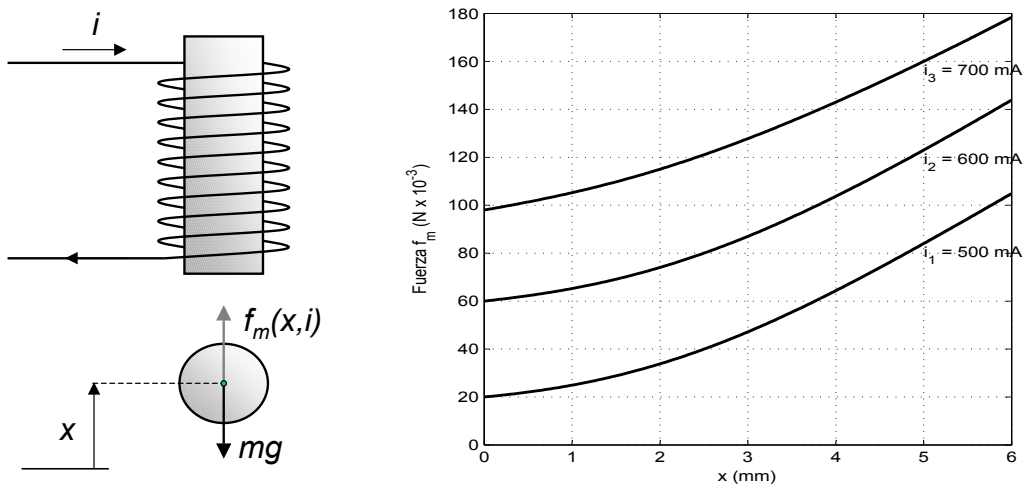


Problema 1. En la figura 1, se muestra un modelo simplificado de un cojinete de levitación magnética empleado en turbomaquinaria de alta potencia. En este tipo de cojinetes, el campo magnético es energizado empleando métodos de control, de manera que el eje está siempre en el centro y nunca toca los imanes, manteniendo de esta manera la fricción en niveles casi inexistentes. La ecuación del movimiento vertical de la bola en el modelo simplificado puede describirse de acuerdo con la ley de Newton

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = f_m(x, i) - mg$$

donde $x(t)$ representa la posición vertical de la bola, $i(t)$ es la corriente del electroimán, m es la masa de la bola, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ es la aceleración de la gravedad y $f_m(x, i)$ es la fuerza originada por el electroimán. Esta fuerza cae con una ley inversa a la distancia de la bola al imán cuyos valores experimentales se recogen en el gráfico situado a la derecha de la figura 1.



Esquema simplificado del sistema de levitación magnética.

Fuerza originada por el electroimán.

Figura 1: Sistema simplificado de levitación magnética.

Se pide:

- Obtener un modelo lineal del sistema para una bola de masa $8.4 \times 10^{-3} \text{ kg}$, en torno a un punto de trabajo correspondiente a una corriente $i = 600 \text{ mA}$.
- Describir la dinámica del sistema.
- Con el objeto de controlar el sistema se decide implementar un regulador de función de transferencia $R(s) = 840 \frac{s+87}{s+166}$ empleando en la realimentación un captador de ganancia 1 A/m y constante de tiempo despreciable.
 - Dibujar el diagrama estructural y el diagrama de bloques, indicando todas las variables involucradas. Elaborar una lista de posibles perturbaciones que pueden alterar el sistema de control.
 - Razonar sobre la estabilidad absoluta y relativa del sistema realimentado.

Problema 2. La velocidad de desplazamiento $v(t)$ en m/s de un vehículo teledirigido varía con la tensión de inducido $u(t)$ (voltios) de acuerdo con la siguiente función de transferencia:

$$\frac{V(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{K_m}{(s+a)(s+b)}, \quad a > b > 0$$

Se desea implementar un sistema de control de velocidad desde la estación de control. Para ello, se envía por radio al vehículo una señal de consigna $u^*(t)$ para la tensión $u(t)$ que es aplicada directamente al motor, con ganancia 1 y respuesta instantánea, mediante un amplificador instalado en el propio vehículo.

El vehículo dispone asimismo de un sistema de posicionamiento global (GPS) que proporciona una medida $\hat{v}(t)$ del valor de la velocidad de desplazamiento $v(t)$ en m/s de ganancia unitaria con una constante de tiempo T segundos y lo retransmite vía radio a la estación de control. Para implementar el control se realimenta la señal de velocidad disponible $\hat{v}(t)$ y se compara con la referencia de velocidad $r(t)$ aplicándose un control de tipo proporcional

$$u^*(t) = K_r(r(t) - \hat{v}(t))$$

Se pide:

- Proponer un *diagrama estructural* y un *diagrama de bloques* para el sistema de control.
- Discutir la estabilidad del sistema en función de K_r cuando el sistema de medida de velocidad tiene respuesta instantánea ($T = 0$).
- Supóngase ahora que el sistema de medida de velocidad tiene una constante de tiempo T no despreciable. Razonar cómo influye la constante de tiempo T en la estabilidad del sistema.
- Se supone ahora que el vehículo se destina a exploración lunar. El tiempo de ida y vuelta de una señal de radio a la Luna deja de ser despreciable. Razonar cómo influye el retardo puro T_r en la estabilidad del sistema.

