

Determinación experimental de la respuesta en frecuencia

Análisis Dinámico de Sistemas (Teleco)
Área de Ingeniería de Sistemas y Automática
Escuela Politécnica Superior de Ingeniería Gijón
Universidad de Oviedo

11 de diciembre de 2006

1. Objetivos de la práctica

Se trata de analizar la respuesta ante señales de frecuencia variable de sistemas lineales de primer y segundo orden constituidos por módulos electrónicos.

Los objetivos de la práctica serán:

- Obtención experimental de la respuesta frecuencial de un sistema.
- Extracción experimental de las principales magnitudes que caracterizan la respuesta en frecuencia.
- Identificación del sistema y establecimiento de relaciones entre la respuesta temporal y frecuencial.

2. Repaso de los conceptos teóricos

Los sistemas lineales estables cumplen la siguiente propiedad fundamental: ante una entrada senoidal tienen, en régimen permanente, una salida senoidal de la misma frecuencia, ω , que la entrada:

$$u(t) = R \sin(\omega t) \quad \Rightarrow \quad y(t) = R' \sin(\omega t + \Phi) \quad (1)$$

En cambio la amplitud, R' , y la fase, Φ , de la salida serán en general diferentes de las de la entrada. La relación entre las amplitudes y fases de las señales de entrada y de salida depende de la **función de transferencia** $G(s)$ del sistema:

$$\begin{aligned} R' &= R \cdot \|G(j\omega)\| \\ \Phi &= \angle G(j\omega) \end{aligned} \quad (2)$$

Es decir, la representación de amplitud y de fase **para todas las frecuencias** proporciona una información equivalente a la de la función de transferencia.

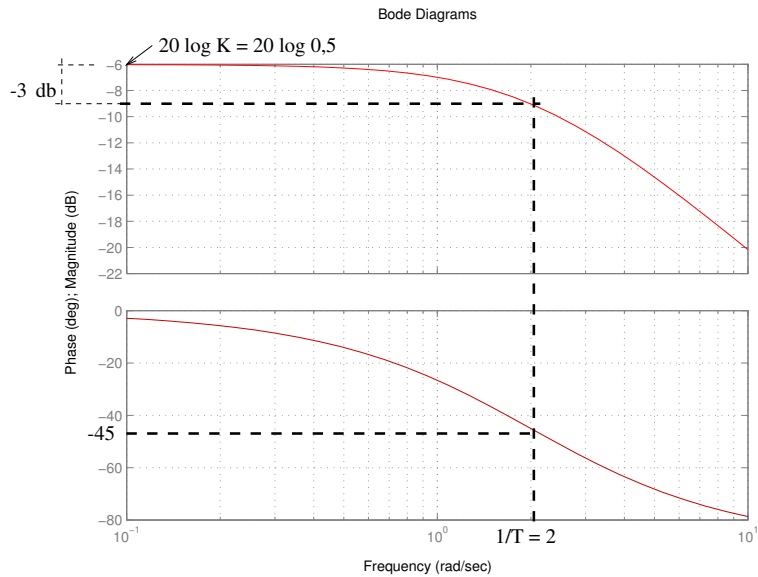


Figura 1: Respuesta en frecuencia (Bode) de un sistema lineal de primer orden ($K = 0,5, T = 0,5$)

Y su obtención experimental es sencilla: basta con "barrer" al sistema con entradas senoidales de diferentes frecuencias.

Entre las diferentes maneras de graficar los valores de amplitud, fase y frecuencia es especialmente útil el denominado **diagrama de Bode**, que consta de dos gráficas, una de amplitud en escala de decibelios y otra de fase, frente a la frecuencia en escala logarítmica.

2.1. Bode del sistema de primer orden

El sistema lineal de primer orden más sencillo depende sólo de dos parámetros: **ganancia**, K , y **constante de tiempo**, T , con función de transferencia:

$$G(s) = \frac{K}{Ts + 1} \quad (3)$$

En su diagrama de Bode, tal como recoge la figura 1, ambos parámetros aparecen de manera explícita.

2.2. Bode del sistema de segundo orden

El sistema lineal de segundo orden más sencillo se caracteriza por tres parámetros, (K, ζ, ω_n) :

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (4)$$

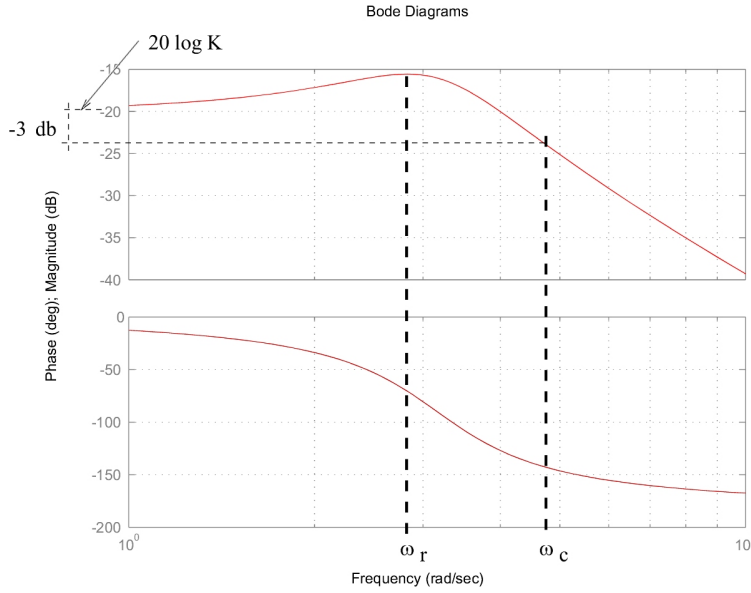


Figura 2: Típica respuesta frecuencial (Bode) de un sistema lineal de segundo orden (respuesta subamortiguada, ($K = 0,1, \zeta = \frac{1}{\sqrt{10}} = 0,316, \omega_n = \sqrt{10} = 3,162$)).

La respuesta en frecuencia de un sistema de segundo orden tiene típicamente la forma que recoge la figura 2. Los parámetros más representativos de la respuesta en frecuencia son:

1. Pico o cresta de resonancia (M_r): valor máximo de la magnitud de la respuesta en frecuencia.
2. Frecuencia de resonancia (ω_r): frecuencia a la que ocurre el pico de resonancia.
3. Frecuencia de corte (ω_c) o Ancho de banda (BW): frecuencia en la cual la magnitud de la respuesta en frecuencia está 3 dB debajo de su valor de frecuencia cero.

A diferencia del sistema de primer orden, la influencia de los tres parámetros (K, ζ, ω_n) en la respuesta representada en la figura 2 no es directa, sino que se sustancia a través de las siguientes expresiones:

$$M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (5)$$

$$\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2} \quad (6)$$

para valores de $0 < \zeta < 0,707$, y siendo M_r el pico de resonancia y ω_r la

frecuencia de resonancia. Las gráficas de la figura 3 representan respectivamente las relaciones (5) y (6).

3. Método práctico. Trabajo a desarrollar en la práctica

3.1. Bode experimental del sistema de primer orden

A continuación se describe detalladamente paso a paso el método para el análisis en frecuencia con el sistema de primer orden:

1. Ajustar el potenciómetro que constituye la resistencia de carga del condensador en el módulo electrónico de primer orden y que caracteriza la constante de tiempo T de este sistema. A partir de este momento **no debe modificar nunca más** la posición de este potenciómetro.
2. Conexionar la onda senoidal de la salida del generador de señales como señal de entrada $u(t)$ al sistema electrónico de primer orden. Conectar un canal del osciloscopio a la entrada del sistema para medir $u(t)$ y el otro canal a su salida para obtener $y(t)$.
3. Proceder a realizar un barrido frecuencial. Al aumentar progresivamente la frecuencia de la entrada se obtiene una progresiva disminución de la amplitud de la señal de respuesta $y(t)$ del sistema y, además, la fase de la respuesta se encuentra en retraso respecto a su entrada $u(t)$. Este hecho experimental concuerda con su Bode asintótico en la figura 4.
4. Para dibujar este Bode asintótico se seleccionan dos frecuencias representativas. La primera se encontraría en las bajas frecuencias para las cuales el desfase entre entrada y salida debe ser cercano a 0° y para nuestro sistema en particular (un RC) se obtiene la misma amplitud en la entrada y salida (por lo que $K=1$ o 0 dB).
5. La segunda frecuencia representativa se encontraría a altas frecuencias cuando la respuesta está significativamente atenuada. De esta forma la medida obtenida se puede considerar que pertenece a la asíntota de atenuación de 20 dB/década. Se podría trazar ya esta asíntota en el Bode. Por tanto, se aumenta la frecuencia de la señal senoidal de entrada. La forma de obtener cada punto del Bode se describe a continuación.
6. Hay que obtener las siguientes medidas en el osciloscopio mostradas en la figura 5:
 - Valor pico a pico de la señal de entrada u_{pp} .
 - Valor pico a pico de la señal de salida y_{pp} .
 - Periodo ($T_{señal}$) de la señal de entrada o de la de salida (es el mismo).
 - Tiempo de retardo ($t_{retardo}$) entre la señal de entrada y la de salida.

