

# Modelado de un péndulo

Análisis Dinámico de Sistemas (Teleco)

Área de Ingeniería de Sistemas y Automática

Escuela Politécnica Superior de Ingeniería Gijón

Universidad de Oviedo

14 de noviembre de 2006

## Resumen

El objetivo de la práctica es modelar el comportamiento dinámico de un péndulo, determinando a partir de las ecuaciones físicas un modelo no lineal que lo describe con precisión en todos sus puntos. Asimismo, se obtendrán mediante el procedimiento de linealización por Taylor, dos modelos lineales que lo aproximan en torno a sendos puntos de equilibrio. Tanto el modelo no lineal como los dos modelos linealizados se simularán mediante Simulink en distintos escenarios, comprobando la validez de las aproximaciones. Asimismo, se realizará una animación del péndulo que permitirá corroborar visualmente el sentido físico de los modelos obtenidos.

## 1. Descripción física del sistema

El sistema se compone de una bola de masa  $m$  situada en el extremo de una barra de masa despreciable con una longitud  $l$ . Además, se sabe que el momento de inercia del péndulo respecto a su punto de giro es  $J$ , el coeficiente de fricción viscosa es  $B$  y el par aplicado es  $T$ . El ángulo girado  $\theta$ , que será la variable de salida  $y$ , se toma según indica la figura 1.

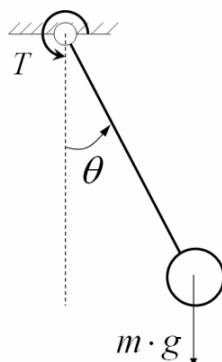


Figura 1: Sistema físico a modelar

## 2. Modelado matemático

### 2.1. Ecuación física del sistema

El ángulo  $\theta$  queda determinado por la ecuación (1). El par  $T$  aplicado sobre el péndulo se invierte en incrementar la aceleración angular, en vencer la fricción viscosa y en compensar el par generado por el peso del sistema.

$$T = J \cdot \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + B \cdot \frac{d\theta(t)}{dt} + m \cdot g \cdot l \cdot \text{sen } \theta(t) \quad (1)$$

Esta ecuación diferencial no lineal de segundo orden describe el comportamiento dinámico del péndulo.

### 2.2. Ecuaciones del espacio de estados

Una representación alternativa a la ecuación diferencial (1) es la representación interna o de espacio de estados. En muchos sistemas físicos una elección adecuada consiste en tomar como variables de estado la salida y sus derivadas. En este caso tomaremos el ángulo girado  $\theta$  y la velocidad angular, según:

$$\begin{aligned} x_1 &= \theta(t) \\ x_2 &= \dot{\theta}(t) \end{aligned}$$

Las ecuaciones del espacio de estados serán:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (2)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{J} \cdot [-B \cdot x_2 - m \cdot g \cdot l \cdot \text{sen } x_1 + T] \quad (3)$$

$$y = x_1 \quad (4)$$

### 2.3. Diagrama de bloques del sistema

A partir de las ecuaciones anteriores se puede obtener fácilmente el diagrama de bloques de la figura 2 que define la variable de salida  $\theta$  ante una entrada de par  $T$ .

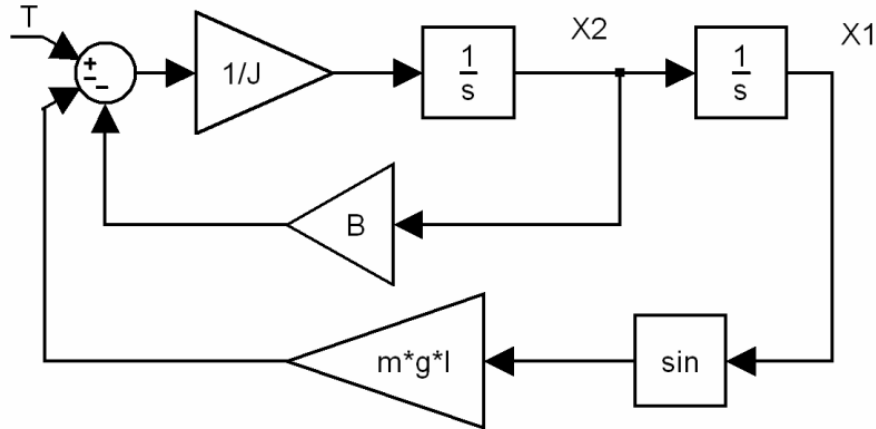


Figura 2: Diagrama de bloques

### 3. Simulación del modelo

Los valores de las constantes que definen al sistema son:

```
l = 1;           % longitud en metros
B = 2;           % coef. de fricción viscosa en N.m / (rads/s)
g = 9.8;         % aceleración de la gravedad m.s2
m = 3;           % masa en kg
J = m*l2;       % momento de inercia en kg.m2
```

Para proceder a la simulación del péndulo se usa la herramienta Simulink de MATLAB. La implementación tiene el aspecto mostrado en la figura 3. Hay que tener en cuenta que las condiciones iniciales quedan determinadas por los valores iniciales de los integradores. Asimismo, la presencia de integradores simplifica la obtención de las derivadas y la elección de las variables de estado.