Nota: La función de transferencia de un sistema de ganancia K instantáneo pero con un retardo puro de T_r segundos es

$$K e^{-sT_r}$$

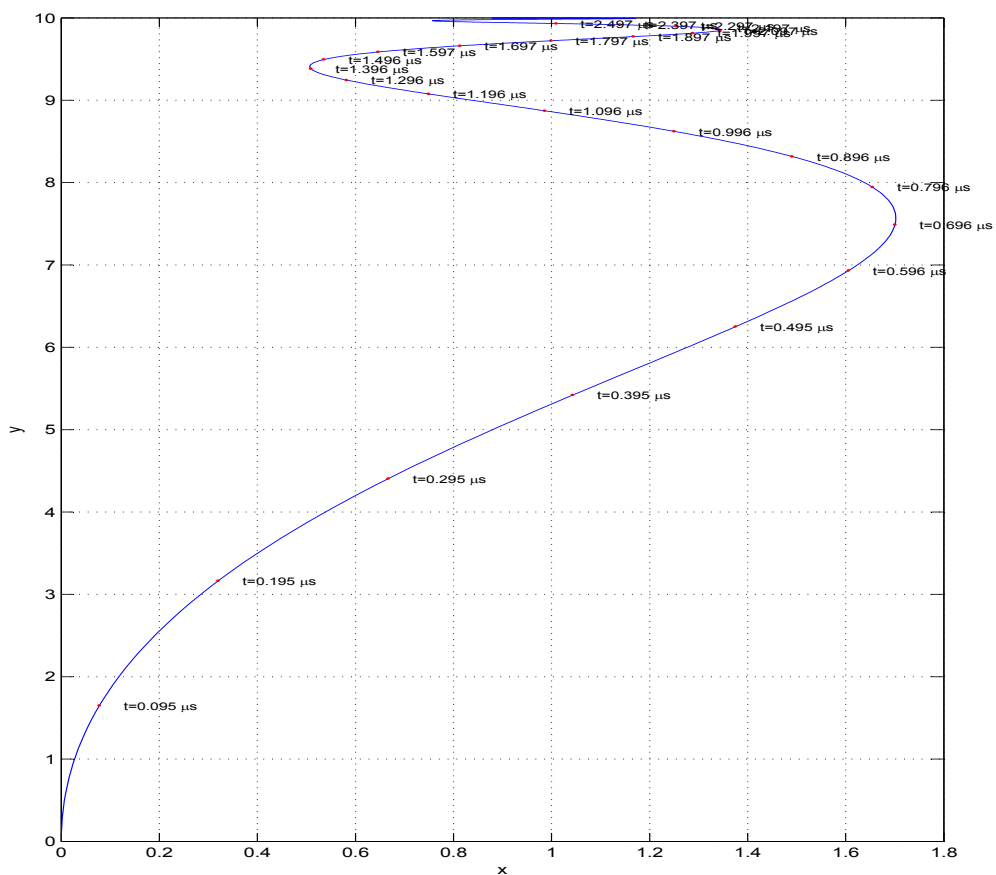
Muy Importante: *En este problema debe aportarse un razonamiento intuitivo a las conclusiones alcanzadas por la vía matemática.*

Problema 3. Mediante un analizador de espectros aplicado a un sistema electrónico se ha podido determinar el diagrama de Bode de la figura 2:

- Obtener la respuesta del sistema ante una señal periódica cuadrada, $u(t)$, para la que se muestra en la gráfica superior de la figura 3 un periodo de la misma y de la cual se conoce su descomposición en serie de Fourier, mostrada en gráfica inferior. Considérese suficiente una aproximación hasta el tercer armónico.
- Supóngase ahora que se desea implementar un control proporcional de ganancia K . Deducir empleando el criterio de Nyquist los rangos de K para los cuales el sistema es estable.

Cuestión En un determinado modelo de monitor de vídeo de computador, la posición $\mathbf{u}(t) = (x(t), y(t))$ de un punto proyectado en la pantalla mediante un haz de luz catódico funciona con sistemas electrónicos independientes para la posición horizontal $x(t)$ y para la vertical $y(t)$, pudiendo ser gobernada mediante dos tensiones $v_x(t)$ y $v_y(t)$ las coordenadas de ambos ejes. Para su análisis experimental, se introduce en $v_x(t)$ un escalón de 2 voltios, y en $v_y(t)$ un escalón de 3V, ambos en $t = 0$, siendo la respuesta observada la que se muestra en la figura adjunta. Se pide:

- Determinar de la forma lo más aproximada posible las funciones de transferencia $G_x(s)$ y $G_y(s)$.
- Trazar de forma aproximada la trayectoria de respuesta en los siguientes casos:
 - Introducción de un un cero adicional $(s + c)/c$ en el sistema y
 - Introducción de un polo adicional $p/(s+p)$ en el sistema y y un cero adicional $(s+c)/c$ en el sistema x



