Problema

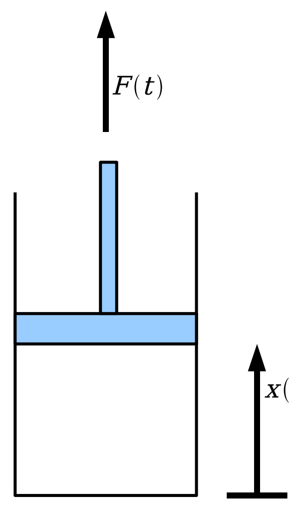
La siguiente figura muestra el esquema de un sistema dado por un cilindro de sección circular de área A, con un émbolo de masa m que se desliza por su interior, encerrando (sin posibilidad de salida) una cantidad de aire n. Sobre el émbolo es posible ejercer una fuerza $F(t)$ para desplazarlo y la posición del émbolo $x(t)$ viene dada como se muestra en la figura. Además, hay que tener en cuenta la siguiente información:

- La presión atmosférica externa P_a es constante.
- Existen unos efectos dinámicos de todos los fluídos presentes en el sistema (aire interno y externo, lubricante) cuya combinación puede modelarse como una única fuerza que se opone al movimiento del émbolo y es proporcional a la velocidad del mismo con una constante de proporcionalidad b.
- El aire encerrado, en cuanto a la relación entre presión P y volumen V, se comporta como un gas perfecto a temperatura (T) constante ($PV = nRT =$ cte.).

Se pide:

1. Obtener un modelo linealizado en torno al punto de equilibrio dado por $F = 0$.
2. Dibujar aproximadamente la evolución de la posición del émbolo cuando se le aplica bruscamente una fuerza $F = 50N$ partiendo del equilibrio con $F = 0$, especificando, tanto en la gráfica como numéricamente, el valor máximo de la respuesta, el instante de tiempo en el que se produce, y el valor de régimen permanente.

Datos: $A = 0{,}03\,\mathrm{m}^2$, $m = 10\,\mathrm{kg}$, $n = 1\,\mathrm{mol}$, $P_a = 101325\,\mathrm{Pa}$, $R = 8{,}3\,\mathrm{J/(K \cdot mol)}$, $T = 300\,\mathrm{K}$, $b = 50\,\mathrm{N \cdot s/m}$, $g = 9{,}8\,\mathrm{m/s}^2$. Nota: Despreciar el área de la sección del vástago frente a la del émbolo.

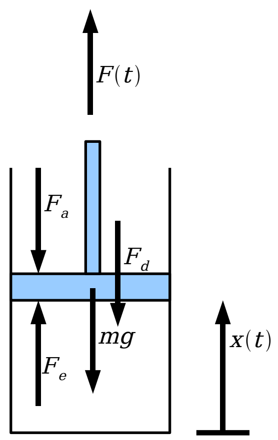


Soluciones

Problema

Apartado 1

Las fuerzas que aparecen en el sistema se muestran en la siguiente figura:



donde F_a es la fuerza ejercida sobre el émbolo por el aire de la atmósfera exterior, F_e es la fuerza ejercida por el aire encerrado, F_d es la fuerza debida a los efectos dinámicos combinados de los fluidos presentes y mg es el peso del émbolo. Se aplica la ecuación fundamental de la Dinámica:

$$\sum F_i = ma$$

obteniéndose para el sistema dado:

$$F + F_e - F_d - mg - F_a = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

La fuerza debida a la combinación de efectos dinámicos de los fluidos F_d es proporcional a la velocidad del émbolo con constante de proporcionalidad b:

$$F_d = b\frac{dx}{dt}$$

La fuerza del aire exterior se obtiene multiplicando la presión P_a por la superficie exterior en la que se aplica A (se desprecia el área del vástago, lo cual la hace igual a la superficie interior): $F_a = P_a \cdot A$. Lo mismo para el aire encerrado, pero en este caso la presión es P:

$$F_e = P \cdot A = \frac{nRTA}{V}$$

El volumen V del aire encerrado es variable con la posición x, $V(t) = Ax(t)$, que sustituido en la anterior ecuación proporciona una expresión con la fuerza F_e en función de x:

$$F_e = \frac{nRT}{x}$$

Al hacer todas las sustituciones, se obtiene la ecuación diferencial del sistema (no lineal por culpa del término con x(t) en el denominador y por el término independiente con el peso y la presión atmosférica):

$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) - nRT\frac{1}{x(t)} + mg + P_aA = F(t)$$

Para el cálculo del punto de equilibrio, se anulan las derivadas en la anterior ecuación, $\ddot{x}(t) = 0$ y $\dot{x}(t) = 0$, y despejando la x y haciendo F=0:

$$x_0 = \frac{nRT}{mg + P_aA}$$

donde se sustituyen valores, quedando $x_0 = 0{,}7936\,\mathrm{m}$.

Se trata por tanto de linealizar una función con cuatro variables:

$$f(\ddot{x}, \dot{x}, x, F) = 0$$

lo que da como resultado

$$m\Delta\ddot{x}(t) + b\Delta\dot{x}(t) + \frac{nRT}{x_0^2}\Delta x(t) = \Delta F(t)$$

Apartado 2

Se pide una aproximación de la respuesta a escalón (de amplitud 50), para lo cual se parte de la función de transferencia obtenida a partir del modelo linealizado:

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + nRT/x_0^2}$$

en la que se sustituyen los valores de las constantes, quedando:

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{10s^2 + 50s + 3954}$$

Se calculan los polos para tener una idea de la dinámica, obteniéndose $s = -2{,}5 \pm 19{,}73j$. Por lo tanto es un sistema estable de segundo orden subamortiguado (oscilatorio).

Para obtener el valor de régimen permanente se puede aplicar el teorema del valor final o bien a través de la ganancia. Por este segundo método se calcula la ganancia como:

$$K = G(0) = \frac{1}{3954} = 2{,}529 \cdot 10^{-4}$$

y luego el valor de régimen permanente de Δx como:

$$\Delta x_\infty = K \cdot \Delta F_\infty = 2{,}529 \cdot 10^{-4} \cdot 50 = 0{,}0126\,\mathrm{m}$$

Pero lo que interesa realmente es el valor de permanente de x:

$$x_\infty = x_0 + \Delta x_\infty = 0{,}8062\,\mathrm{m}$$

El instante del máximo en la respuesta es el tiempo de pico t_p, a partir de la parte imaginaria de los polos $\omega_d = 19{,}73$:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = 0{,}159\,\mathrm{s}$$

Por último, el valor máximo se obtiene a partir de la sobreoscilación M_p (en tanto por uno):

$$M_p = \mathrm{e}^{-\pi \frac{\sigma}{\omega_d}} = 0{,}6716$$

donde $\sigma = 2{,}5$ es el valor absoluto de la parte real de los polos. Y el valor de pico para Δx será por tanto:

$$M_p = \frac{\Delta x_p - \Delta x_\infty}{\Delta x_\infty} = 0{,}6716 \qquad \Rightarrow \qquad \Delta x_p = 0{,}0211\,\mathrm{m}$$

Pero, nuevamente, lo que interesa realmente es el valor máximo de x:

$$x_p = x_0 + \Delta x_p = 0{,}8147\,\mathrm{m}$$

Finalmente se representa de forma aproximada la respuesta, señalando todos los valores pedidos: