Problema 1 (5 puntos)

De cara al diseño de un sistema de control de balanceo de la carga en un puente grúa se desea estudiar el siguiente modelo dinámico, que describe la influencia de la posición x del puente grúa sobre el ángulo θ de la carga:

$$(I + m_p l^2)\ddot{\theta} = -b\dot{\theta} - m_p g l \sin\theta - m_p l \ddot{x} \cos\theta$$

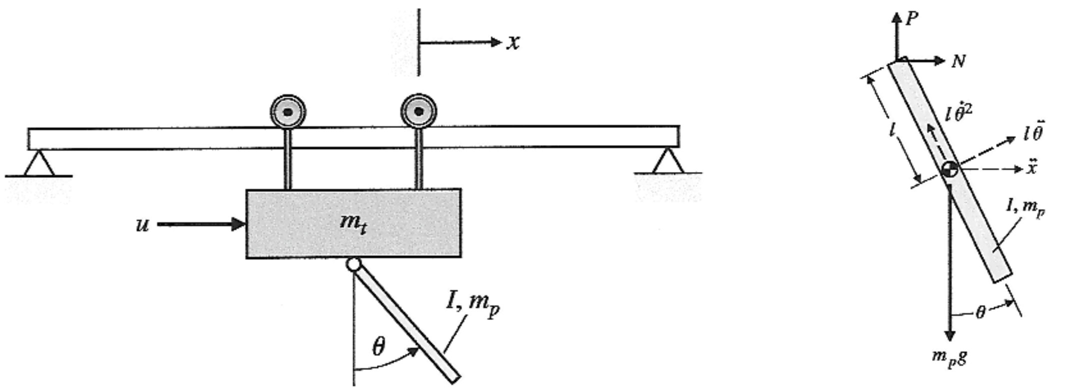


Figura 1: Puente grúa y diagrama de cuerpo libre de la carga (Fuente: *Feedback Control of Dynamic Systems (5e) Gene F. Franklin et al.*, ejemplo 2.18, pags. 55 y ss.)

donde I es el momento de inercia de la carga respecto a su centro de masa, m_p es la masa de la carga, g es la aceleración de la gravedad, b es el coeficiente de fricción viscosa y l es la distancia del eje al centro de masa de la carga. Se pide:

1. Linealizar la ecuación del movimiento para un punto de equilibrio definido por el puente grúa en estado de reposo en $x = 0$ y obtener la función de transferencia que relaciona la posición x del puente grúa con el ángulo θ de la carga.

2. Hallar la respuesta del sistema cuando el puente grúa se desplaza bruscamente desde la posición de reposo $x = 0$ hasta la posición $x = 1$.

3. Indicar si se produciría una colisión entre la carga y el soporte del puente grúa, situado en la posición $x = 3$.

4. ¿A qué frecuencia oscila la carga cuando se detiene el puente grúa?. Calcular también la frecuencia de oscilación en función de los parámetros del sistema despreciando el coeficiente de fricción viscosa ($b \approx 0$).

5. Considerando la fricción viscosa no despreciable ($b > 0$), ¿cómo afectarían cambios en la masa m_p y la longitud l de la carga al valor del ángulo θ en régimen permanente?.

Datos:

$$\begin{aligned} m_p &= 10\,\mathrm{kg} \\ g &= 10\,\mathrm{m/s^2} \\ b &= 5\,\mathrm{N \cdot m \cdot s} \\ l &= 2\,\mathrm{m} \\ I &= 1/3 \cdot m_p \cdot l^2 = 13{,}33\,\mathrm{kg \cdot m^2} \end{aligned}$$

Nota: los datos del texto en los que, por brevedad, no figuran las unidades se entenderá que están expresados en el SI.

1)

$$(I + m_p \cdot l^2)\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + m_p g l \operatorname{sen}\theta + m_p l \ddot{x} \cos\theta = 0$$

$$f(\ddot{\theta}, \dot{\theta}, \theta, \ddot{x}) = 0$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \ddot{\theta}}\right|_0 = I + m_p l^2$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \dot{\theta}}\right|_0 = b$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \theta}\right|_0 = m_p g l \cos\theta_0 + \cancel{m_p \cdot l \cdot \ddot{x}_0 (-\operatorname{sen}\theta_0)} \rightarrow 0$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \ddot{x}}\right|_0 = m_p l \cos\theta_0$$

$$(I + m_p l^2)\Delta\ddot{\theta} + b\Delta\dot{\theta} + m_p g \cdot l \cos\theta_0 \Delta\theta + m_p l \cos\theta_0 \Delta\ddot{x} = 0$$

Pto equilibrio:

$$X_0 = 0 \longrightarrow m_p g l \operatorname{sen}\theta_0 = 0 \rightarrow \theta_0 = 0$$

$$\frac{d}{dt} = 0$$

$$\left(I+m_p\cdot \ell^2\right)\cdot \Delta\ddot{\theta} + b\Delta\dot{\theta} + m_p g\cdot \ell\cdot \Delta\theta = -m_p \ell\cdot \Delta\ddot{x}$$

$$\Big\downarrow \mathcal{L} \text{ (cond. inic. nulas)}$$

$$\left(I+m_p\ell^2\right)\cdot s^2\,\theta(s) + b s\,\theta(s) + m_p g \ell\,\theta(s) = -m_p \ell s^2 X(s)$$

$$\theta(s) = \frac{-m_p\cdot \ell\cdot s^2}{\left(I+m_p\ell^2\right)s^2 + bs + m_p\cdot g\cdot \ell}\cdot X(s)$$

$$\downarrow$$

$$\theta(s) = \frac{-m_p \ell s^2}{\left(\frac{1}{3}m_p\ell^2 + m_p\ell^2\right)s^2 + bs + m_p g\cdot \ell}\, X(s)$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\theta(s) = \frac{-s^2\cdot \frac{3}{4\ell}}{s^2 + \frac{3b}{4m_p\ell^2}s + \frac{3g}{4\ell}}\cdot X(s)}$$

2) Sustituyendo:

$$G(s) = \frac{-0.375 \cdot s^2}{s^2 + 0.09375 \cdot s + 3.75}$$

$$y(s) = \frac{1}{\cancel{s}} \cdot \frac{-0.375 \cdot s^{\cancel{2}}}{s^2 + 0.09375 \cdot s + 3.75} =$$

$$= \frac{-0.375 \cdot s}{s^2 + 0.09375 \cdot s + 3.75} =$$

$$= \frac{A}{s + 0.0469 + 1.936j} + \frac{A^*}{s + 0.0469 - 1.936j}$$

$$A = \left. \frac{-0.375 \cdot s}{s + 0.0469 - 1.936j} \right|_{s = -0.0469 - 1.936j} = -0.1875 + 0.00454j$$

$$A^* = \text{-------------} = -0.1875 - 0.00454j$$

$$y(t) = A \cdot e^{+P_1 t} + A^* e^{+P_2 t}$$

$P_1 = -0.0469 - 1.936j$
$P_2 = -0.0469 + 1.936j$
$A = -0.1875 + 0.00454j$
$A^* = -0.1875 - 0.0045j$

En polares:

$$A = 0.1875 \angle -178.6^\circ = 0.1875 \angle 3.117 \text{ rads}$$

$$A^* = 0.1875 \angle +178.6^\circ = 0.1875 \angle -3.117 \text{ rads}$$

$$\boxed{y(t) = |A| \cdot e^{+j\angle A} \cdot e^{P_1 t}} + |A^*| \, e^{+j\angle A^*} \cdot e^{P_2 t} =$$

$$0.1875 \cdot e^{j3.117} \cdot e^{-0.0469t} \cdot e^{-j1.936t} +$$

$$+ 0.1875 \, e^{-j3.117} \cdot e^{-0.0469t} \cdot e^{+j1.936t}$$

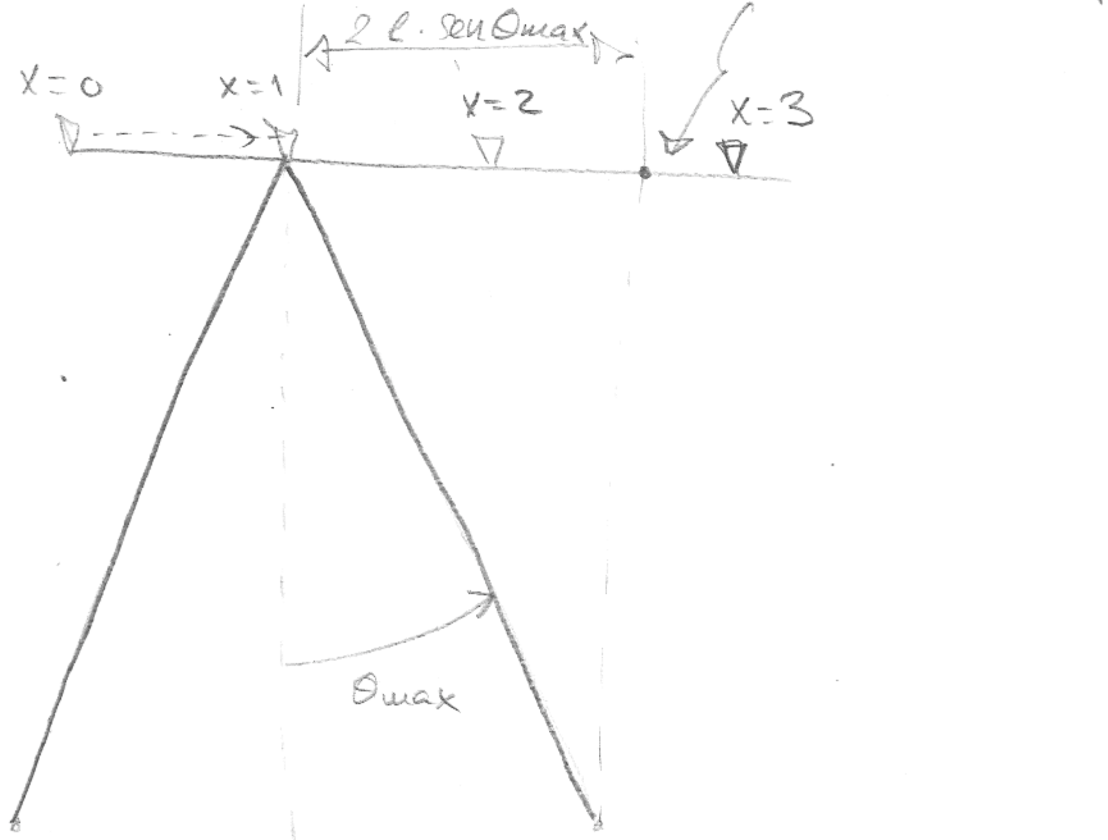
$$= 0.1875 \cdot e^{-0.0469t} \cdot \left(\frac{e^{j(1.936t-3.117)} + e^{-j(1.936t-3.117)}}{2} \times 2 \right)$$