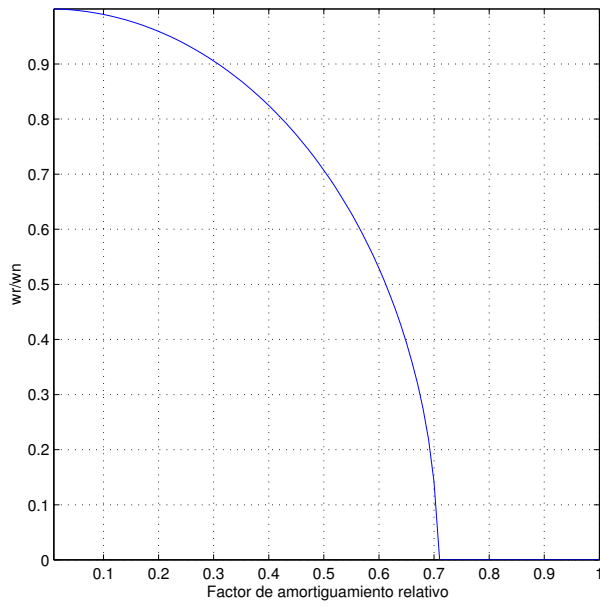
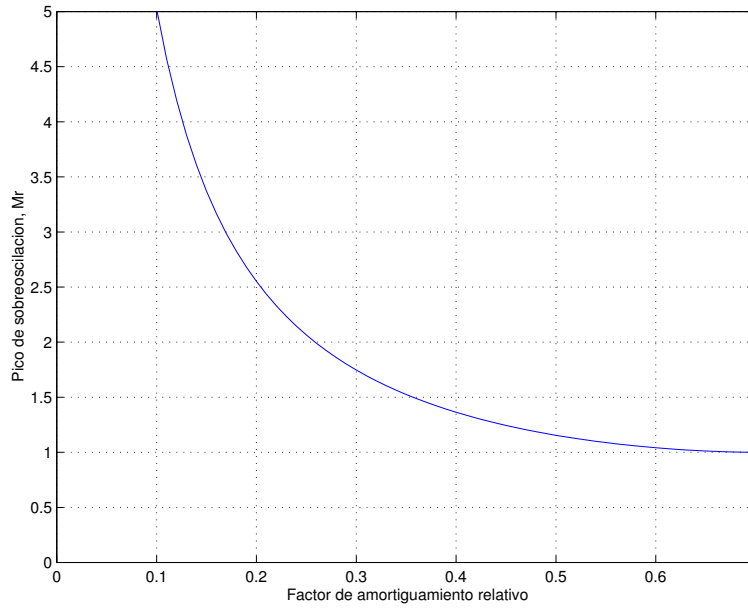


Figura 3: Representación gráfica de las expresiones (5) y (6).

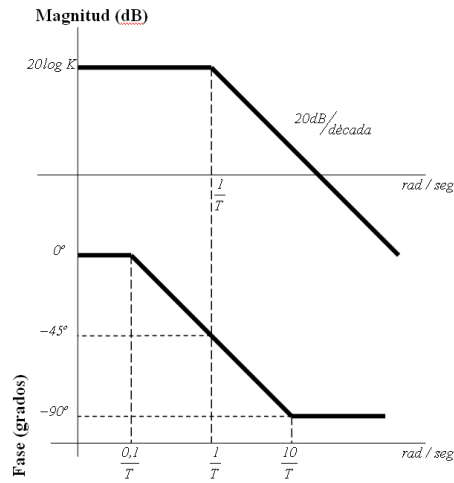


Figura 4: Bode asintótico

De esta forma se pueden obtener:

- Relación de amplitudes o magnitud en dB:

$$A = 20 \log \frac{y_{pp}}{u_{pp}} \quad (7)$$

- Desfase de señal de salida respecto a la entrada:

$$\Phi = \frac{360^\circ \cdot t_{retardo}}{T_{señal}} \quad (8)$$

- Frecuencia angular correspondiente a estos valores A y Φ :

$$f_{señal} = \frac{1}{T_{señal}} \Rightarrow \omega = 2\pi f_{señal} \quad (9)$$