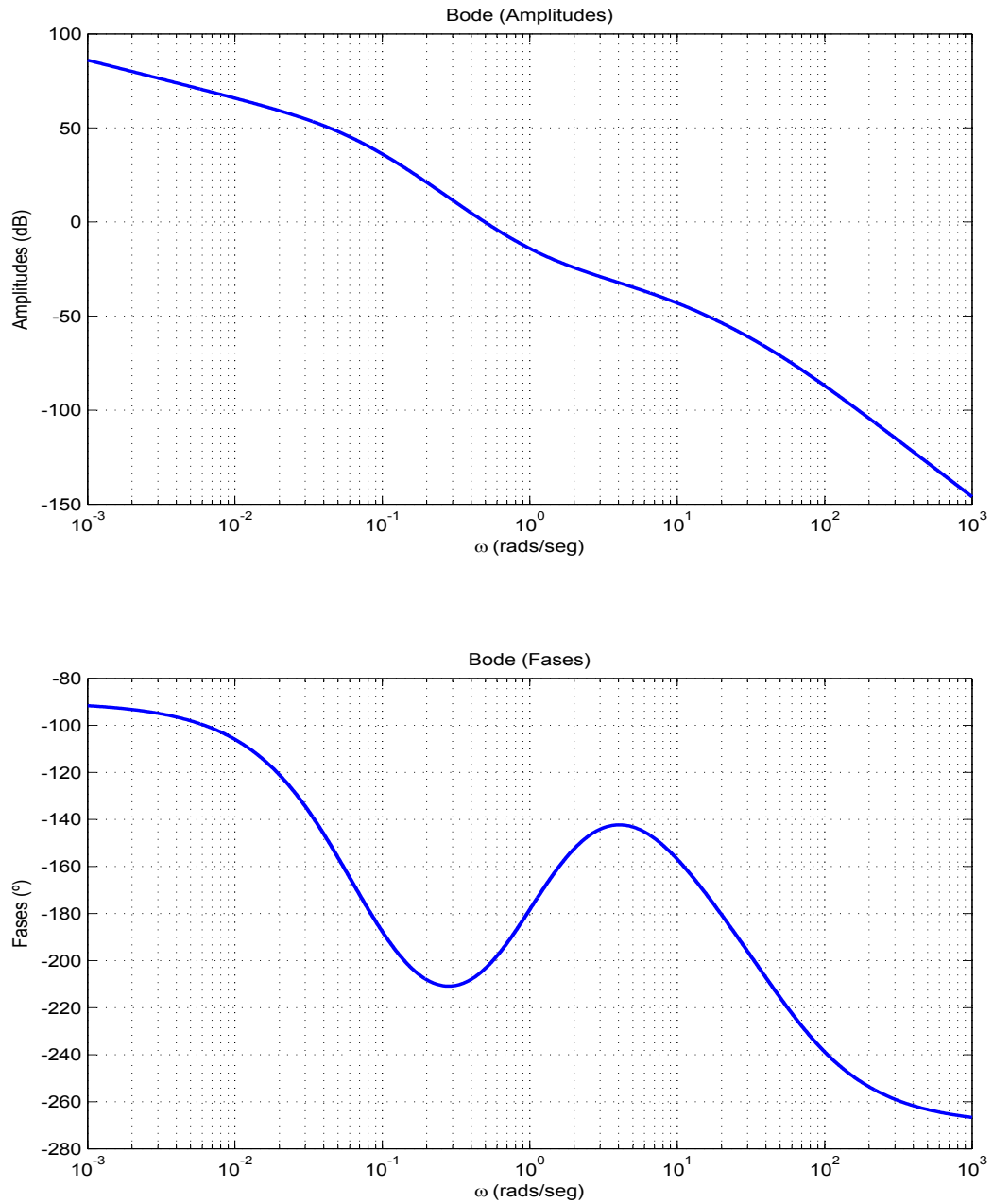
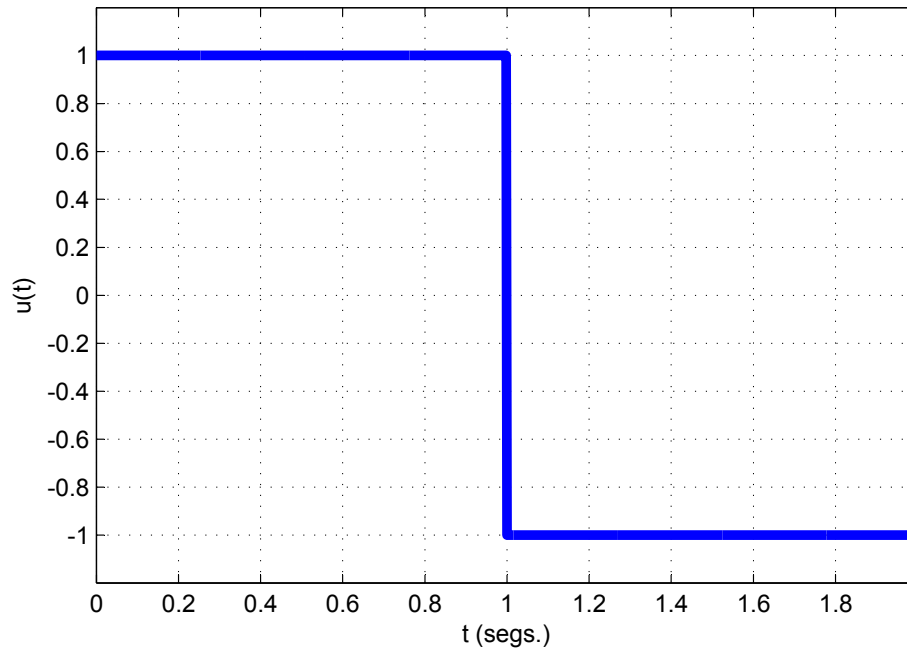
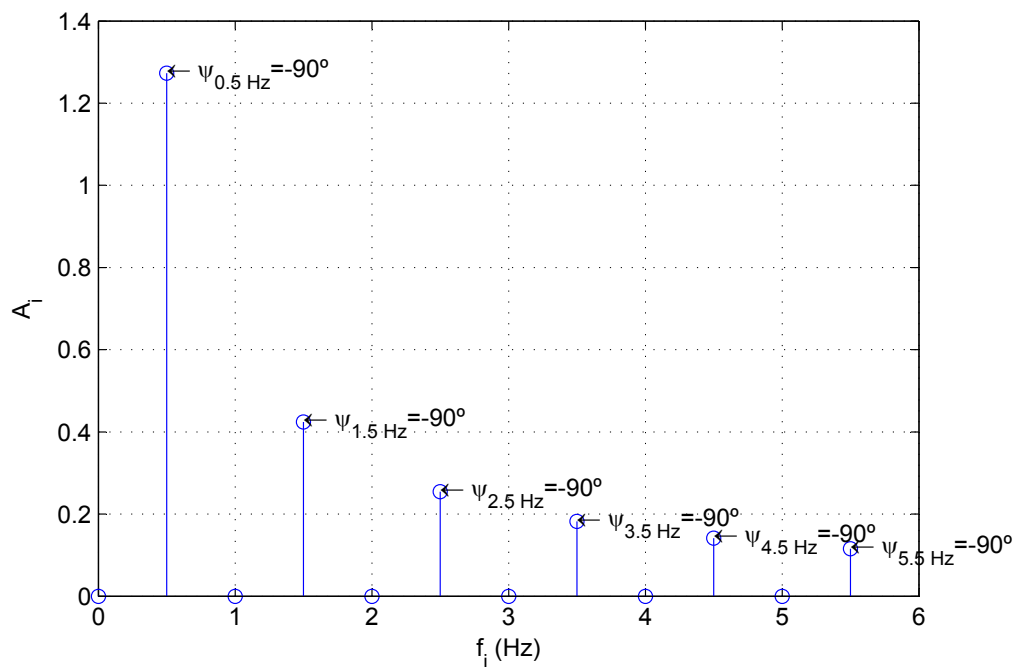


