

Problema 1. Se pretende analizar el sistema de control de velocidad de crucero de un vehículo. El sistema consta de los siguientes elementos:

Vehículo: El vehículo, funcionando en 5ª marcha responde al siguiente modelo:

$$m \frac{dv(t)}{dt} = f(t) - b \cdot v(t) - c \cdot v(t)^2 - f_{\text{pend}}(t)$$

donde $v(t)$ es la velocidad del vehículo, $f(t)$ es la fuerza aplicada por el motor, $m = 1560\text{Kg}$ es la masa del vehículo, $b = 20\text{Ns/m}$ es la constante de fricción mecánica, $c = 0.1\text{Ns}^2/\text{m}^2$ es la constante de fricción aerodinámica y $f_{\text{pend}}(t)$ es la fuerza ejercida por el propio peso del vehículo en la dirección de avance como consecuencia de una pendiente en la carretera.

Mariposa: La fuerza $f(t)$ es transmitida al vehículo de forma instantánea a través de una señal de tensión $u(t)$ aplicada a un servomotor que actúa sobre la mariposa (válvula que permite mayor o menor entrada de combustible) de acuerdo con la figura adjunta.

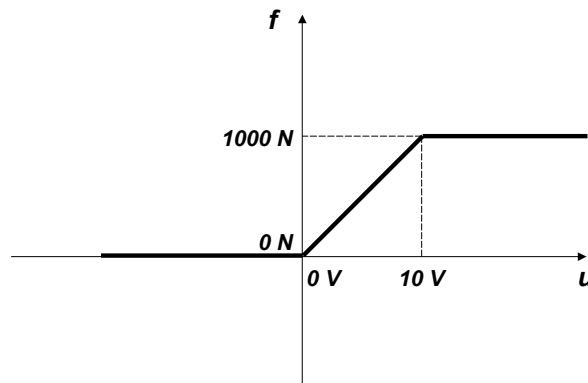


Figura 1: Respuesta de la mariposa.

Sensor: El sistema de control lleva incorporado un sensor de velocidad que produce una señal de tensión, $v_s(t)$ siendo su ganancia $K_s = \frac{10\text{V}}{50\text{m/s}}$ y su constante de tiempo $T_s = 0.2\text{s}$

Controlador: El controlador, de tipo proporcional-integral (PI), es un circuito electrónico que reproduce la siguiente dinámica

$$u(t) = K_p \cdot e(t) + K_i \cdot \int e(t) dt$$

donde $e(t) = r(t) - v_s(t)$ es la diferencia entre la referencia de velocidad $r(t)$ y la medida de velocidad aportada por el sensor $v_s(t)$, siendo $u(t)$ la señal de control que actúa sobre la mariposa. Los parámetros del controlador son $K_p = 10$ y $K_i = 2$

Se pide:

- Obtener el diagrama estructural del sistema completo, indicando claramente todos sus elementos y el flujo de señal entre los mismos.

- Linealizar la dinámica del vehículo para un punto de funcionamiento correspondiente a una velocidad de crucero $v_0 = \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = 30\text{m/s}$, circulando en llano ($f_{pend} = 0$).
- Obtener el diagrama de bloques del sistema completo, incluyendo el modelo linealizado del vehículo, sensor, controlador y mariposa.
- Según la ganancia del captador ($\frac{10\text{V}}{50\text{m/s}}$), un incremento de la velocidad de crucero en 36 Km/h para pasar de los 108 Km/h (30 m/s) hasta 144 Km/h (40 m/s) corresponde a un incremento de 2 V en la referencia. ¿Consigue el sistema de control establecer con exactitud la nueva velocidad de régimen para un escalón de 2 V?
- Supóngase ahora que el vehículo, a su velocidad original, de 108 Km/h (30 m/s), alcanza un tramo en el que existe una pendiente constante y prolongada que introduce una fuerza $f_{pend} = 100\text{N}$. ¿Consigue el sistema de control mantener la velocidad a largo plazo? ¿cómo respondería en una zona de colinas suaves? Explicar.
- Suponiendo que se mantiene constante el valor de $K_i/K_p = a = 0.2$, variando K_p , indicar si existe algún valor de K_p que haga inestable al sistema.
- En la figura 2 se muestra el lugar de las raíces del sistema de control. Describir de forma cualitativa la dinámica del sistema en función de K_p manteniendo $a = 0.2$. *Nota: el cero en $s = -0.2$ del lugar es también cero del sistema en cadena cerrada.*

