

Problema 1. (6 puntos)

Descripción general del proceso.

En el proceso de producción de acero mediante el sistema de colada continua (ver figura 1), el elemento crítico es un depósito denominado *molde* en el que entra un caudal de acero $q_1(t)$ en estado líquido, y sale un caudal de acero $q_2(t)$ en estado semisólido.

En el proceso resulta especialmente importante el control de nivel de acero en el molde, $h(t)$, ya que un rebose o vaciado del mismo tendría consecuencias desastrosas. El nivel se ve afectado por variaciones del caudal de salida, $q_2(t)$, sobre el que no se puede actuar, ya que viene impuesto por factores externos tales como el ritmo de producción.

Para controlar el nivel de acero en el molde existe una válvula que, en función de su grado de apertura $v(t)$, permite actuar sobre el caudal entrante, $q_1(t)$, lo que hace posible diseñar un sistema de control que, a partir de la medida $h_m(t)$ proporcionada por un sensor de nivel, actúe sobre dicho caudal para mantener el nivel de acero en un valor de referencia $r(t)$.

Controlador. El controlador, de tipo proporcional-integral (PI), modifica la posición de la válvula, $v(t)$ en función del error

$$e(t) = r(t) - h_m(t)$$

según,

$$v(t) = K_p \cdot e(t) + K_i \cdot \int_{-\infty}^t e(t) dt$$

siendo los parámetros $K_p = 1$ y $K_i = 1$

Molde. El nivel del molde varía de acuerdo con la ley de la conservación de la masa

$$\overbrace{A(h) \cdot \frac{dh(t)}{dt}}^{dV/dt} = q_1(t) - q_2(t)$$

donde $A(h) = l \times a = 3 \cdot (h + 1)$ es el área de la sección del molde a la altura del nivel del mismo (ver figura 2).

Válvula. De acuerdo con la geometría de la válvula, la apertura de la misma, $v(t)$ está relacionada con el caudal de entrada al molde según la ecuación

$$q_1(t) = v(t)^2$$

Sensor. El sensor que mide el nivel de acero en el molde es objeto de ruido e imprecisiones debidas a las condiciones adversas de trabajo

$$h_m(t) = h(t) + n(t)$$

donde $h_m(t)$ es la medida de $h(t)$ que da el sensor, y $n(t)$ representa el ruido e imprecisiones.

Se pide:

- Realizar un diagrama estructural, en el que se especifiquen con claridad todos los subsistemas que componen el proceso (válvula de control, molde, etc.) así como las principales variables (q_1 , q_2 , h , n , etc.) indicando claramente el flujo de señal entre los subsistemas.
- Linealizar el proceso para un punto de funcionamiento dado por $r(0) = 1$, con una demanda $q_2(0) = 4$, y en ausencia de ruido en el sensor ($n(t) = 0$), obteniendo las funciones de transferencia de los subsistemas.
- Trazar un diagrama de bloques del sistema de control, indicando claramente el proceso, las variables y las perturbaciones que afectan al sistema.
- Las demandas de acero debidas a requerimientos de producción aguas abajo, a menudo se traducen variaciones de tipo escalón en el caudal de salida, $q_2(t)$. Calcular la variación en régimen permanente de la altura del nivel del molde, $h(t)$, cuando $q_2(t)$ pasa de 4 a 5. Trazar aproximadamente su evolución temporal.
- El sensor de altura trabaja en un medio hostil, con altas temperaturas, radiación térmica, gases e interferencias electromagnéticas. Esto produce alteraciones, $n(t)$, en la medida que da el sensor, $h_m(t)$ que se pueden suponer aditivas (ver ecuación del sensor, más arriba). Calcular la variación en la altura del molde, $h(t)$ cuando el sensor se somete a ruidos $n(t)$ senoidales de amplitud 1 y frecuencias de 2 rads/s y 50 rads/s.