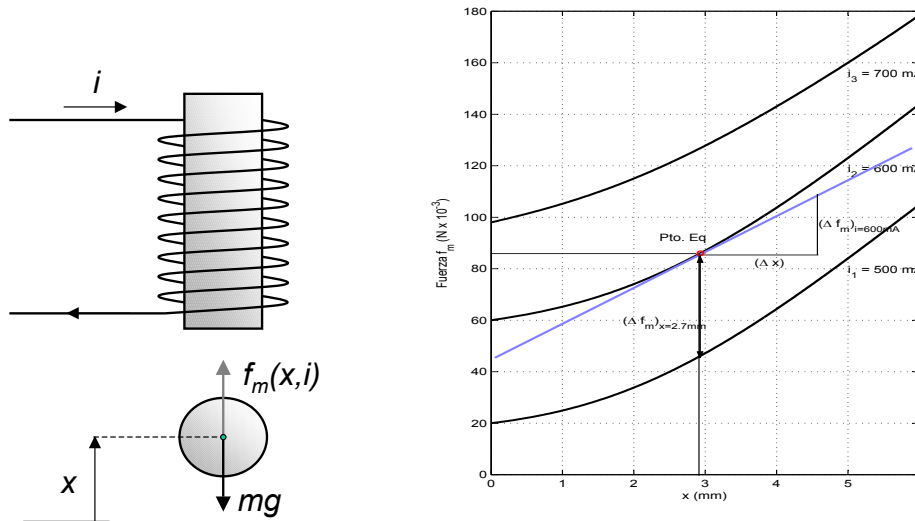
Figura 2: Diagrama de Bode obtenido mediante el analizador de espectros.

Señal de entrada $u(t)$ (un periodo).

Descomposición en serie de Fourier de la señal de entrada: $u(t) = \sum_i A_i \cos(2\pi f_i t + \Psi_i)$

Figura 3: Señal cuadrada y descomposición en armónicos.

Problema 1.



Ecuación del sistema:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = f_m(x, i) - mg \quad (1)$$

Equilibrio: En el equilibrio, la bola está quieta $d^2x/dt^2 = 0$, y las fuerzas horizontales se equilibran:

$$f_m(x_0, i_0) = mg \quad (2)$$

Queremos trabajar en un entorno del punto de equilibrio definido por $i = 600\text{mA}$. Esta corriente en régimen permanente define unívocamente un punto de equilibrio. Yendo a la gráfica se observa que

$$f_m(x, 600\text{mA}) = 8.4 \cdot 10^{-3} \cdot 9.8 = 82 \cdot 10^{-3} \quad (3)$$

Linealización: En la ecuación (1) sólo hay un término no lineal, que puede ser aproximado por Taylor de la siguiente manera

$$f_m(x, i) = f_m(x_0, i_0) + \left. \frac{\partial f_m}{\partial x} \right|_0 \Delta x + \left. \frac{\partial f_m}{\partial i} \right|_0 \Delta i + \epsilon \quad (4)$$

Yendo a la gráfica del problema, la $\frac{\partial f_m}{\partial x}$ puede calcularse muy fácilmente como la pendiente de la curva correspondiente a $i = 600\text{mA}$.

$$K_x = \frac{\partial f_m}{\partial x} \approx \frac{\Delta f_m}{\Delta x} = 14\text{N/m} \quad (5)$$

La parcial $\frac{\partial f_m}{\partial i}$ puede calcularse teniendo en cuenta que es la derivada respecto a i para un valor constante de $x = 2.7\text{mm}$. Yendo a la gráfica se mira el valor de la variación Δf_m dividida por la variación Δi para $x = 2.7\text{mm}$, es decir $\frac{\Delta f_m}{\Delta i}$

$$K_i = \frac{\partial f_m}{\partial i} \approx \frac{\Delta f_m}{\Delta i} = \frac{82\text{mN} - 42\text{mN}}{600\text{mA} - 500\text{mA}} = 0.4\text{N/A} \quad (6)$$

Finalmente,

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = f_m(x_0, i_0) + K_x \Delta x + K_i \Delta i - mg \quad (7)$$

$$= K_x \Delta x + K_i \Delta i \quad (8)$$

Con lo que nos queda una ecuación lineal

$$8.4 \cdot 10^{-3} \frac{d^2(\Delta x)}{dt^2} = 14\Delta x + 0.4\Delta i \quad (9)$$

o bien,

$$\boxed{\frac{d^2(\Delta x)}{dt^2} = 1667\Delta x + 47.6\Delta i}$$

En transformada de Laplace,

$$s^2 X(s) = 1667X(s) + 47.6I(s) \quad (10)$$

$$X(s)(s^2 - 1667) = 47.6I(s) \quad (11)$$

$$X(s) = \frac{47.6}{s^2 - 1667} I(s) \quad (12)$$

Donde la función de transferencia del sistema es

$$G(s) = \frac{47.6}{s^2 - 1667} \quad (13)$$

siendo la entrada la corriente $I(s)$, variable con la que podemos gobernar la posición de la bola; la salida o *respuesta* es la posición vertical de la bola $X(s)$, que depende de la corriente que introduzcamos en el electroimán.

Dinámica. El sistema dado por $G(s)$ es un sistema inestable ya que tiene dos polos, uno de los cuales está en el semiplano de parte real positiva:

$$s = \pm 40.82 \quad (14)$$

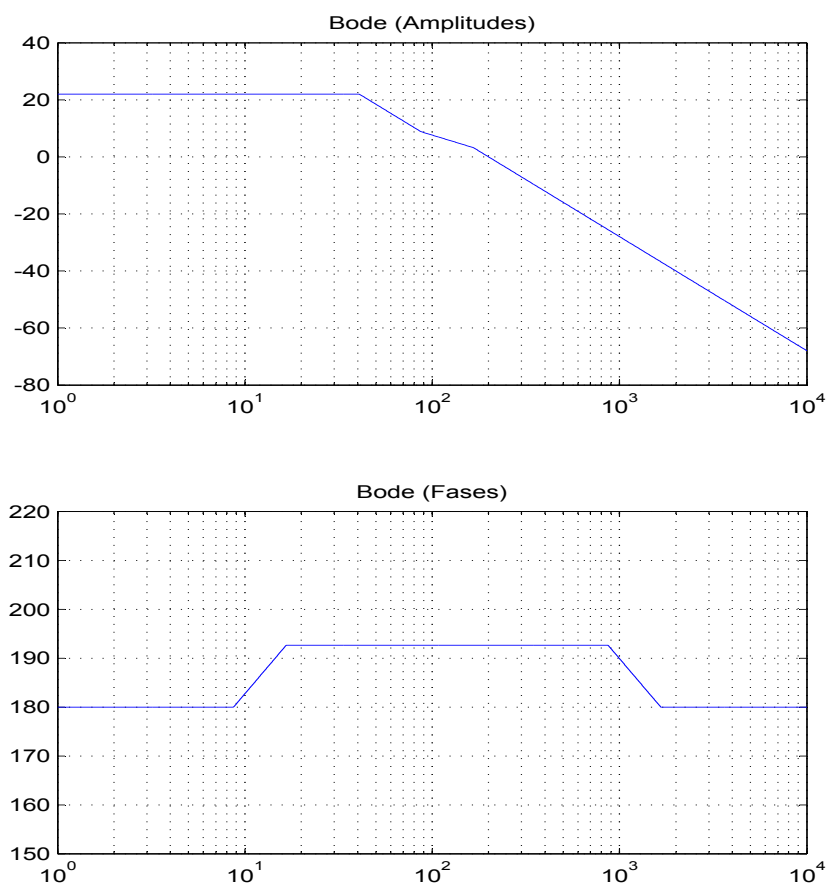
Físicamente, puede describirse la inestabilidad de la bola. Puede comprobarse que, partiendo del equilibrio, un pequeño desplazamiento de la bola hacia arriba, hace que la fuerza de atracción sea mayor, lo que tiende a acercarla aún más, tratándose de un círculo vicioso que finaliza cuando la bola tropieza con el electroimán (fin del comportamiento lineal).

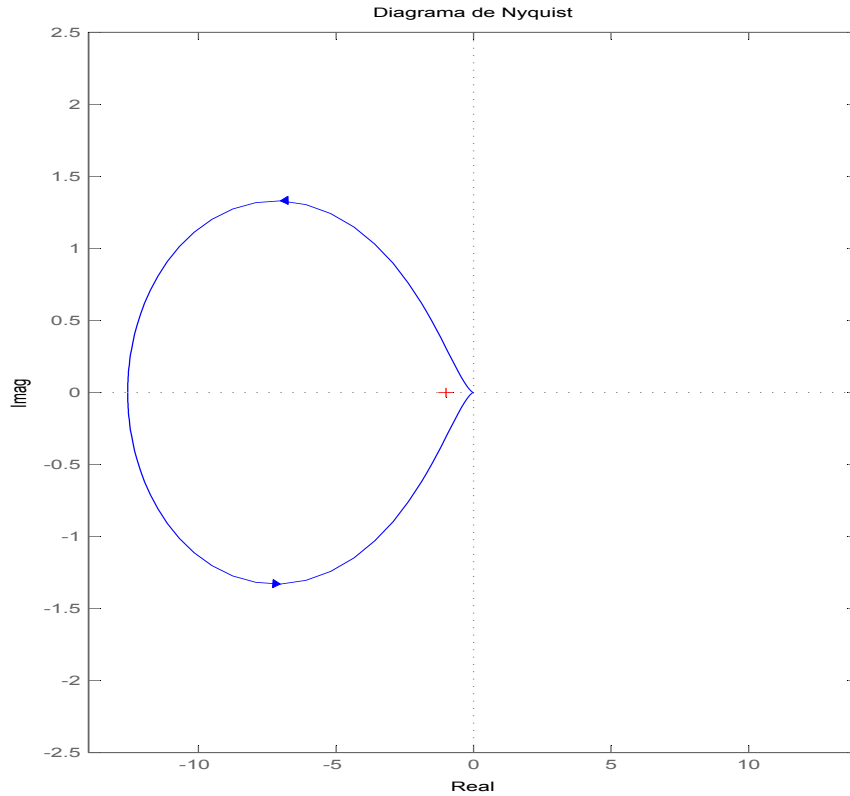
Análogamente, si la bola se aleja ligeramente del electroimán respecto al punto de equilibrio, la fuerza f_m disminuye, con lo que ésta tiende a alejarse más, siendo de nuevo un círculo vicioso que no termina (la bola cae al vacío).

Controlador Si se sitúa un controlador $R(s) = 840 \cdot \frac{s+87}{s+166}$, dado que la realimentación es unitaria, $H(s) = 1$, la función de transferencia del sistema en cadena abierta será

$$G_{c.a.}(s) = R(s)G(s) = 840 \cdot \frac{s+87}{s+166} \cdot \frac{47.6}{s^2-1667} \quad (15)$$

Su diagrama de bode y el correspondiente diagrama de Nyquist se muestran en la figura adjunta:





El sistema es de fase no mínima, con un polo inestable en cadena abierta, luego $P = 1$. Podemos comprobar que, para el regulador $R(s)$, el sistema da una vuelta en sentido antihorario $N = -1$, con lo que

$$Z = N + P = -1 + 1 \longrightarrow Z = 0 \quad (16)$$

luego el sistema es estable.

Estabilidad relativa. La estabilidad relativa hay que medirla a través de las nociones de margen de fase y margen de ganancia. Dado que el sistema es de fase no mínima, éstos no se miden de acuerdo con el criterio tradicional y deben considerarse valorando el diagrama de Nyquist.

Efectivamente, en este caso el margen de fase sería la cantidad en la que la fase excede los $+180^\circ$, en este caso unos 12° , ya que la fase llega hasta 192° a la frecuencia de cruce de ganancia.

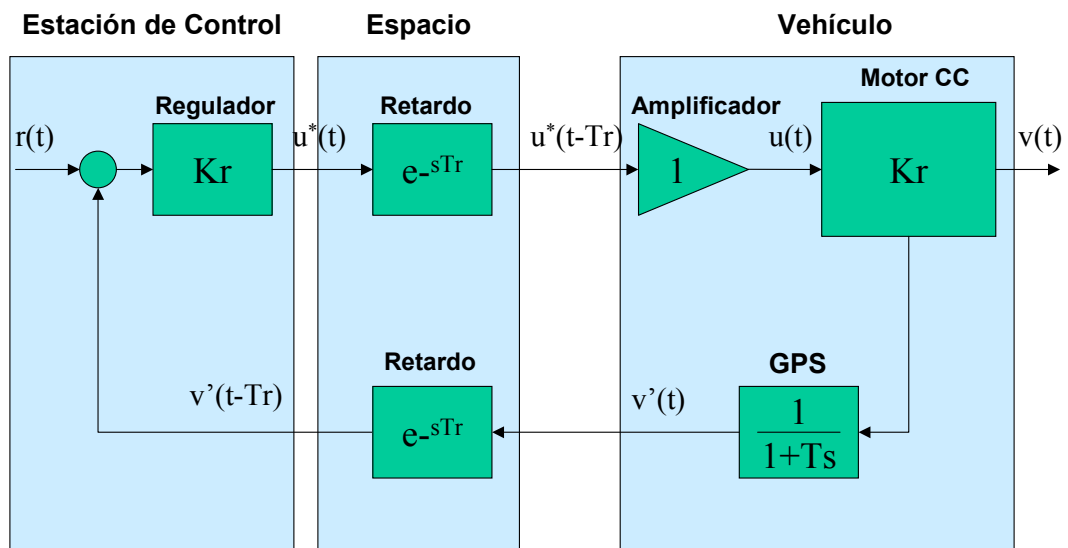
El margen de ganancia en este caso también se mide al revés, resultando ser

$$20 \log_{10} |12.55| = 21.93\text{dB} \quad (17)$$

1 Problema 2

Un posible diagrama estructural en este problema sería el siguiente:

Diagrama Estructural del Vehículo de Exploración

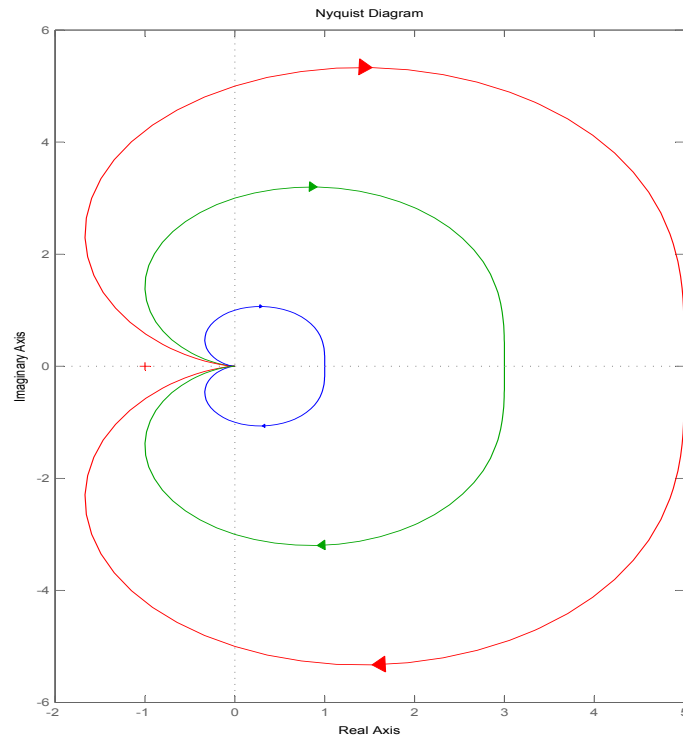


donde el diagrama estructural ha sido combinado con el diagrama de bloques.

Discusión de la estabilidad. GPS instantáneo y retardo despreciable. Si el GPS tiene respuesta instantánea se tiene $T = 0$, y su función de transferencia es $H(s) = 1$. En ese caso, la función de transferencia en cadena abierta del sistema es

$$GH(s) = K_r \frac{K_m}{(s+a)(s+b)} \quad (18)$$

la cual tiene dos polos en el semiplano izquierdo y ningún cero. Su diagrama de Nyquist para varios valores de K_r es

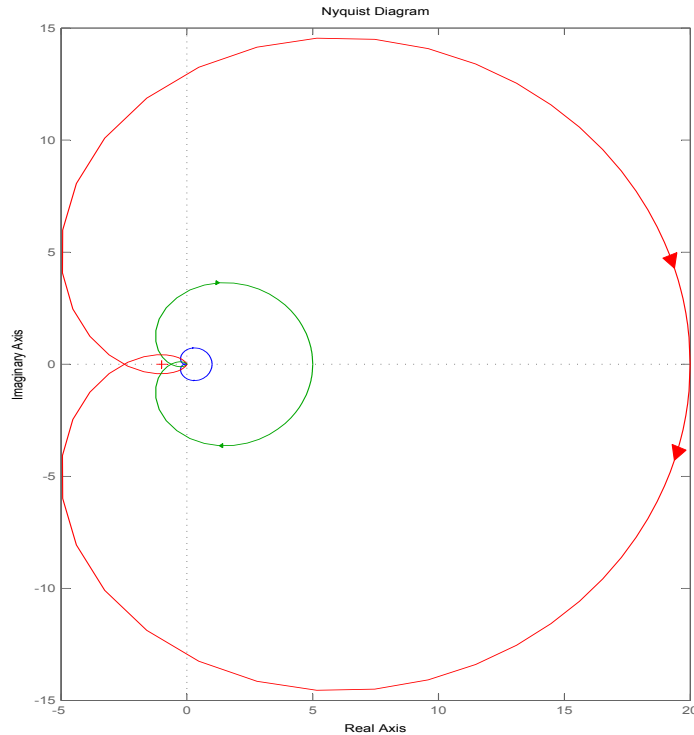


como vemos, el sistema es *estable* para todo valor de K_r .

GPS con cte. de tiempo $T \neq 0$ y retardo despreciable. En este caso, la función de transferencia en cadena abierta del sistema es

$$GH(s) = K_r \frac{K_m}{(s+a)(s+b)} \frac{1}{1+Ts} \quad (19)$$

la cual tiene tres polos en el semiplano izquierdo y ningún cero. Su diagrama de Nyquist para varios valores de K_r es



donde, como se puede ver, *el sistema puede inestabilizarse* para valores de K_r elevados.

Retardo T_r no despreciable. Finalmente, podemos analizar el efecto del retardo en la estabilidad. En este caso, la función de transferencia en cadena abierta del sistema es

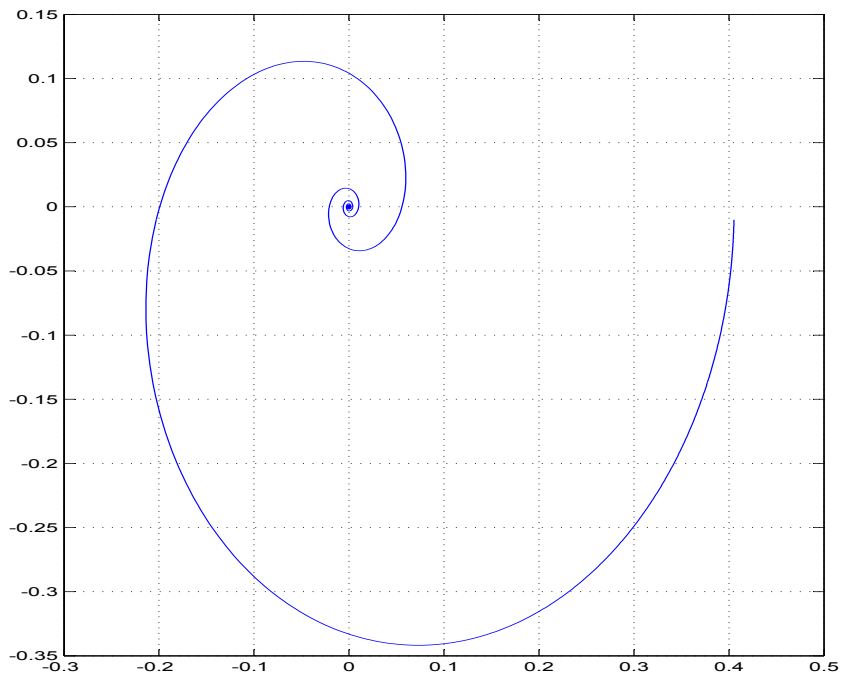
$$GH(s) = K_r \frac{K_m}{(s+a)(s+b)} \frac{1}{1+Ts} e^{-sT_r} \quad (20)$$

el Nyquist es el diagrama en el plano complejo de GH será el mismo que en los casos anteriores, salvo la modificación en amplitud y fase que el término e^{-sT_r} induce en cada uno de los puntos del Nyquist. Dicho término, para $s = j\omega$ es tal que

$$|e^{-j\omega T_r}| = 1 \quad (21)$$

$$\arg\{e^{-j\omega T_r}\} = -\omega T_r \quad (22)$$

es decir, induce un giro puro de $-\omega T_r$ radianes en todos los puntos de los Nyquist anteriores. En definitiva, “retuerce” el Nyquist hacia fases más negativas, aproximándolo a la inestabilidad. En la figura adjunta, se muestra un Nyquist con retardo puro para un GPS instantáneo:



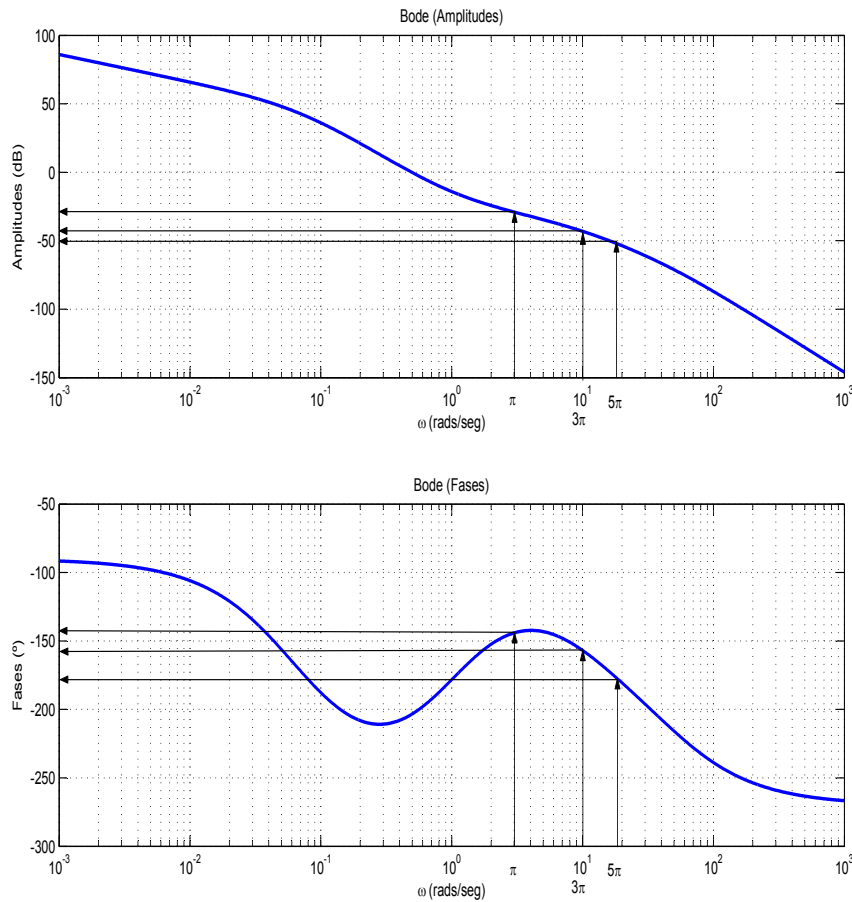
como se ve, pese a que el GPS instantáneo daba lugar a un sistema siempre estable, la presencia del retardo puro hace posible que el sistema se inestabilice para algún valor de K_r . En el caso de GPS con constante de tiempo no despreciable, el retardo puro aproxima aún más al sistema a la inestabilidad. El retardo puro, por tanto, contribuye a inestabilizar el sistema.