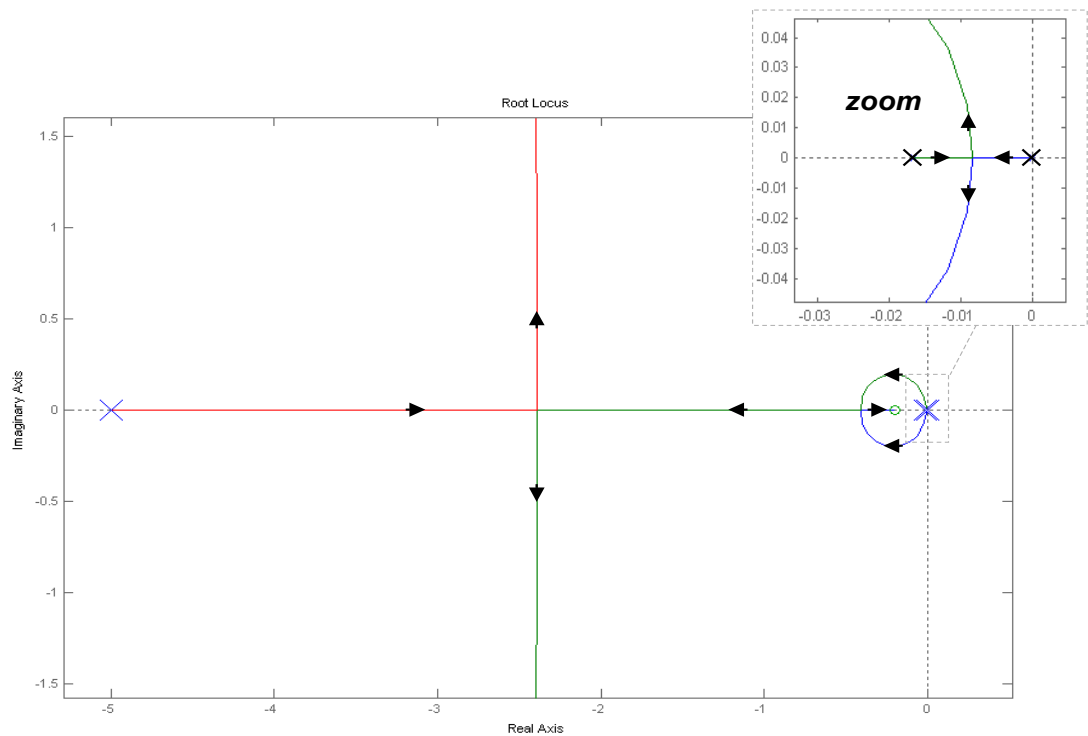


Figura 2: Lugar de las raíces para el sistema de control de velocidad de crucero

Problema 2. Se dispone de la respuesta en frecuencia proporcionada en la hoja de características de cierto amplificador operacional, que se muestra en la figura 3:

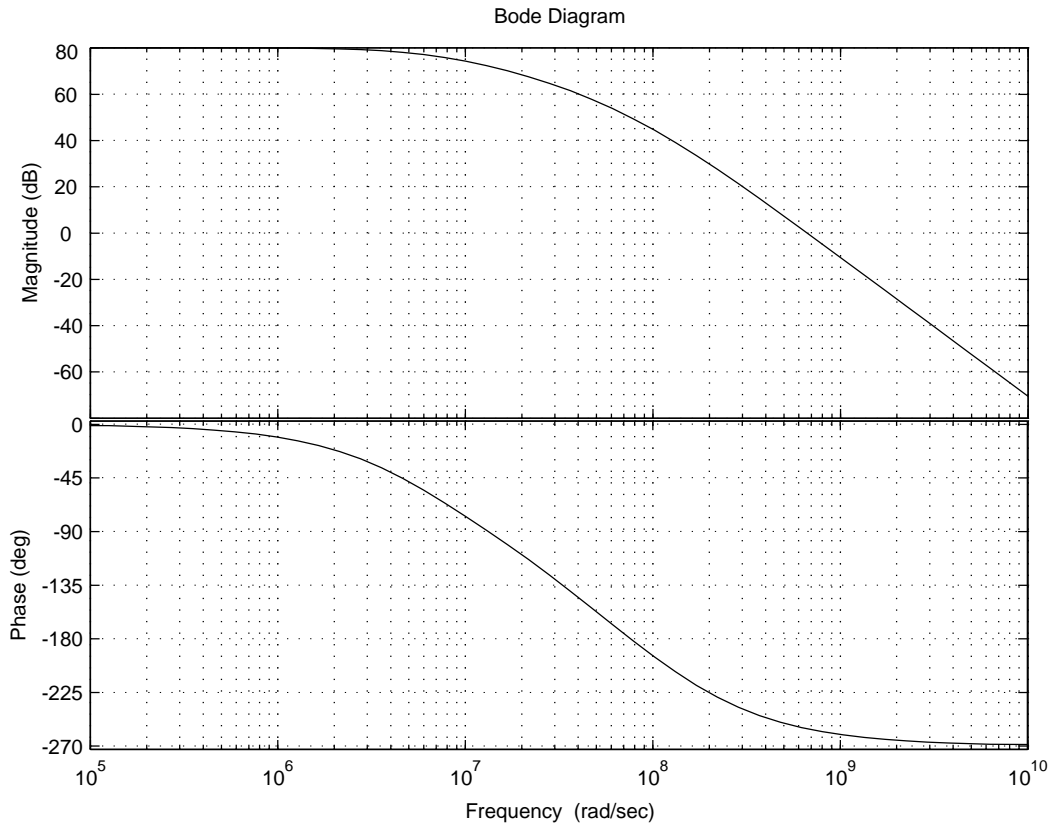


Figura 3: Diagramas de Bode de un amplificador operacional

Suponiendo que el amplificador operacional es estable (en cadena abierta), se pide:

- Obtener la respuesta del sistema en régimen permanente a una señal de entrada:

$$u(t) = 0.5 \cdot 10^{-3} \sin(10^4 t) + 1.2 \cdot 10^{-3} \sin(10^8 t + 0.3) + 0.8 \cdot 10^{-3} \sin(3 \cdot 10^8 t + 0.8)$$

- Deducir una posible función de transferencia para ese amplificador operacional, justificando la elección.
- Se va a usar el amplificador operacional de tal forma que se va a realimentar de forma negativa su salida mutiplicada por un factor A (ver figura 4). Se pide:
 - Dibujar el diagrama de Nyquist y relacionar sus puntos clave con los del diagrama de Bode. Obtener el margen de ganancia y el margen de fase.
 - Discutir para qué valores de A el sistema realimentado es estable.