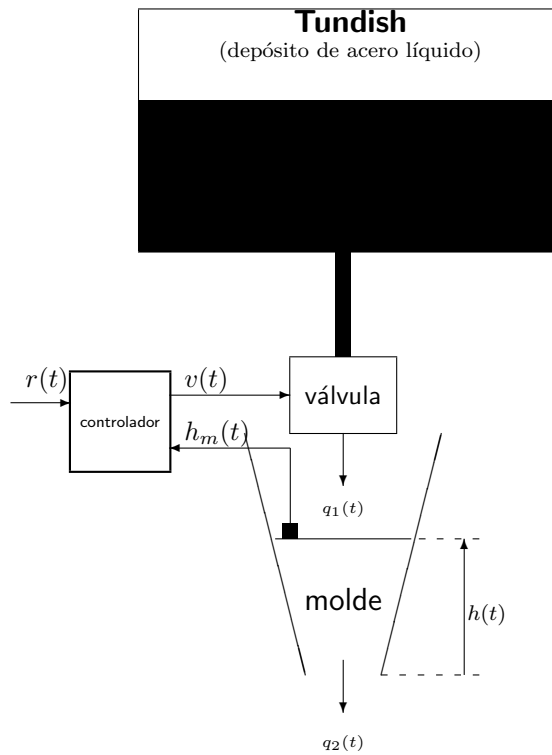


Figura 1: Diagrama esquemático de un proceso de colada continua.

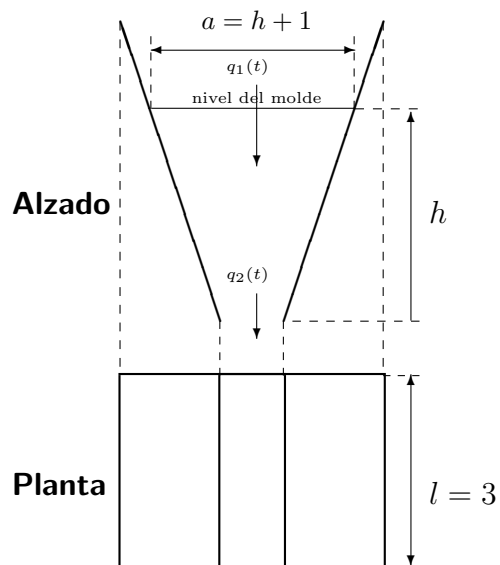


Figura 2: Dimensiones del molde.

Problema 2. (2,5 puntos) Se pretende regular un proceso (estable en cadena abierta y de fase mínima) por medio de un regulador proporcional. Con vistas a analizar como será su estabilidad cuando se realimente, se hacen ensayos (en cadena abierta) con distintas frecuencias de entrada cuyos resultados se muestran en la figura 3:

Se pide:

- Obtener el diagrama de Bode del sistema en cadena abierta.
- Discutir para qué valores $K > 0$ de la acción proporcional el sistema realimentado (ver figura 4) es estable.