Problema 3

En este problema se aporta la respuesta en frecuencia del sistema o bode, obtenida mediante un analizador de espectros. La respuesta del sistema ante una señal cuadrada puede obtenerse fácilmente por superposición.

$$\begin{aligned} u(t) &\approx 1.3 \cos\left(0.5 \cdot 2\pi \cdot t - \frac{\pi}{2}\right) + 0.43 \cos\left(1.5 \cdot 2\pi \cdot t - \frac{\pi}{2}\right) + 0.23 \cos\left(2.5 \cdot 2\pi \cdot t - \frac{\pi}{2}\right) + \dots \\ &= 1.3 \sin(0.5 \cdot 2\pi \cdot t) + 0.43 \sin(1.5 \cdot 2\pi \cdot t) + 0.23 \sin(2.5 \cdot 2\pi \cdot t) + \dots \end{aligned}$$

Es posible hallar en el gráfico la respuesta de cada senoide (ver fig. adjunta)



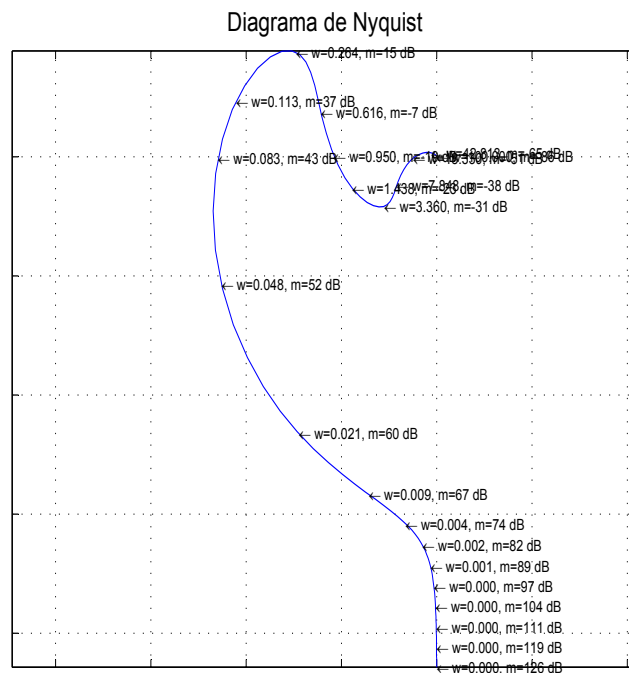
$$\begin{aligned} \omega_1 &= \pi \rightarrow |G(j\omega_1)| \approx -25dB = 0.056 & \arg\{G(j\omega_1)\} &\approx -145^\circ \\ \omega_2 &= 3\pi \rightarrow |G(j\omega_2)| \approx -40dB = 0.01 & \arg\{G(j\omega_2)\} &\approx -160^\circ \\ \omega_3 &= 5\pi \rightarrow |G(j\omega_3)| \approx -50dB = 0.0032 & \arg\{G(j\omega_3)\} &\approx -175^\circ \end{aligned}$$

de ahí, aplicando superposición

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \sum_i |G(j\omega_i)| A_i \sin(\omega_i t + \psi_i + \arg\{G(j\omega_i)\}) \approx \\
 &= 1.3 \cdot 0.056 \sin(0.5 \cdot 2\pi \cdot t - 145^\circ) + \\
 &\quad + 0.43 \cdot 0.01 \sin(1.5 \cdot 2\pi \cdot t - 160^\circ) + \\
 &\quad + 0.23 \cdot 0.0032 \sin(2.5 \cdot 2\pi \cdot t - 175^\circ) + \dots
 \end{aligned}$$

Estabilidad del sistema realimentado. El criterio de Nyquist nos permite determinar la estabilidad de un sistema en cadena cerrada a partir de su diagrama de bode en cadena abierta, empleando el llamado *diagrama de Nyquist*. Este diagrama puede determinarse directamente a partir del Bode que es dato en el problema, ya que el diagrama polar no es sino una representación distinta de lo mismo: mientras el Bode representa módulo y argumento frente a frecuencia en dos diagramas logarítmicos, el diagrama polar representa parte real y parte imaginaria en el plano complejo.

Así, simplemente considerando los ángulos y módulos podemos trazar un croquis (no necesariamente a escala) del diagrama de Nyquist para evaluar la situación, y luego tomar las medidas más precisas en el propio diagrama de Bode.



Vemos que el sistema es condicionalmente estable, hallándose cuatro zonas (la exterior más los tres bucles internos). Esto nos da cuatro rangos para K en función de dónde quede el punto $-1 + 0j$. yendo al bode, podemos determinar los valores exactos de K que marcan los límites entre los rangos, mientras que examinando el Nyquist podemos determinar cuáles de esos rangos son estables y cuáles no.

En la figura adjunta se muestra el diagrama de Bode con los valores de K en dB que marcan

los tránsitos entre los distintos tramos

$$K_1 = -40 \text{ dB} = 0.01$$

$$K_2 = +10 \text{ dB} = 3.16$$

$$K_3 = +50 \text{ dB} = 316.2$$

La frecuencia de cruce de ganancia ω_{cg} nos marcará la estabilidad o inestabilidad del sistema. Para un valor de $K = 1$, como vemos, el sistema es inestable. A partir de ahí sólo es necesario determinar cuánto hay que subir o bajar el diagrama de módulos para que dicha frecuencia ω_{cg} se desplace a las otras zonas. Así, finalmente, resulta ya muy fácil determinar los rangos de estabilidad:

$$0 < K < 0.01 \rightarrow \text{Estable}$$

$$0.01 < K < 3.16 \rightarrow \text{Inestable}$$

$$3.16 < K < 316.2 \rightarrow \text{Estable}$$

$$K > 316.2 \rightarrow \text{Inestable}$$