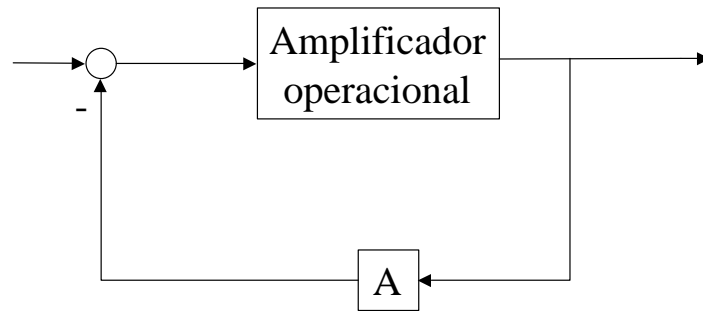
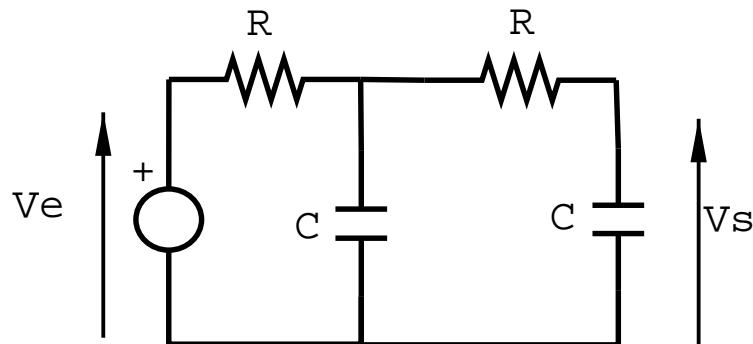


Figura 4: Amplificador operacional realimentado

Problema 3. Dado el circuito de la figura formado por dos resistencias, dos condensadores y una fuente de tensión:



Se pide:

- Obtener las ecuaciones en espacio de estados, usando como variables de estado las tensiones en los condensadores, y suponiendo que la entrada al sistema es la tensión de la fuente V_e y la salida es la tensión en el condensador marcada en la figura como V_s .
- Razonar el tipo de respuesta que tendrá el sistema ante una entrada escalón usando las ecuaciones en espacio de estados particularizadas para $R = 1000 \Omega$ y $C = 10^{-3} \text{ F}$.
- Hallar la función de transferencia y extraer de ella de forma razonada las mismas conclusiones que en el punto anterior.

Soluciones

Problema 1

Diagrama Estructural

Un diagrama estructural para el sistema puede ser el siguiente:

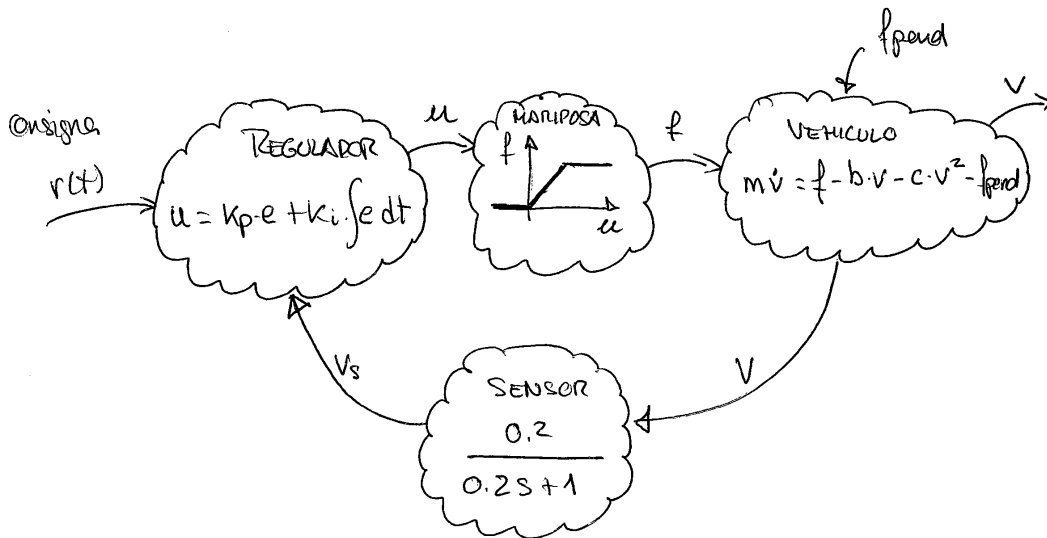


Figura 5: Diagrama Estructural del sistema de control.

