t) = 0$$

Ahora se puede obtener la función de transferencia correspondiente:

$$\frac{H(s)}{F(s)} = \frac{1/M}{s^2 + \frac{A\rho g L}{HM}h_0}$$

Se observa que tiene dos polos imaginarios conjugados $\pm j\omega$ de módulo:

$$\omega = \sqrt{\frac{A\rho g L}{HM}h_0} = 6\,\mathrm{rad/s}$$

que será precisamente la frecuencia angular de oscilación de la barcaza al retirar la carga, que además tendrá una amplitud (con signo) de oscilación igual a la ganancia estática multiplicada por el valor del escalón:

$$a = -5000 \cdot \frac{H}{A\rho g L h_0} = -0{,}0347\,\mathrm{m}$$

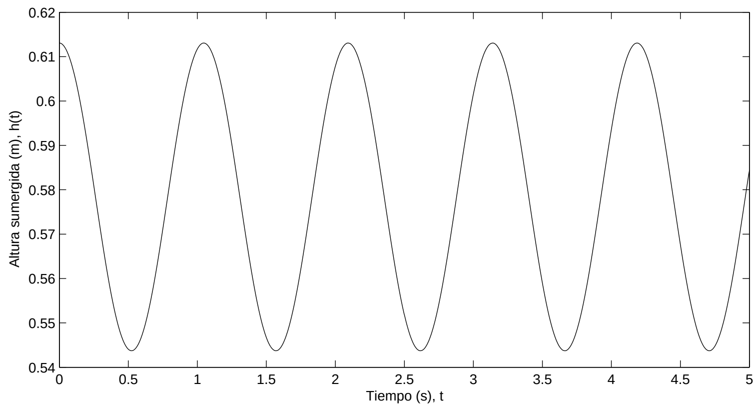
Y por tanto tendremos como respuesta:

$$\Delta h(t) = a[1 - \cos(\omega t)]$$

o lo que es lo mismo:

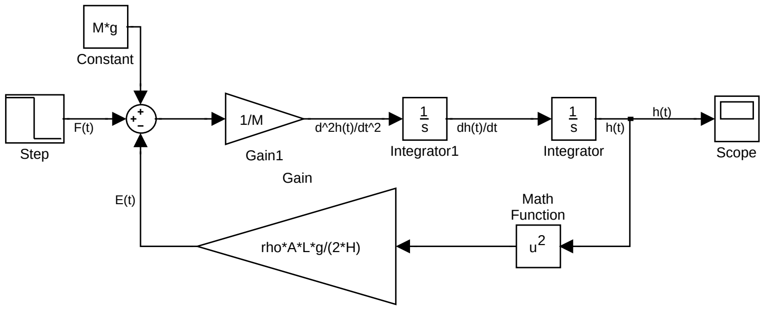
$$h(t) = h_0 + a - a\,\cos(\omega t)$$

y gráficamente:



Apartado 3

El esquema para simulación con Simulink del sistema no lineal puede ser el siguiente:



que se ha realizado en torno a los dos integradores en serie, para conseguir a la entrada de los mismos $\ddot{h}(t)$, entre ellos $\dot{h}(t)$, y a la salida $h(t)$. Como propiedades que no aparecen en el esquema, mencionar que es necesario poner F_0 como valor inicial del escalón, 0 como su valor final y h_0 como condición inicial del integrador de la derecha.