Problema 2 (6 puntos)

Un sistema de amortiguación no ideal cumple la siguiente ecuación diferencial que relaciona la fuerza $F(t)$ a la que se somete la masa suspendida con el desplazamiento de la misma $x(t)$:

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} + b\frac{dx(t)}{dt} + kx(t)^3 = F(t)$$

Se pide:

1. Obtener la ecuación del sistema linealizado en torno al punto de equilibrio dado por una fuerza $F_0 = -100$ N.
2. Obtener la respuesta aproximada del sistema ante una entrada $F(t) = -100 + 50\,\mathrm{sen}(3{,}6t)$.
3. Obtener las ecuaciones en espacio de estados del sistema linealizado.
4. Si el sistema se controla por medio de realimentación negativa unitaria con un regulador $C(s) = K/s$, con $K > 0$, dibujar su diagrama de Nyquist para $K = 1$ y obtener el margen de ganancia y el margen de fase. Indicar el rango de valores de K para el cual el sistema realimentado es estable.

Datos: $m = 100$, $b = 520$, $k = 8000$, todo en unidades del sistema internacional.

Soluciones

Problema 2

Apartado 1

Se trata de un sistema no lineal debido al término con x^3. Para linealizarlo, primero se determina totalmente el punto de equilibrio. Se toma la ecuación, se anulan las derivadas y las variables se particularizan para el punto de equilibrio (x_0, F_0):

$$0 + 0 + kx_0^3 = F_0$$

donde se despeja x_0, que es el valor desconocido:

$$x_0 = \sqrt[3]{\frac{F_0}{k}} = \sqrt[3]{\frac{-100}{8000}} = -0{,}232\,\mathrm{m}$$

A continuación se linealiza la ecuación, teniendo en cuenta que se trata de una función $f(\ddot{x}, \dot{x}, x, F) = 0$:

$$m\Delta\ddot{x} + b\Delta\dot{x} + 3kx_0^2\Delta x = \Delta F$$

y sustituyendo los valores numéricos:

$$100\Delta\ddot{x} + 520\Delta\dot{x} + 1293\Delta x = \Delta F$$

Apartado 2

La respuesta aproximada se obtiene del sistema linealizado, teniendo en cuenta que la entrada que se pide, pasada a $\Delta F(t)$ es:

$$\Delta F(t) = F(t) - F_0 = -100 + 50\,\mathrm{sen}(3{,}6t) - (-100) = 50\,\mathrm{sen}(3{,}6t)$$

Se trata, por tanto, de hallar primero la respuesta del sistema linealizado a una senoide de amplitud 50 y frecuencia angular 3.6. Dicha respuesta se obtiene a partir de la respuesta en frecuencia $G(j\omega)$ particularizando para $\omega = 3{,}6\,\mathrm{rad/s}$. Antes hay que obtener la función de transferencia:

$$G(s) = \frac{1}{100s^2 + 520s + 1293}$$

y posteriormente evaluar:

$$G(3{,}6j) = \frac{1}{100(3{,}6j)^2 + 520(3{,}6j) + 1293}$$

La respuesta resultante a la senoide se obtiene del módulo $|G(3{,}6j)| = 5{,}34 \cdot 10^{-4}$ y el argumento $\angle G(3{,}6j) \approx -90^{\circ} = -\pi/2\,\mathrm{rad}$:

$$\Delta x(t) = |G(3{,}6j)|\,50\,\mathrm{sen}(3{,}6t + \angle G(3{,}6j)) = 0{,}027\,\mathrm{sen}(3{,}6t - \pi/2)$$

Finalmente se obtiene $x(t)$:

$$x(t) = x_0 + \Delta x(t) = -0{,}232 + 0{,}027\,\mathrm{sen}(3{,}6t - \pi/2)$$

Apartado 3

Para obtener las ecuaciones en espacio de estados del sistema linealizado, puesto que en la ecuación no aparecen derivadas de la entrada $\Delta F(t)$, se puede tomar como variables de estado la salida $\Delta x(t)$ y sus sucesivas derivadas:

$$\begin{aligned} x_1 &= \Delta x \\ x_2 &= \Delta \dot{x} \end{aligned}$$

Por lo tanto, las derivadas de éstas serán:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \Delta \dot{x} = x_2 \\ \dot{x}_2 &= \Delta \ddot{x} \end{aligned}$$

y esta última se obtiene despejando en la ecuación del sistema:

$$\Delta \ddot{x} = -\frac{b}{m}\Delta \dot{x} - \frac{3kx_0^2}{m}\Delta x + \frac{1}{m}\Delta F = -\frac{b}{m}x_2 - \frac{3kx_0^2}{m}x_1 + \frac{1}{m}\Delta F$$