Linealización

Definiendo $v \equiv \dot{x} = \frac{dx}{dt}$ la ecuación del sistema es:

$$m\dot{v}(t) = f(t) - bv(t) - cv(t)^2 - f_{\text{pend}}(t)$$

El punto de equilibrio se obtiene a partir de la ecuación anterior para $\dot{v} = 0$

$$0 = f_0 - bv_0 - cv_0^2$$

para $v_0 = 30 \text{ m/s}$ ($=108 \text{ Km/h}$) se tiene:

$$f_0 = 20 \times 30 + 0.1 \times 30^2 = 600 + 90 = 690 \text{ N}$$

Al linealizar en torno a un punto de equilibrio, consideramos diferencias en torno a los valores de las variables en dicho punto:

$$\Delta v = v - v_0 = v - 30$$

$$\Delta f = f - f_0 = f - 690$$

Linealizando en torno al punto de equilibrio

$$m\Delta\dot{v} = \Delta f - b\Delta v - 2cv_0\Delta v$$

con lo que

$$m\Delta\dot{v} + (b + 2cv_0)\Delta v = \Delta f$$

tomando transformadas de Laplace

$$msV(s) + (b + 2cv_0)V(s) = F(s)$$

de donde,

$$V(s) = \frac{1/m}{s + \left(\frac{b+2cv_0}{m}\right)} F(s)$$

De acuerdo con la curva, la mariposa se comporta de forma lineal para pequeñas variaciones en torno al punto de equilibrio definido por $f_0 = 690N$, con dinámica *instantánea* y ganancia $\frac{1000N}{10V}$, siendo $u_0 = 6.9V$

$$K_{pedal} = 100 N/V$$

De acuerdo con el enunciado, el sensor tiene una dinámica lineal de primer orden con ganancia $0.2 V/(m/s)$ y constante de tiempo $0.2s$

$$H(s) = \frac{0.2}{0.2s + 1}$$

Diagrama de Bloques

El diagrama de bloques incluyendo los elementos linealizados sería

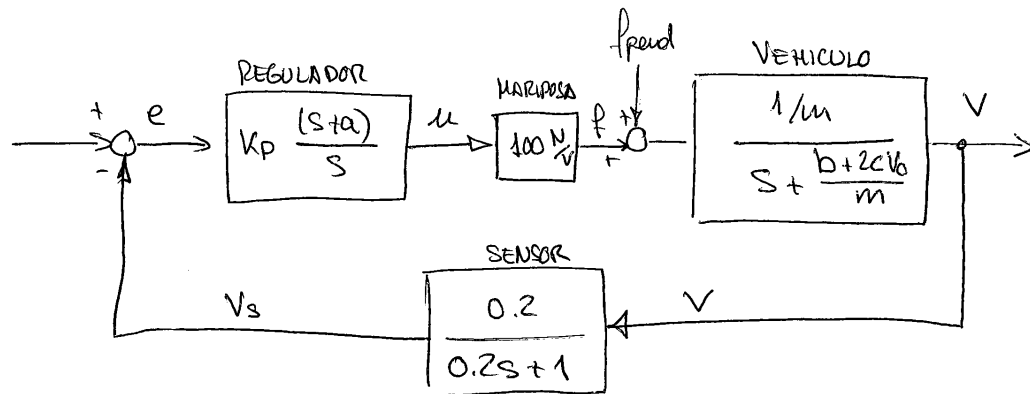


Figura 6: Diagrama de Bloques del sistema de control.

Cambio en la consigna

El cambio en la consigna desde $30 m/s$ hasta $40 m/s$ supone incremento de $10 m/s$ en la referencia. Dado que operamos con el sistema linealizado en torno a $v_0 = 30 m/s$, hay que trabajar con diferencias (Δ 's) esto significa $\Delta v = 10$. La función de transferencia del sistema realimentado es

$$M(s) = \frac{1.282s^2 + 6.667s + 1.282}{2s^3 + 10.03s^2 + 1.449s + 0.2564}$$

un escalón de 2 V en $\Delta r(t)$ corresponde a $R(s) = 2/s$. Aplicando el teorema del valor final,

$$\lim_{s \rightarrow 0} sM(s) \frac{2}{s} = M(0) \cdot 2 = 5 \cdot 2 = 10 \text{ m/s}$$

con lo que, efectivamente, al meter 2 voltios, el sistema se establece en $\Delta v = 10 \text{ m/s}$, es decir, en $v = v_0 + \Delta v = 30 + 10 = 40 \text{ m/s}$. La ganancia en régimen permanente del sistema es exactamente $M(0) = 5 \text{ (m/s)/V}$, que corresponde en este caso exactamente a la inversa de la ganancia en régimen permanente del captador $1/H(0)$, es decir, el sistema no tiene error (hace lo que queremos que haga).

La mera presencia de acción integral en el regulador podía habernos llevado a la misma conclusión sin necesidad de hacer los cálculos ya que ésta anula el error en régimen permanente, pues de persistir un error de forma permanente el sistema no se estabilizaría al estar integrando permanentemente un error constante.

Perturbación (cambio de pendiente en la carretera)

Podemos analizar el cambio de pendiente en la carretera obteniendo la función de transferencia entre f_{pend} y v . Esta función es

$$G_{pv}(s) = \frac{0.001282s^3 + 0.006432s^2 + 0.0001068s}{2s^4 + 10.07s^3 + 1.616s^2 + 0.2806s + 0.004274}$$

Para calcular el valor en régimen permanente de la velocidad v ante un escalón de 100 N en la señal f_{pend}

$$v_{\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G_{pv}(s) f_{pend}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G_{pv}(s) \frac{100}{s} = 100 \cdot G_{pv}(0) = 0$$

Puede comprobarse que tiene un cero en $s = 0$ lo que hace que $G_{pv}(0) = 0$ es decir, la perturbación será completamente anulada en régimen permanente. Además, su ganancia en frecuencias bajas (colinas de pendientes suaves)

$$|G_{pv}(j\omega)| \text{ pequeña para } \omega = \text{bajas } (< 10^{-1} \text{ Hz})$$

es pequeña por la presencia del cero en $s = 0$, con lo que el sistema corrige adecuadamente la velocidad de crucero ante cambios suaves en la pendiente.