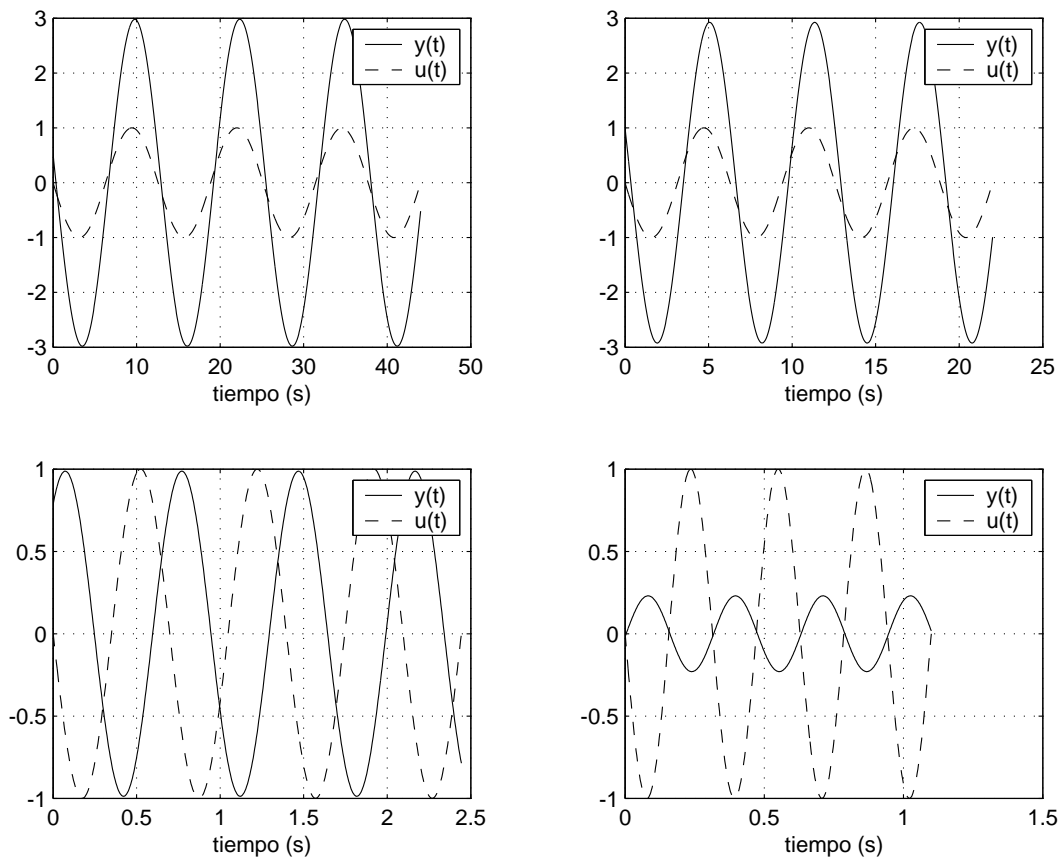


Figura 3: Resultados de ensayos frecuenciales, donde $u(t)$ es la entrada del proceso e $y(t)$ es la salida.

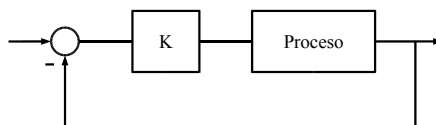


Figura 4: Proceso realimentado con regulador proporcional.

Problema 3. (1,5 puntos) Una esfera de diámetro D , masa m , y con carga eléctrica q se encuentra inmersa en un campo eléctrico $E(t)$ variable en el tiempo pero independiente de la posición y conservando siempre la dirección del eje x (ver figura 5). En ese mismo espacio se encuentra un fluido que produce una fuerza de rozamiento viscosa sobre la esfera proporcional a la velocidad, con constante de proporcionalidad $3\pi D\eta$, donde η es la viscosidad del fluido.

Se pide:

- Obtener las ecuaciones en espacio de estados de la posición de la esfera a lo largo del eje x .
- Obtener la velocidad a la que tiende la esfera cuando se mantiene constante el campo eléctrico en un valor E_0 .

NOTA: No se tendrán en cuenta efectos gravitatorios.

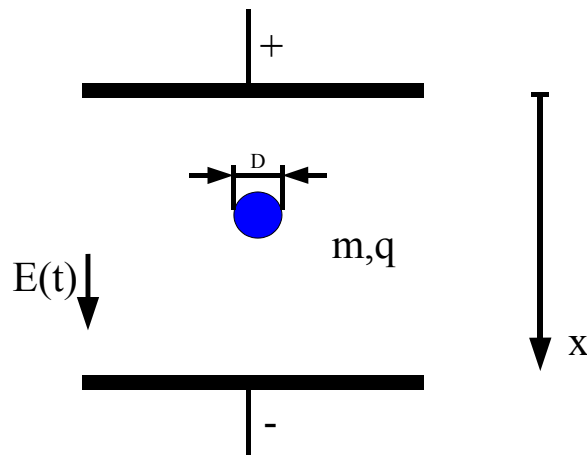


Figura 5: Esquema de la esfera cargada en un fluido sometida a un campo eléctrico.

Soluciones

Problema 1

Diagrama estructural. A partir de la información sobre el proceso que nos da el enunciado, el diagrama estructural queda como sigue:

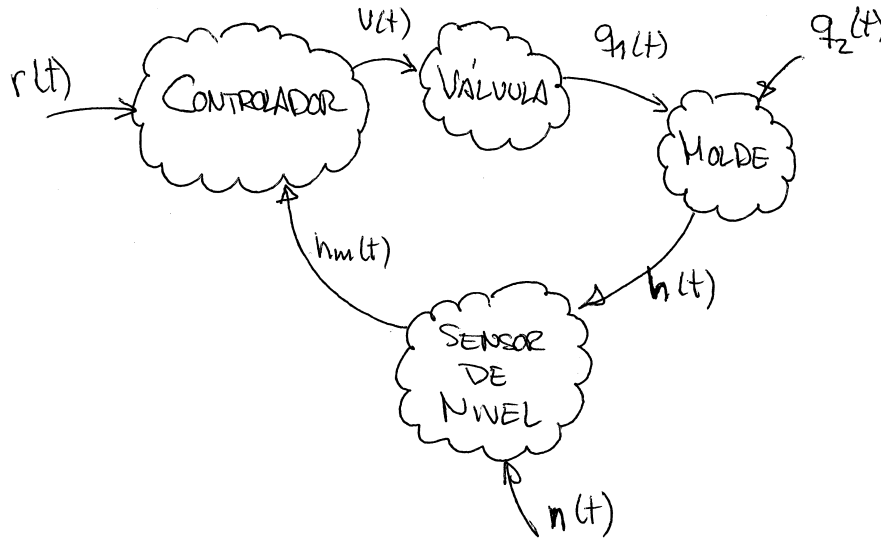


Figura 6: Diagrama estructural del sistema de control de nivel en el proceso de colada continua.

Linealización. Lo primero es hallar el punto de equilibrio. Dado que en el equilibrio las derivadas son nulas (las variables no cambian) puede deducirse lo siguiente para el estado de equilibrio:

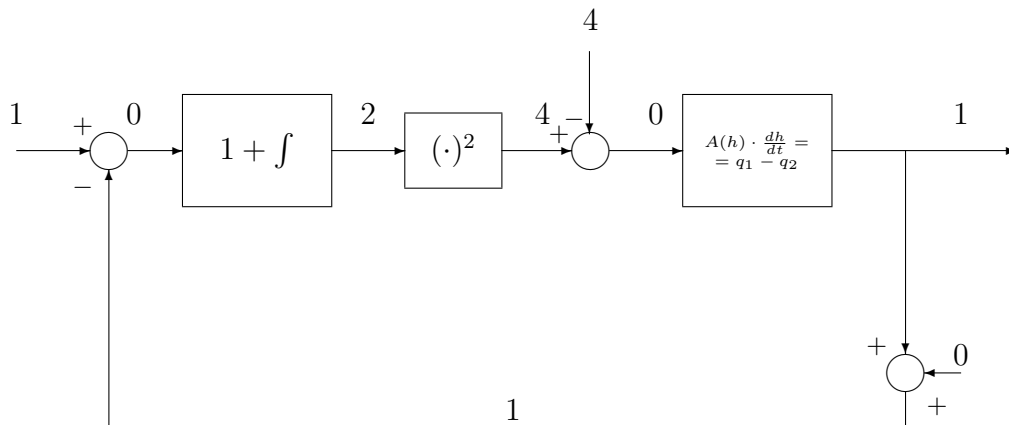


Figura 7: Diagrama de funcional del sistema de control en el estado de equilibrio.

- La ecuación del regulador PI se puede poner como

$$\frac{dv(t)}{dt} = K_p \cdot \frac{de(t)}{dt} + K_i \cdot e(t)$$

en el estado de equilibrio se tiene

$$0 = K_p \cdot 0 + K_i \cdot e(t) \quad \rightarrow \quad e(0) = 0$$

$$e(0) = r(0) - h_m(0) \quad \rightarrow \quad h_m(0) = r(0) = 1$$

- Por la misma razón, al anularse la derivada de $dh(t)/dt$ en la ecuación del molde, se tiene

$$A(h) \cdot 0 = q_1(t) - q_2(t) \quad \rightarrow \quad q_1(0) = q_2(0) = 4$$

- Dado que $q_1(0) = 4 = v(0)^2$, la apertura de la válvula en el origen será $v(0) = \pm\sqrt{4} = \pm 2$. Obviamente, sólo tienen sentido aperturas positivas, luego nos quedamos con la raíz positiva, $v(0) = 2$.

Con esto, ya tenemos el valor de todas las variables en el origen:

$$e(0) = 0$$

$$v(0) = 2$$

$$q_1(0) = 4$$

$$q_2(0) = 4$$

$$h(0) = 1$$

$$h_m(0) = 1$$

$$n(0) = 0$$

$$r(0) = 1$$

Los elementos no lineales y que, por tanto requieren linealización son la ecuación del molde –tiene un producto de dos variables– y la válvula –tiene un cuadrado–. La ecuación original es,

$$3(h(t) + 1) \cdot \frac{dh(t)}{dt} = q_1(t) - q_2(t)$$

aplicando Taylor en torno al punto de equilibrio para aproximar cualquier expresión del tipo $f(x_1, \dots, x_n)$

$$\Delta f(x_1, \dots, x_n) \approx \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{x_i=0} \cdot \Delta x_i$$

tenemos, para la ecuación del molde

$$3(h(0) + 1) \cdot \Delta \dot{h} = \Delta q_1 - \Delta q_2$$

$$6 \cdot \Delta \dot{h} = \Delta q_1 - \Delta q_2$$

quedando,

$$\Delta \dot{h} = \frac{1}{6} (\Delta q_1 - \Delta q_2)$$

análogamente, para la válvula se tiene:

$$\Delta q_1 = 2v(0)\Delta v$$

es decir,

$$\Delta q_1 = 4\Delta v$$

los demás elementos, como el regulador, son ya lineales y pueden traducirse directamente a Laplace. El diagrama de bloques queda

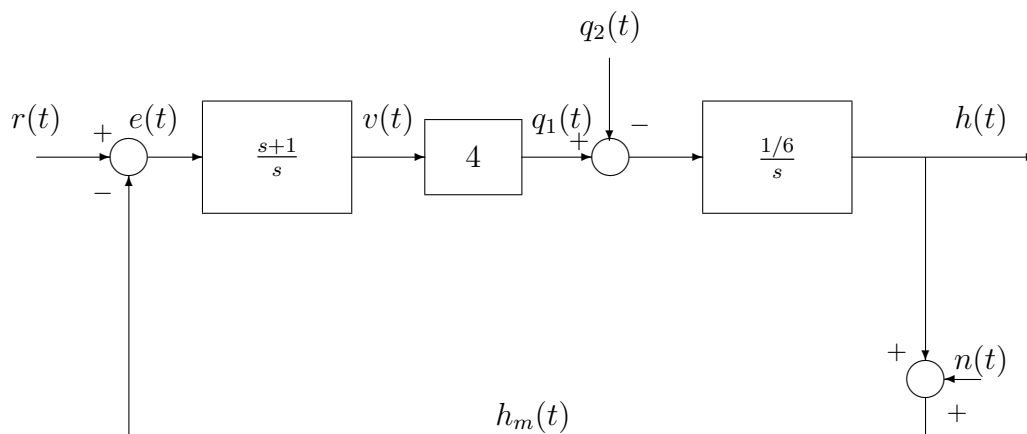


Figura 8: Diagrama de bloques.

Perturbación en q_2 El paso de q_2 de 4 a 5 supone un escalón de amplitud 1 respecto al punto de equilibrio –recuérdese que una vez linealizado el sistema, todas las variables que manejamos son “ Δ ’s”, es decir diferencias respecto al punto de equilibrio–

Para hallar el impacto sobre el nivel del molde, $h(t)$, habrá que calcular la función de transferencia (fdt) entre q_2 y h . Dicha función será

$$G_{q_2h}(s) = \frac{-G(s)}{1 + C(s)V(s)G(s)}$$

donde $G(s) = \frac{1/6}{s}$ es la fdt del molde, $V(s) = 4$ es la fdt de la válvula y $C(s) = \frac{s+1}{s}$ es la fdt del controlador, quedando

$$G_{q_2h}(s) = \frac{-\frac{1/6}{s}}{1 + \frac{s+1}{s} \cdot 4 \cdot \frac{1/6}{s}} = \frac{-1/6 \cdot s}{s^2 + 0.66s + 0.66}$$

aplicando el teorema del valor final, para un escalón unitario, se tiene

$$\Delta h(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s} \cdot G_{q_2h}(s) = \frac{-1/6 \cdot 0}{0^2 + 0.66 \cdot 0 + 0.66} = 0$$

dado que $\Delta h(\infty) = h(\infty) - h(0) = 0$ se tiene que $h(\infty) = h(0) = 1$. Por tanto, en el permanente se compensará totalmente una variación en la demanda, recuperando el nivel de acero el valor inicial de 1 (coincidente con la referencia). Esto puede verse también como una consecuencia típica de los reguladores de tipo PI, que anulan los errores en régimen permanente, entre ellos, los debidos a una perturbación de carga como q_2 .