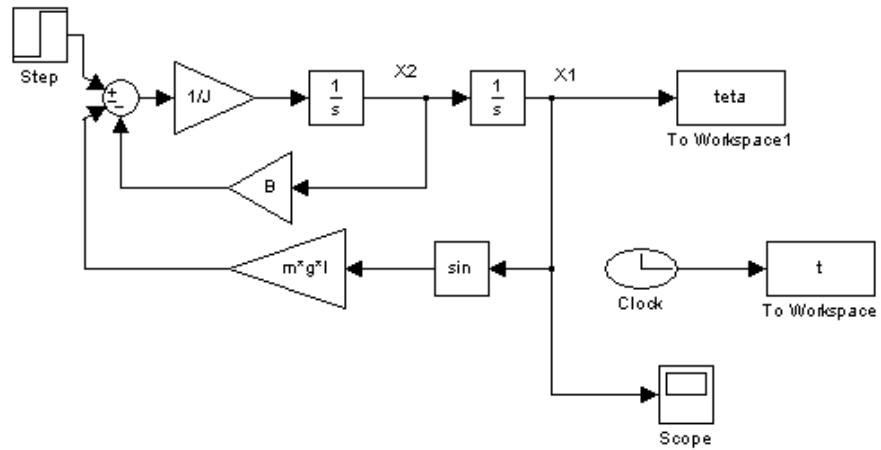


Figura 3: Simulación del péndulo usando Simulink

Además, se puede simular de una forma más visual la evolución del péndulo ejecutando el siguiente script.

```
figure(1); for k=1:length(t.signals.values);
    plot([0,1*exp(j*(teta.signals.values(k)-(pi/2)))], 'o-');
    axis equal;
    axis(1.2*[-1 1 -1 1]);
    grid on;
    drawnow;
end
```

Obsérvese que se ha introducido el elemento *clock* en el esquema de Simulink para generar el vector de tiempos almacenándolo en el *workspace*. Además, para una correcta animación mediante ejecución del código anterior es necesario ajustar los parámetros de simulación a un periodo fijo de cálculo eligiendo como algoritmo *ode4* (que permite definir un paso de simulación constante) tal cómo se indica en la figura 4.

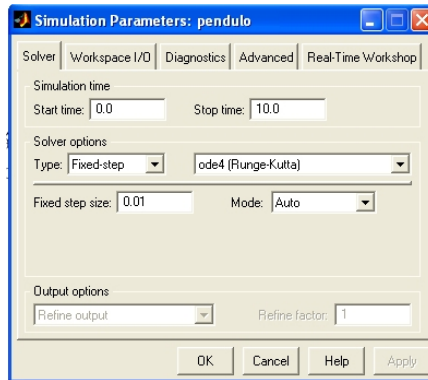


Figura 4: Parámetros de simulación

## 4. Objetivos

El alumno deberá realizar las siguientes tareas:

1. Determinar mediante Simulink la evolución del sistema cuando se introduce durante 2 segundos un par de  $T = 10\text{Nm}^2$ . Obtener una representación gráfica de la evolución a lo largo del tiempo del ángulo girado  $\theta$ .
2. Simular la evolución del péndulo cuando se deja en movimiento libre ( $T = 0$ ), partiendo las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned}\theta(0) &= \pi/2 \\ \dot{\theta}(0) &= 5 \text{ rad/s}\end{aligned}$$

3. Realizar animación gráfica del péndulo mediante un script de MATLAB similar al descrito en el enunciado.
4. Variar los parámetros  $m$ ,  $l$ ,  $g$  y  $B$ . Obsérvese su influencia en la frecuencia de oscilación y en la respuesta  $\theta$ .
5. Obtener mediante el procedimiento de linealización por Taylor, modelos lineales en torno a los puntos de equilibrio definidos por  $\theta(0) = 0$  y  $\theta(0) = \pi/2$  e introducirlos en Simulink como funciones de transferencia. Comparar la simulación de los modelos linealizados con la del modelo original para zonas de trabajo próximas y para zonas alejadas de los respectivos puntos de equilibrio.