Inestabilidad en función de K_p

Observando el lugar de las raíces, puede comprobarse que el sistema no se llega a hacer inestable para ningún valor de K_p . A la misma conclusión puede llegarse aplicando el criterio de Routh en función de K_p .

Dinámica en función de K_p

En el lugar de las raíces adjunto se muestran los distintos tramos que pueden tener las raíces (tramos $\{1, 2, 3, 4\}$).

- tramo 1:* El sistema tiene un polo muy lento, muy próximo a $s = 0$ y muy dominante. Los dos polos restantes y el cero apenas influyen. Por ello, la dinámica será la de un primer orden muy lento.
- tramo 2:* El sistema tiene un comportamiento oscilatorio, su tiempo de establecimiento va disminuyendo conforme aumenta K_p y las raíces se desplazan por la circunferencia. Este comportamiento oscilatorio llega a desaparecer cuando ambas se juntan de nuevo en el eje real. La presencia del cero hace que el comportamiento sea algo más oscilatorio y adelantado de lo que sería el sistema sólo con las raíces. La tercera raíz está muy lejos y no ejerce efecto.
- tramos 3 y 4:* La dinámica es difícil de predecir de forma cualitativa ya que tenemos un par cero polo (cero más dominante) en zona próxima al eje imaginario. La presencia de ese par cero polo tiene una magnitud pequeña, pero una constante de tiempo lenta y por tanto significativa (tarda tiempo en desaparecer). El resultado global puede verse como la dinámica de los dos polos más alejados, a la que se añade una dinámica lenta y de poca amplitud que afecta a los tiempos de establecimiento.

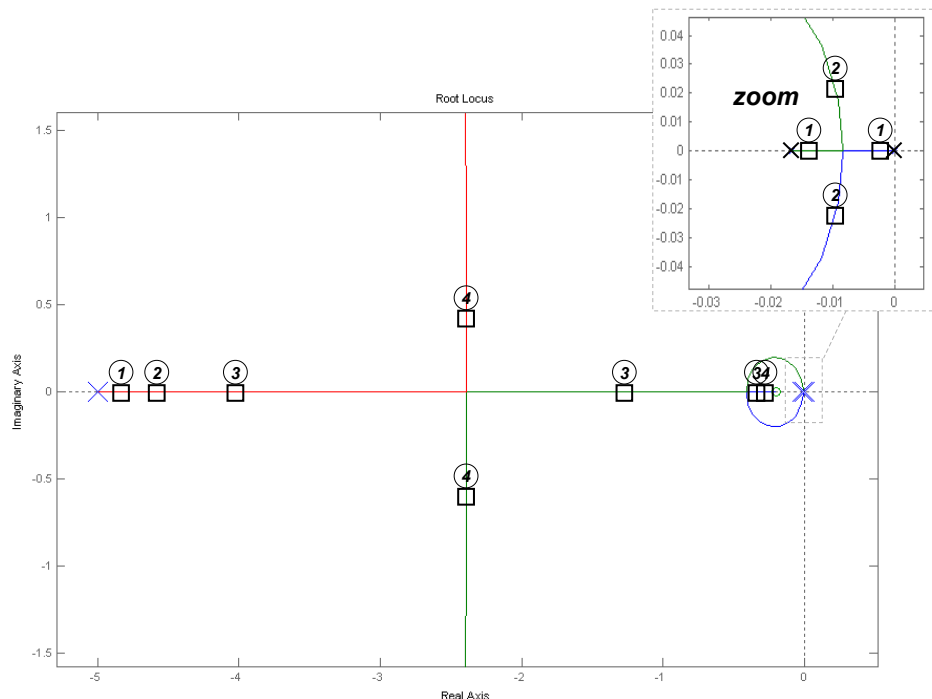


Figura 7: Posibles ubicaciones de las raíces en el Lugar.

Problema 2

Respuesta a la señal

Puesto que la señal $u(t)$ está formada por una suma de senoidales, podemos aplicar el *principio de superposición*. La salida del sistema será la suma de las respuestas a cada una de esas senoidales por separado. La respuesta en régimen permanente a una senoidal del tipo:

$$u_i(t) = A \sin(\omega t + \phi) \quad (1)$$

será otra senoidal del tipo:

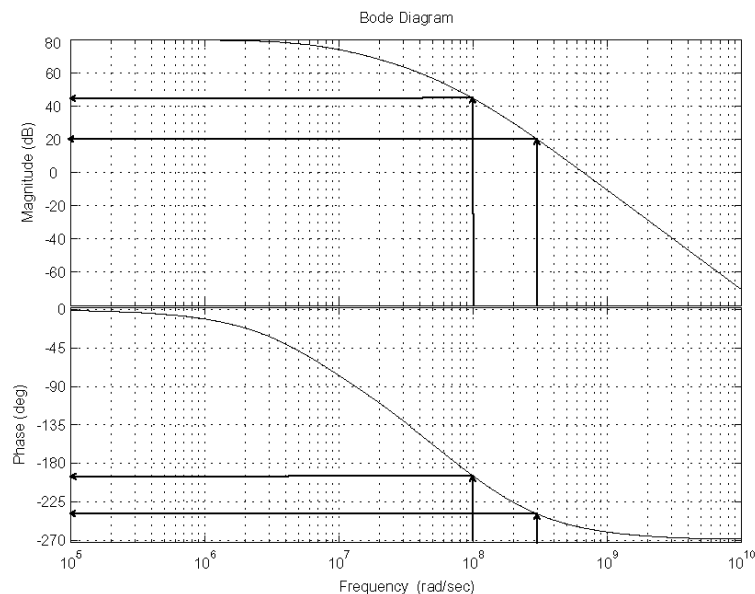
$$y_i(t) = A|G(j\omega)| \sin(\omega t + \phi + \angle G(j\omega)) \quad (2)$$