Ruido del sensor. Aplicando álgebra de bloques básica, la función de transferencia desde $n(t)$ hasta $h(t)$ queda

$$G_{nh}(s) = \frac{-1/6 \cdot (s + 1)}{s^2 + 0.66s + 0.66}$$

El diagrama de bode queda

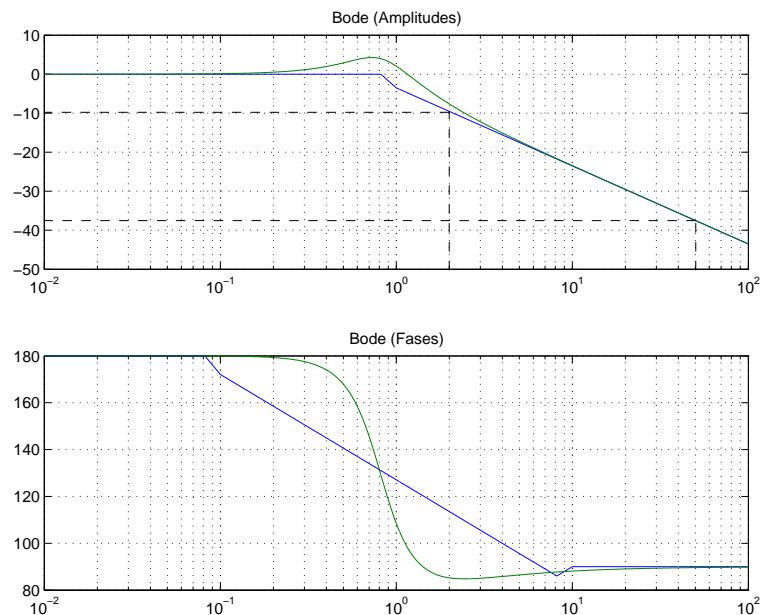


Figura 9: Diagrama de bode de G_{nh} .

como puede verse, tomando los módulos para $\omega = 2$ y para $\omega = 50$ se obtienen ganancias de -10 dB –algo más en el Bode real– y -37 dB respectivamente, que corresponden en p.u. a valores de 0.316 y 0.014.

Ambas ganancias son menores de la unidad, por tanto, los ruidos a 2 rad/s y a 50 rads/s se atenuarán, aunque el ruido de baja frecuencia se atenúa mucho menos que el de alta frecuencia. Tienen más impacto en el sistema, por tanto, las imprecisiones y ruidos de baja frecuencia en el sensor que los ruidos de alta frecuencia.

Problema 2

Diagrama de Bode

A partir de las respuestas se pueden obtener las ganancias $|G(j\omega)|$ como relación de amplitudes entre salida y entrada, para posteriormente aplicarle $20 \log_{10}$ para obtener decibelios. Los desfases se obtienen (en radianes) como $\angle G(j\omega) = 2\pi\Delta t/T = \omega\Delta t$, donde Δt es el tiempo de adelanto de la salida respecto a la entrada, T es el periodo y ω es la pulsación angular, ambos tanto de la entrada como de la salida. Como resultado se obtienen los valores aproximados de la siguiente tabla:

T (s)	ω (rad/s)	$ G(j\omega) $	$ G(j\omega) $ (dB)	Δt (s)	$\angle G(j\omega)$ (grados)
13	0.5	3	9.5	≈ 0	0
6.4	1	3	9.5	0.5	-29
0.71	9	1	0	0.24	-124
0.31	20	0.25	-12	(innecesario)	-180

En la tabla se puede observar que los desfases son negativos debido a que la salida está retrasada respecto a la entrada. De la tabla obtenemos el diagrama de Bode:

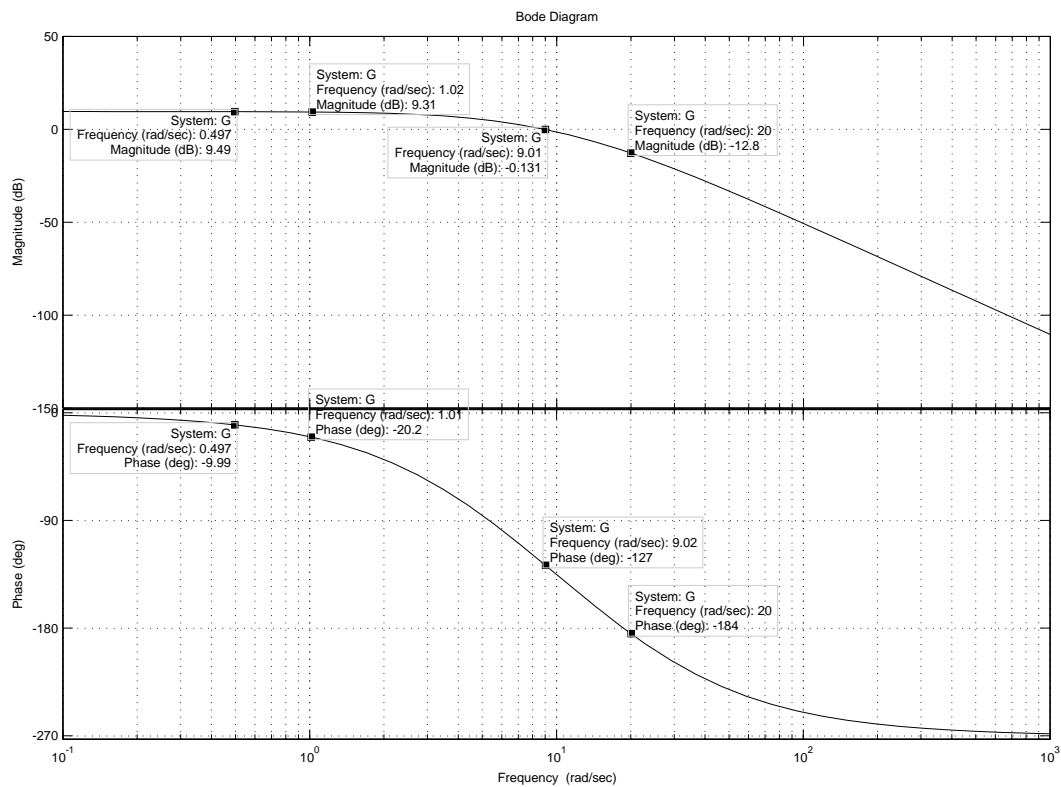


Figura 10: Diagrama de Bode

Estabilidad

Observando el Bode de fases se deduce que el sistema en cadena abierta no tiene polos en el origen (desfase a bajas frecuencias nulo) y por el de ganancias que

tampoco va a haber polos imaginarios puros (que provocarían resonancia infinita), con lo cual el camino de Nyquist va a tener los tramos típicos I, II y III. La imagen del tramo I (línea continua) comienza en el punto $3\angle 0^\circ$, y continuamente van disminuyendo módulo y argumento, pasando por el punto $0.25\angle -180^\circ$ (ganancia -12 dB con desfase -180° en los diagramas de Bode), y llegando al origen (por tener ganancia nula, $-\infty$ en decibelios, a frecuencia infinita) con un ángulo de -270° . La imagen del tramo II es el origen y la del tramo III simétrica respecto al eje real de la del tramo I (línea discontinua).

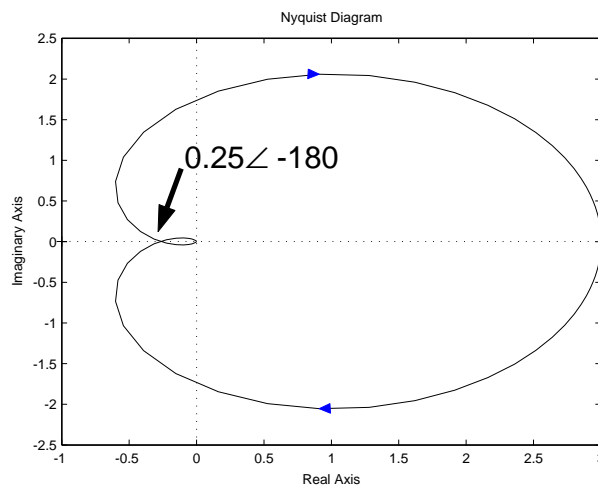


Figura 11: Diagrama de Nyquist

Por el criterio de Nyquist tenemos:

$$Z = N + P \quad (1)$$

siendo Z el número de polos inestables (polos en el semiplano complejo con parte real positiva) en el sistema realimentado, P el número de polos inestables en cadena abierta y N el número de vueltas (positivas en sentido horario, negativas en el sentido antihorario) que da el Nyquist alrededor del punto -1 , es decir, del $1\angle -180^\circ$.