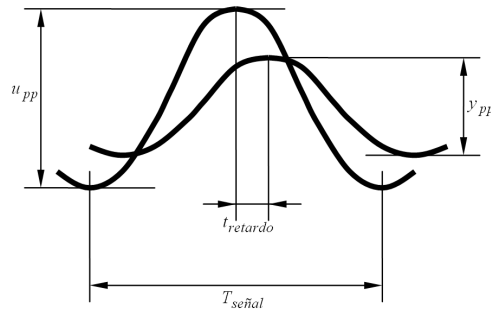


Figura 5: Método práctico

7. Para buscar la frecuencia de corte (la correspondiente a un descenso de 3 dB en la magnitud respecto a su valor a frecuencia cero) se puede hacer lo siguiente (teniendo en cuenta que en nuestro caso $A_{frecuenciacero} = 0$):

$$A_{frecuenciacero} - 3 = 20 \log \frac{y_{pp}}{u_{pp}} \Rightarrow \frac{-3}{20} = \log \frac{y_{pp}}{u_{pp}} \Rightarrow y_{pp} = 0,7079 \cdot u_{pp} \quad (10)$$

Cuando se está en la frecuencia de corte se cumple (10). Al ser u_{pp} dato, para encontrar la frecuencia de corte simplemente hay que ajustar la frecuencia de la señal de entrada hasta lograr que el valor pico a pico de la señal de salida y_{pp} cumpla (10). Una vez encontrada la frecuencia de corte f_{corte} se obtiene $T_{señal}$ con lo que:

$$f_{corte} = \frac{1}{T_{señal}} \Rightarrow \omega_{corte} = 2\pi f_{corte} \quad (11)$$

Además se mide el $t_{retardo}$ para obtener Φ que debe ser muy próximo a -45° .

8. Ahora ya se puede identificar el sistema haciendo uso de la frecuencia angular de corte ω_{corte} :

$$T = \frac{1}{\omega_{corte}} \quad (12)$$

siendo T la constante de tiempo del sistema de primer orden.

9. El sistema de primer orden es un RC. Sabiendo esto se puede decir y obtener experimentalmente que ante un aumento de la resistencia R del potenciómetro la constante de tiempo T aumenta y, por tanto, la frecuencia de corte disminuye. Experimentalmente se observa viendo que la amplitud de la salida disminuye al girar en sentido antihorario el potenciómetro por lo que la resistencia R aumenta girando el potenciómetro en sentido antihorario.
10. A modo de comprobación de resultados, se puede identificar el mismo sistema de primer orden a partir de la constante de tiempo T medida ante entrada escalón (en nuestro caso usando la señal cuadrada del generador de señales).

3.2. Bode experimental del sistema de segundo orden

A continuación se describe detalladamente paso a paso el método para el análisis en frecuencia con el sistema de segundo orden:

1. Ajustar los potenciómetros \mathbf{M}_p y \mathbf{w}_n que caracterizan el sistema de segundo orden. Dar un valor adecuado al potenciómetro \mathbf{M}_p que asegure $0 < \zeta < 0,707$. A partir de este momento **no se deben modificar nunca más** las posiciones de estos potenciómetros \mathbf{M}_p y \mathbf{w}_n .
2. Conexionar la onda senoidal de la salida del generador de señales como señal de entrada $u(t)$ al sistema electrónico de segundo orden. Conectar un canal del osciloscopio a la entrada del sistema para medir $u(t)$ y el otro canal a su salida para obtener $y(t)$.
3. Proceder a realizar un barrido frecuencial. Al aumentar progresivamente la frecuencia de la entrada se obtiene inicialmente un progresivo aumento de la amplitud de la señal de respuesta $y(t)$ del sistema para posteriormente obtener una progresiva atenuación de la señal. La fase de la respuesta se encuentra en retraso respecto a su entrada $u(t)$. Este hecho experimental concuerda con el Bode de ejemplo visto en la figura 2.
4. A bajas frecuencias hay prácticamente la misma amplitud entre entrada y salida ($K=1$) y desfase cero.
5. Calcular puntos del diagrama de Bode usando el procedimiento descrito para el sistema de primer orden en el punto 6.
6. Obtener el punto correspondiente a la frecuencia de resonancia f_r cuando la amplitud de la salida es máxima. Se obtiene:

$$M_r = \frac{y_{pp}}{u_{pp}} \quad (13)$$

$$\omega_r = 2\pi f_r \quad (14)$$

Con el valor de M_r y ω_r obtenidos de (13) y (14) respectivamente se entra en las gráficas de la figura 3 y se obtiene ζ y ω_n . Finalmente se recomienda identificar el mismo sistema de segundo orden a partir de la sobreoscilacion M_p y tiempo de pico medido ante entrada escalón.