donde $|G(j\omega)|$ y $\angle G(j\omega)$ se pueden obtener de los diagramas de Bode de ganancias y fases respectivamente.

En la siguiente tabla se muestran los valores tomados de los diagramas de Bode para las tres frecuencias angulares que conforman $u(t)$:

ω	$ G(j\omega) $ (dB)	$\angle G(j\omega)$ (grados)
10^4	80	0
10^8	45	-195
$3 \cdot 10^8$	20	-240

La frecuencia $\omega = 10^4$ cae fuera de la gráfica, pero se deduce que la ganancia a frecuencias bajas será 80 dB y el desfase de 0° . Para las otras dos frecuencias se obtienen así:



Pasando las ganancias a valores por unidad ($\text{ganancia}_{pu} = 10^{\text{ganancia}_{dB}/20}$), los desfases a radianes y combinando las respuestas individuales:

$$\begin{aligned} y(t) &= 0.5 \cdot 10^{-3} \cdot 10^4 \sin(10^4 t) \\ &+ 1.2 \cdot 10^{-3} \cdot 177.8 \sin(10^8 t + 0.3 - 3.1) \\ &+ 0.8 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \sin(3 \cdot 10^8 t + 0.8 - 4.19) \end{aligned}$$

obtenemos el resultado final:

$$y(t) = 5 \sin(10^4 t) + 0.21 \sin(10^8 t - 3.1) + 8 \cdot 10^{-3} \sin(3 \cdot 10^8 t - 3.39)$$

Propuesta de función de transferencia

Se puede observar en el diagrama de Bode de fases que el desfase pasa de 0° a -270° , lo cual indica la presencia de tres polos, puesto que cada uno aporta un desfase de -90° (y también se observa, aunque es más difícil de determinar con exactitud, que en el diagrama de Bode de ganancias se tiene a frecuencias altas una caída de 60 dB por década, debido a una caída de 20 dB/década por cada polo). Por lo tanto tendremos una función de transferencia de la forma:

$$G(s) = \frac{K}{(s + p_1)(s + p_2)(s + p_3)} \quad (3)$$

Suponiendo inicialmente los tres polos reales, dichos polos podemos situarlos de forma arbitraria observando que el cambio de desfase de 0° a -270° ocurre más o menos entre $\omega = 10^6$ y $\omega = 10^9$. Cogemos, por ejemplo:

$$\omega_1 = 1/T_1 = p_1 = 10^6 \quad (4)$$

$$\omega_2 = 1/T_2 = p_2 = 10^7 \quad (5)$$

$$\omega_3 = 1/T_3 = p_3 = 10^8 \quad (6)$$

$$(7)$$

Para hallar el valor de la constante K tendremos en cuenta que la ganancia estática es 80 dB, o lo que es lo mismo 10^4 en valores por unidad. Por lo tanto la función de transferencia será:

$$G(s) = 10^4 \cdot \frac{10^6}{(s + 10^6)} \cdot \frac{10^7}{(s + 10^7)} \cdot \frac{10^8}{(s + 10^8)} \quad (8)$$

donde se observa que se cumple:

$$\lim_{s \rightarrow 0} G(s) = 10^4 \quad (9)$$

y por lo tanto una función de transferencia posible para el sistema podría ser:

$$G(s) = \frac{10^{25}}{(s + 10^6)(s + 10^7)(s + 10^8)} \quad (10)$$

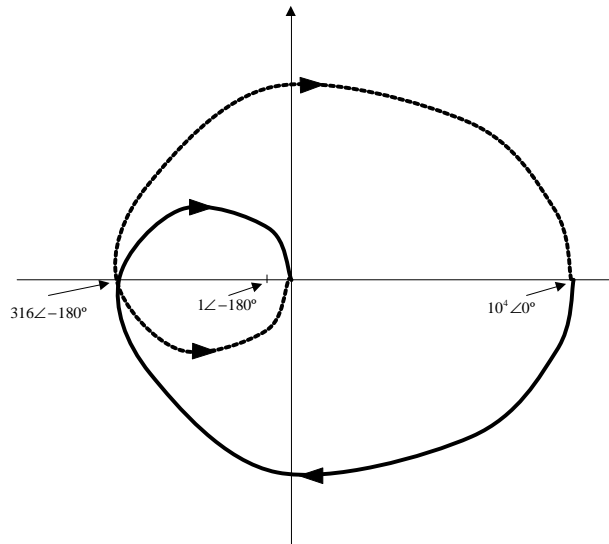
Otra posibilidad es que dos polos sean complejos conjugados, en cuyo caso la función de transferencia será de la forma:

$$G(s) = 10^4 \cdot \frac{p_1}{(s + p_1)} \cdot \frac{\omega_n^2}{(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} \quad (11)$$

donde ω_n se encontrará en el rango de frecuencias que ya se mencionó y ξ se encontrará aproximadamente en el intervalo $[\sqrt{2}/2, 1]$, puesto que un valor de ξ hacia cero implica una resonancia que no se aprecia en el Bode y un $\xi > 1$ corresponde al caso de polos reales que ya se mencionó.