Con lo que ya tenemos las dos ecuaciones de estado, que puestas matricialmente:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3kx_0^2/m & -b/m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/m \end{pmatrix} \Delta F$$

a la cual sólo hay que añadir la ecuación de salida $\Delta x = x_1$, que en forma matricial:

$$\Delta x = (1\ 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

También se podría haber hecho por el desarrollo estándar de la forma canónica de control, con lo que hubiera resultado, para la ecuación de estado:

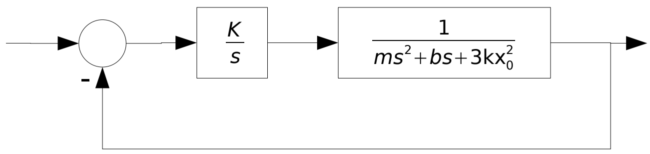
$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3kx_0^2/m & -b/m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Delta F$$

y para la ecuación de salida:

$$\Delta x = (1/m\ 0) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

Apartado 4

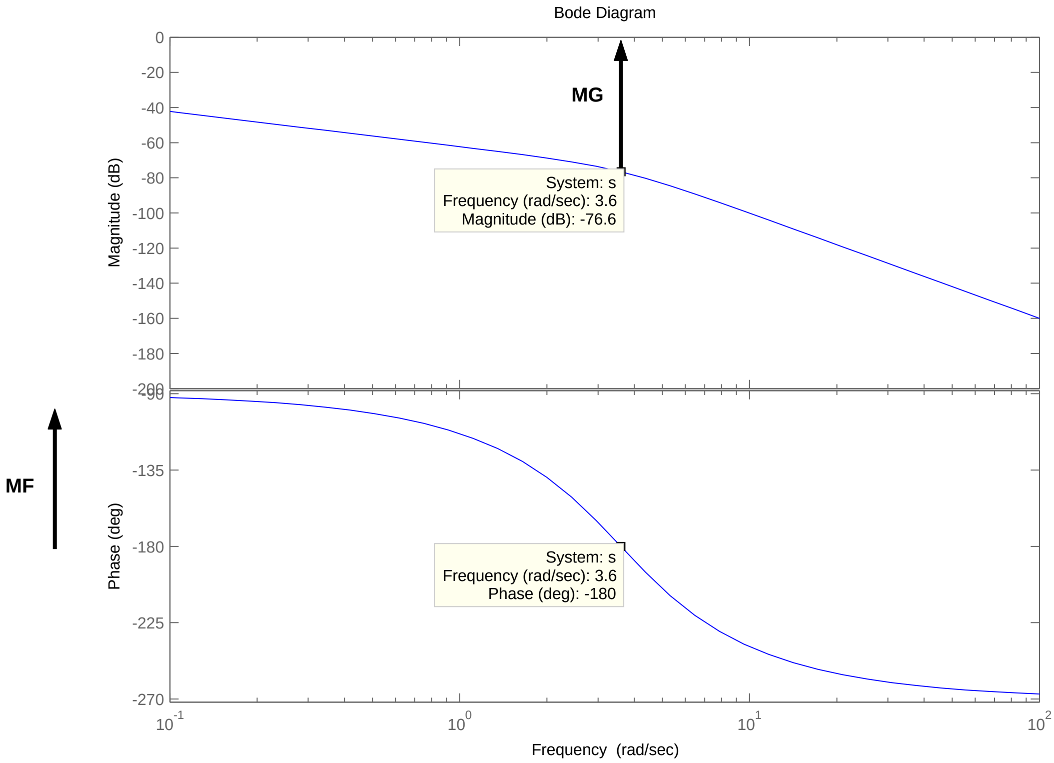
El sistema en cadena cerrada viene dado por el diagrama de bloques que se representa a continuación:



con lo cual el sistema en cadena abierta a utilizar para el análisis en frecuencia de estabilidad del sistema realimentado es (para $K = 1$):

$$C(s)G(s) = \frac{1}{s(100s^2 + 520s + 1293)}$$

El diagrama de Bode (real) de cadena abierta se representa a continuación, donde se ha resaltado el único punto de fase -180^o, que aparece a la frecuencia $\omega = 3{,}6\,\mathrm{rad/s}$, que en este caso coincide con la frecuencia ω_n del sistema $G(s)$:



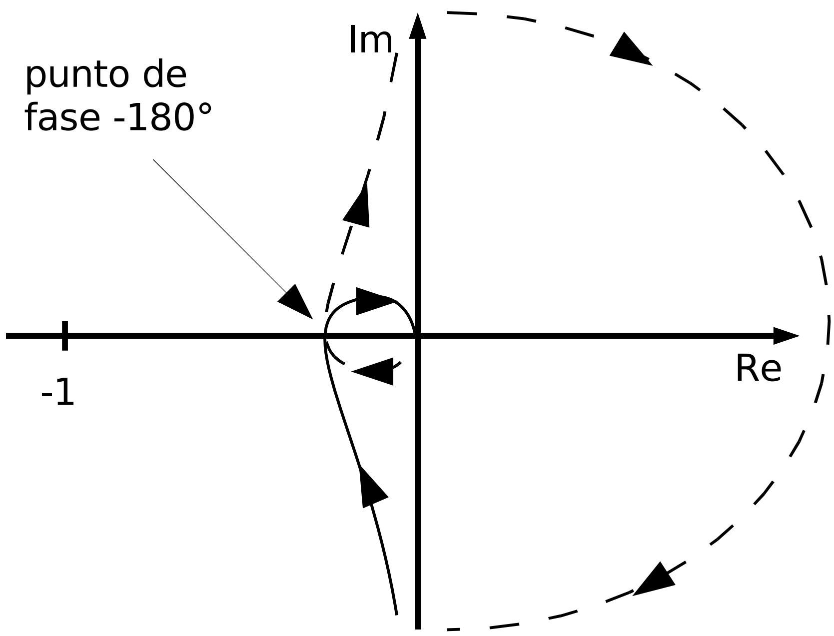
En el caso del diagrama de Bode asintótico, ese mismo punto de fase -180^o estaría a una ganancia:

$$-62{,}2 - 20\log_{10}\frac{3{,}6}{1} = -73{,}3\,\mathrm{dB}$$

donde el primer sumando corresponde a la ganancia estática de $G(s)$ (en dB) y el segundo a la caída causada por el polo en el origen entre las frecuencias $\omega = 1$ y $\omega = 3{,}6$.

A partir del Bode ya se puede obtener el margen de ganancia (sistema de fase mínima), que es la ganancia que le falta para alcanzar los 0 dB en el punto de fase -180^o y vale 73.3 dB en el asintótico y 76.6 dB en el real. También se puede obtener el margen de fase aunque el punto de ganancia 0 dB no aparezca en la gráfica (estaría más a la izquierda): la fase a frecuencias bajas tiende a -90^o y por lo tanto el margen de fase será de aproximadamente 90º (que sería la fase que habría que restar para alcanzar los -180^o con ganancia 0 dB.

En cuanto al diagrama de Nyquist, se obtiene el que se muestra a continuación:



donde el punto de fase -180^o señalado en la gráfica, importante para la determinación de la estabilidad en cadena cerrada, corresponde con $10^{-73{,}3/20} = 2{,}16 \cdot 10^{-4}$ para el caso del Bode asintótico y con $10^{-76{,}6/20} = 1{,}48 \cdot 10^{-4}$ para el caso del Bode real.

Tomando como base esa información, para el Bode asintótico se puede deducir que cuando $2{,}16 \cdot 10^{-4} K < 1$, es decir para $K < 4630$, el diagrama de Nyquist no rodea al -1 y por lo tanto $N = 0$. En ese caso $Z = N + P = 0 + 0 = 0$ y por lo tanto el sistema es estable en cadena cerrada. En cambio cuando $K > 4630$, el Nyquist da dos vueltas alrededor del -1 y por tanto $Z = N + P = 2 + 0 = 2$ y el sistema en cadena cerrada será inestable (tendrá dos polos en el semiplano complejo con parte real positiva). Para el Bode real podemos razonar análogamente usando el valor límite $1/1{,}48 \cdot 10^{-4} = 6757$.

NOTA: Es posible la determinación exacta del punto de fase -180° aun sin disponer del Bode real, con un sencillo cálculo haciendo uso de la información obtenida en el apartado 2, donde se calculó la ganancia de $G(s)$ a ese frecuencia $\omega = 3{,}6$:

$$20 \log_{10} 5{,}34 \cdot 10^{-4} - 20 \log_{10} \frac{3{,}6}{1} = -76{,}6\,\mathrm{dB}$$

donde el primer sumando corresponde a la ganancia de $G(s)$ para $\omega = 3{,}6$ y el segundo a la caída causada por el polo en el origen entre las frecuencias $\omega = 1$ y $\omega = 3{,}6$.