Hoja de resultados

Cuadro 1: Mediciones para obtener el Bode del sistema de primer orden

$T_{señal}$ [s]	$f = \frac{1}{T_{señal}}$ [Hz]	$\omega = 2\pi f$ [rad/s]	u [V]	y [V]	$A = 20 \log \frac{y_{pp}}{u_{pp}}$ [db]	$t_{retardo}$ [s]	Φ [grad]

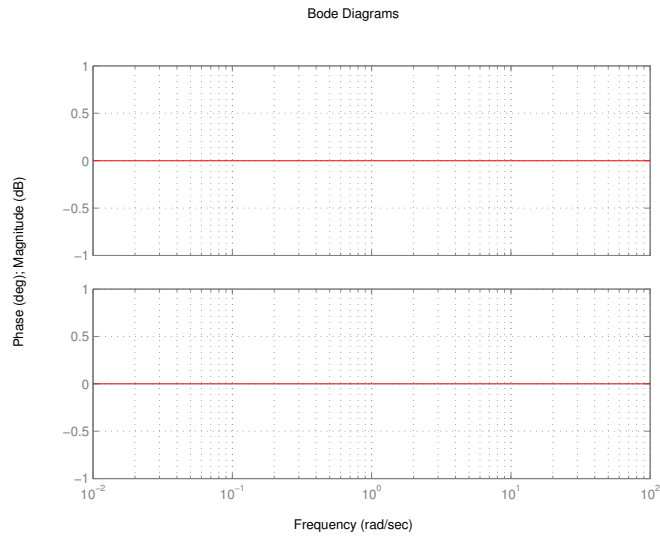


Figura 6: Respuesta en frecuencia (Bode) del sistema de primer orden

Cuadro 2: Mediciones para obtener el Bode del sistema de segundo orden

$T_{señal}$ [s]	$f = \frac{1}{T_{señal}}$ [Hz]	$\omega = 2\pi f$ [rad/s]	u [V]	y [V]	$A = 20 \log \frac{y_{pp}}{u_{pp}}$ [db]	$t_{retardo}$ [s]	Φ [grad]

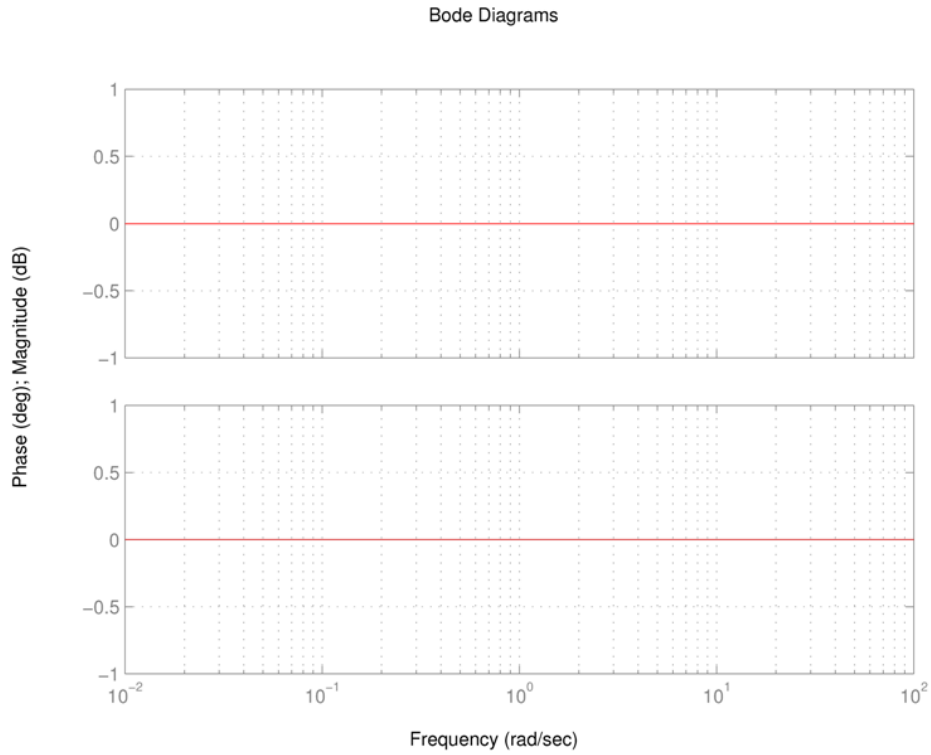


Figura 7: Respuesta en frecuencia (Bode) del sistema de segundo orden