Diagrama de Nyquist

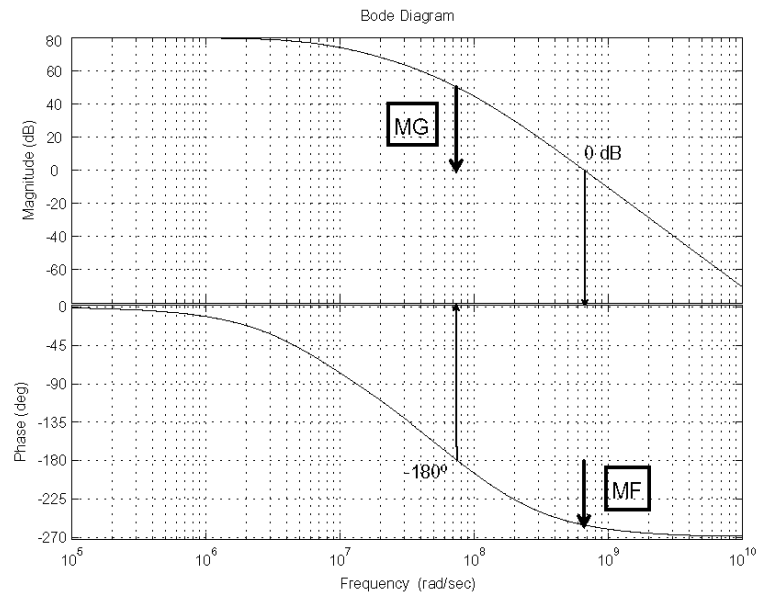
Observando el Bode de fases se deduce que el sistema en cadena abierta no tiene polos en el origen (desfase a bajas frecuencias nulo) y por el de ganancias que tampoco va a haber polos imaginarios puros (que provocarían resonancia infinita), con lo cual el camino de Nyquist va a tener los tramos típicos I, II y III. La imagen del tramo I (línea continua) comienza en el punto $10^4 \angle 0^\circ$, y continuamente van disminuyendo módulo y argumento, pasando por el punto $316 \angle -180^\circ$ (ganancia 50 dB con desfase -180° en los diagramas de Bode), y llegando al origen (por tener ganancia nula, $-\infty$ en decibelios, a frecuencia infinita) con un ángulo de -270° . La imagen del tramo II es el origen y la del tramo III simétrica respecto al eje real de la del tramo I (línea discontinua). Gráficamente el resultado es el siguiente (no está a escala):



Margen de ganancia y de fase

El margen de ganancia es la ganancia en decibelios que falta para alcanzar los 0 dB cuando el desfase es -180° . En este caso como se observa en la siguiente figura sobran 50 dB y por tanto el *margen de ganancia* es $MG=50$ dB.

El margen de fase es el desfase que se puede introducir hasta llegar a los -180° cuando la ganancia es de 0 dB. En este caso ya se pasa unos 75° y por tanto el *margen de fase* es $MF=75^\circ$, como se puede observar en la figura.



Estabilidad

Por el criterio de Nyquist tenemos que $Z = N + P$, siendo Z el número de polos inestables (polos en el semiplano complejo con parte real positiva) en el sistema realimentado, P el número de polos inestables en cadena abierta y N el número de vueltas (positivas en sentido horario, negativas en el sentido antihorario) que da el Nyquist alrededor del punto -1 , es decir, del $1 \angle -180^\circ$. Por el enunciado del problema tenemos que el sistema es estable en cadena abierta, lo cual quiere decir que $P = 0$. Por otra parte se observa que el Nyquist da dos vueltas en sentido horario alrededor del -1 , y por lo tanto $N = 2$. Eso quiere decir que $Z = 2$ y por tanto el sistema es inestable en cadena cerrada cuando la realimentación es unitaria (cuando $A = 1$).

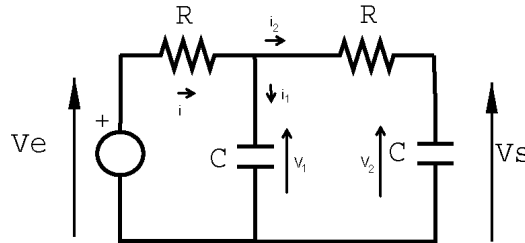
Para hacer el sistema en cadena cerrada estable hay que conseguir que el Nyquist no encierre al punto -1 para que $N = 0$ y por tanto $Z = 0$. Para eso hay que desplazar el punto que se encuentra en $316 \angle -180^\circ$ de forma que quede más a la derecha del -1 lo cual se consigue con un $A < 1/316$. Es decir, para $A < 1/316$ el sistema realimentado es estable, mientras que para $A > 1/316$ el sistema es inestable.