Por el enunciado del problema tenemos que el sistema es estable en cadena abierta, lo cual quiere decir que $P = 0$. Por otra parte se observa que el Nyquist no rodea al punto -1 , lo cual significa que $N = 0$, por tanto $Z = 0$, y el sistema es estable en cadena cerrada cuando la acción proporcional es la unidad (cuando $K = 1$). Sin embargo, al aumentar la K llegará un momento en que el Nyquist sí encierre al -1 y dé dos vueltas en sentido horario alrededor del mismo, y por lo tanto $N = 2$. Eso quiere decir que $Z = 2$ y por tanto el sistema será inestable en cadena cerrada cuando esto ocurra, y será con $K \geq 1/0.25$, es decir con $K \geq 4$ (para ser exactos, en la igualdad el sistema realimentado es marginalmente estable).

Existe otra forma más sencilla de enfocar la solución para este caso tan simple. Como es un sistema de fase mínima, basta trazar la imagen del tramo I y observar

si rodea al -1 . En este caso sólo hay un punto que tenga -180° de desfase (es decir, que corte al semieje real negativo), situación que corresponde con la cuarta respuesta a senoidal proporcionada y que nos da el punto $0.25\angle -180^\circ$. Como queda a la derecha del -1 , eso nos indica que aún podemos poner una ganancia de hasta $1/0.25 = 4$ antes que dicho punto alcance el punto crítico $1\angle -180^\circ$. Por tanto, el sistema con regulación proporcional de valor K será estable para $K < 4$ e inestable para $K \geq 4$.

NOTA: Como puede resultar demasiado sutil la diferencia y se puede confundir este caso de un tercer orden con un segundo orden, se da este último como válido. Entonces el desfase tiende a -180° (nunca llega) y por lo tanto el Nyquist nunca rodea al -1 por muy grande que sea K y es estable siempre.

Problema 3

Ecuaciones en espacio de estados

La esfera se encuentra sometida a dos fuerzas: la fuerza del campo eléctrico $F_e(t) = qE(t)$ y la fuerza de rozamiento viscoso $F_r(t) = 3\pi D\eta v(t)$, donde $v(t)$ es la velocidad de la esfera. Aplicado $\sum F = ma$ (nótese que la fuerza de rozamiento viscoso tiene sentido contrario al de avance) obtenemos la ecuación del movimiento de la esfera:

$$qE(t) - 3\pi D\eta \frac{dx(t)}{dt} = m \frac{d^2x(t)}{dt^2} \quad (2)$$

a la que sólo tenemos que añadir la ecuación que relaciona $x(t)$ con $v(t)$ y despejar para tener las ecuaciones en espacio de estados:

$$\frac{dv(t)}{dt} = -\frac{3\pi D\eta}{m}v(t) + \frac{q}{m}E(t) \quad (3)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = v(t) \quad (4)$$

o también en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \dot{v} \\ \dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3\pi D\eta}{m} & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{q}{m} \\ 0 \end{pmatrix} E \quad (5)$$

Sólo falta la ecuación de salida, que en este caso es trivial por corresponder la señal de interés, la posición, con una de las variables de estado:

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ x \end{pmatrix} \quad (6)$$

Velocidad límite

El cálculo de la velocidad límite se puede realizar a partir de la ecuación (3), teniendo en cuenta que lo que buscamos es la velocidad en régimen permanente cuando la entrada (el campo) vale E_0 . Puesto que en régimen permanente su derivada se anula, $\dot{v} = 0$, particularizando para el régimen permanente y llamando v_∞ a la velocidad en régimen permanente, la ecuación (3) queda:

$$0 = -\frac{3\pi D\eta}{m}v_\infty + \frac{q}{m}E_0 \quad (7)$$

y despejando llegamos al resultado final:

$$v_\infty = \frac{qE_0}{3\pi D\eta} \quad (8)$$

Otra posibilidad, menos directa, es hallar la función de transferencia de (3) y aplicar el teorema del valor final con una entrada escalón de valor E_0 .