$$\boxed{= 0.375 \cdot e^{-0.0469t} \cdot \cos(1.936t - 3.117)}$$

$$\boxed{= 0.375 \, e^{-0.0469t} \cdot \cos(1.936t - \underbrace{178.6^\circ}_{\text{(en grados)}})}$$

3] De la solución del apdo anterior se observa que el máximo desplazamiento producido es

$\theta_{max} = 0.375$ rads $\simeq 21.5^\circ$

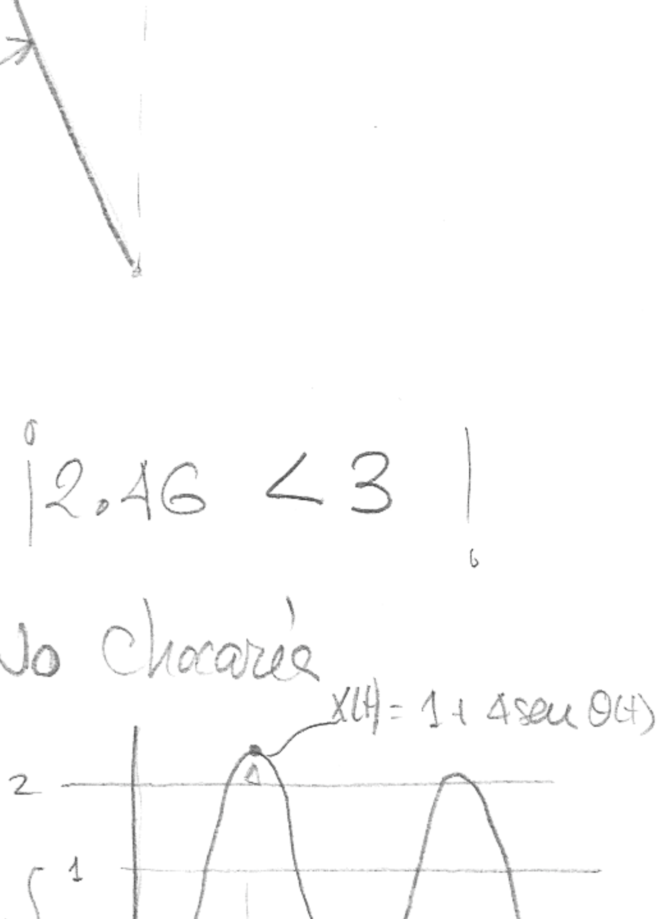


$\theta_{max} = 0.375$

$X_{max} \simeq 4 \cdot sen\, 0.375 + 1 = \boxed{2.46 < 3}$

No Chocaría

APROXIMACIÓN
estamos aproximando por el valor inicial de la envolvente. → Lado de la seguridad →



sería + exacto aún obtener el Xmax en este punto...

4] La frecuencia de oscilacion será

$$\omega = 1.936 \text{ rads/s} \rightarrow f = \frac{1.936}{2\pi} \simeq 0.31 \text{ Hz}$$

periodo $T \simeq 3.25$ seg.

Si suponemos $b = 0$ el pendulo oscila sin amortiguación y $\omega_d = \omega_n$

$$G(s) = \frac{-s^2 \cdot \frac{3}{4l}}{s^2 + \underbrace{\frac{3g}{4l}}_{\omega_n^2}}$$

$$\boxed{\omega_n = \sqrt{\frac{3g}{4l}}}$$ pulsacion (rads/s)

$$\boxed{f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3g}{4l}}}$$ frecuencia (Hz)

5] Por el teorema del valor final

$$\theta_{perm} = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{1}{s} \cdot G(s) = \lim_{s\to 0} \frac{-s^2 \cdot \frac{3}{4\ell}}{s^2 + \frac{3b}{4m_p\ell^2}s + \frac{3g}{4\ell}} =$$

$$= 0 \quad ¡\forall m_p > 0 \;\; \forall \ell > 0 !$$

$\downarrow$

¡Lógico!