Toda esta deducción es equivalente a decir que puesto que el sistema (en cadena abierta) es de fase mínima (ni polos ni ceros en el semiplano positivo) y puesto que como hemos visto el margen de ganancia es negativo (-50 dB), el sistema es inestable con realimentación unitaria. Para hacerlo estable tenemos que hacer que descienda el Bode de ganancias más de 50 dB, o lo que es lo mismo, tenemos que dividir su ganancia por más de $10^{50/20} = 316$, lo cual nuevamente quiere decir que $A < 1/316$ para que el sistema sea estable en cadena cerrada.

Problema 3

Ecuaciones en espacio de estados

Llamamos V_1 y V_2 a las tensiones en los condensadores, que van a ser las variables de estado, i_1 e i_2 a las corrientes que pasan por ellos, e i a la suma de éstas: $i = i_1 + i_2$. Todas ellas se muestran en la siguiente figura:



Para obtener dos ecuaciones planteamos la suma de tensiones en la malla más a la izquierda:

$$V_e = Ri + V_1 = R(i_1 + i_2) + V_1 \quad (12)$$

y en la malla más a la derecha:

$$V_1 = Ri_2 + V_2 \quad (13)$$

Teniendo en cuenta la relación entre tensión y corriente en los condensadores:

$$i_1 = C \frac{dV_1}{dt} \quad (14)$$

$$i_2 = C \frac{dV_2}{dt} \quad (15)$$

sustituyendo estas corrientes en las ecuaciones (12) y (13), obtenemos:

$$V_e = R \left(C \frac{dV_1}{dt} + C \frac{dV_2}{dt} \right) + V_1 \quad (16)$$

$$V_1 = RC \frac{dV_2}{dt} + V_2 \quad (17)$$

Sustituyendo la ecuación (16) por la diferencia entre la misma y la ecuación 17 para eliminar en ella la derivada de V_2 y despejando las derivadas en ambas ecuaciones se obtiene:

$$\frac{dV_1}{dt} = -\frac{2}{RC}V_1 + \frac{1}{RC}V_2 + \frac{1}{RC}V_e \quad (18)$$

$$\frac{dV_2}{dt} = \frac{1}{RC}V_1 - \frac{1}{RC}V_2 \quad (19)$$

que en forma matricial toma la forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{RC} & \frac{1}{RC} \\ \frac{1}{RC} & -\frac{1}{RC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{RC} \\ 0 \end{pmatrix} V_e \quad (20)$$

Para tener todas las ecuaciones en espacio de estados, completamos con la ecuación de salida, que es simplemente $V_s = V_2$, y en forma matricial:

$$V_s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \quad (21)$$

Tipo de respuesta a escalón a partir de espacio de estados

Para conocer el tipo de respuesta ante entrada escalón que tendrá el sistema a partir de sus ecuaciones en espacio de estados tenemos que hallar el polinomio característico de la matriz \mathbf{A} , puesto que sus raíces son los polos del sistema, que nos informan de sus modos transitorios. La matriz \mathbf{A} era:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{RC} & \frac{1}{RC} \\ \frac{1}{RC} & -\frac{1}{RC} \end{pmatrix} \quad (22)$$

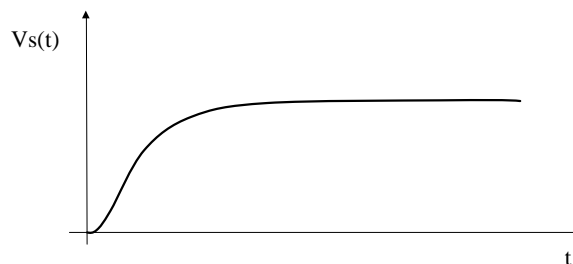
que particularizando con $R = 1000 \Omega$ y $C = 10^{-3} \text{ F}$ es:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (23)$$

Su polinomio característico será:

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} -2 - \lambda & 1 \\ 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda + 1 \quad (24)$$

cuyas raíces son $\lambda_1 = -2.61$ y $\lambda_2 = -0.38$, raíces reales negativas, lo cual quiere decir que es un sistema de 2º orden sobreamortiguado estable y su respuesta a escalón será por tanto del tipo:



Función de transferencia

La función de transferencia se puede calcular a partir de la ecuación:

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \quad (25)$$

También se puede calcular aplicando directamente la transformada de Laplace sobre las ecuaciones de espacio de estados y eliminando la variable V_1 , que no nos interesa. Por

tanto primero aplicamos la transformada de Laplace sobre las ecuaciones (18) y (19), suponiendo condiciones iniciales nulas, con lo que obtenemos respectivamente:

$$sV_1 = -\frac{2}{RC}V_1 + \frac{1}{RC}V_2 + \frac{1}{RC}V_e \quad (26)$$

$$sV_2 = \frac{1}{RC}V_1 - \frac{1}{RC}V_2 \quad (27)$$

Despejamos V_1 de (27):

$$V_1 = (RCs + 1)V_2 \quad (28)$$

y lo sustituimos en (26):

$$s(RCs + 1)V_2 = -\frac{2}{RC}(RCs + 1)V_2 + \frac{1}{RC}V_2 + \frac{1}{RC}V_e \quad (29)$$

Finalmente despejando, obtenemos la función de transferencia:

$$\frac{V_s(s)}{V_e(s)} = \frac{1}{R^2C^2s^2 + 3RCs + 1} \quad (30)$$

El sistema tiene como polos:

$$s = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2RC}$$

que son raíces reales y negativas para todo valor de R y C , con lo cual llegamos a las mismas conclusiones que en el apartado anterior.