Problema 1. (5 puntos)

Se desea desarrollar un sistema de control de temperatura de un horno para la realización de ensayos de laboratorio, cuyo objetivo es mantener una temperatura estable independientemente de las fugas de calor. El sistema (ver figura 1) consta de los siguientes elementos:

Sensor de Temp.: Un sensor se encarga de dar una medida de la temperatura, $\hat{T}(t)$. Este sensor no da instantáneamente la temperatura del horno $T(t)$ pudiendo considerarse un sistema de primer orden, de ganancia K_s y constante de tiempo τ_s segundos.

Comparador: Compara la temperatura medida por el sensor $\hat{T}(t)$ con la temperatura de referencia $T^*(t)$ dando una señal de error

$$e(t) = T^*(t) - \hat{T}(t)$$

Regulador: El sistema está dotado de un regulador proporcional-integral (PI) que, en función del error cometido, genera una referencia de tensión para el amplificador

$$v(t) = K_p \cdot e(t) + K_i \cdot \int e(t)dt$$

Ampl. de corriente: El amplificador de corriente produce una corriente proporcional a la referencia de tensión

$$i(t) = K_a \cdot v(t)$$

Resistencia: La resistencia de calentamiento produce el flujo de calor necesario para calentar el horno por el efecto *Joule*:

$$Q_r(t) = R \cdot i(t)^2$$

Horno: La ecuación de la temperatura en el horno es la siguiente:

$$Q_r(t) = C \cdot \frac{dT(t)}{dt} + K_f \cdot [T(t) - T_e(t)]$$

donde $Q_r(t)$ es el flujo de calor que aporta la resistencia, C es la capacidad calorífica del horno, K_f es una constante de fugas y $T_e(t)$ es la temperatura exterior.

Se pide,

1. Realizar un diagrama estructural del sistema en conjunto, indicando claramente los subsistemas y el flujo de señal entre ellos.

2. Calcular el punto de equilibrio para $T_e(0) = 25^o$C y una referencia $T^*(0) = 40^o$C.

3. Linealizar los elementos no lineales que pueda tener el sistema.

4. Obtener un diagrama de bloques.

5. Determinar aproximadamente la respuesta del sistema cuando, partiendo del equilibrio anterior, la referencia pasa de 40^oC a 45^oC y la temperatura exterior baja de 25^oC a 24^oC. *Nota: para este apartado puede despreciarse la dinámica del captador* ($\tau_s \approx 0$)

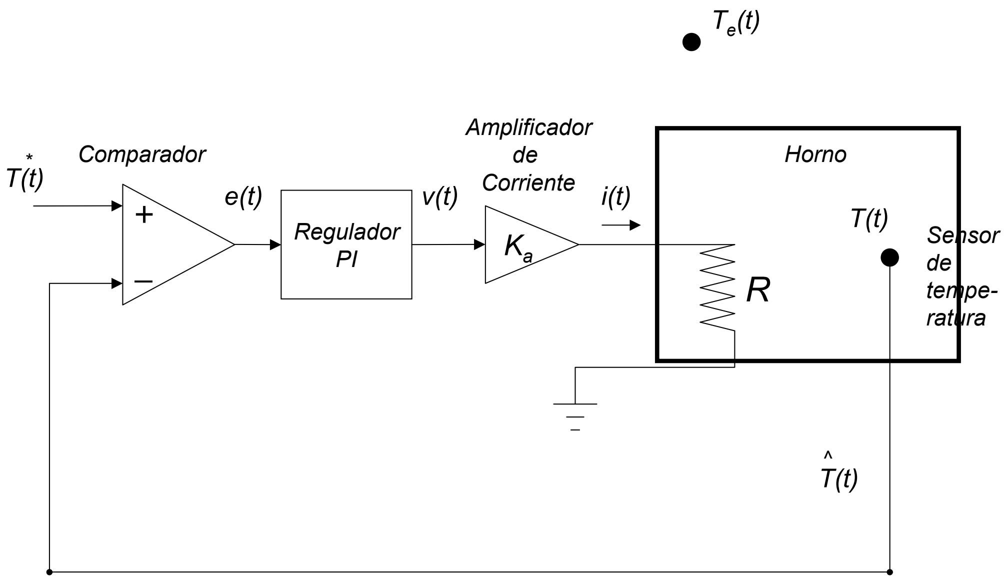


Figura 1: Elementos del sistema de control de temperatura del horno.

Datos: (*donde no se especifique, tomar unidades del sistema internacional*)

$$
\begin{aligned}
\text{Horno:} & \\
C &= 2.4 \\
K_f &= 0.2 \\
\text{Regulador:} & \\
K_p &= 0.2 \\
K_i &= 0.01 \\
\text{Resistencia:} & \\
R &= 3 \\
\text{Amplificador:} & \\
K_a &= 4 \\
\text{Sensor:} & \\
K_s &= 1 \\
\tau_s &= 10 \text{ seg.}
\end{aligned}
$$

(página en blanco)

Problema 2. (2,5 puntos)

En una sala se tiene el sistema de megafonía representado en la figura 3 formado por un micrófono, unido a un amplificador de ganancia regulable K (volumen), que está unido a su vez a un altavoz. Además existe una realimentación, puesto que el sonido que sale por el altavoz llega de nuevo al micrófono a través de la sala (atenuado y modificado según las características de la misma entre altavoz y micrófono). La respuesta en frecuencia de este sistema en cadena abierta (relación entre el sonido que entra por el micrófono y el que vuelve a él desde el altavoz) con $K = 1$ es el mostrado en la figura 2. Cuando el sistema realimentado descrito se vuelve inestable, se produce un característico pitido, fenómeno que se denomina "acople". Se pide:

- Dibujar el diagrama de Nyquist, identificando en el mismo y en el diagrama de Bode las coordenadas de los puntos clave para la determinación de la estabilidad del sistema realimentado.

- Hallar el volumen máximo (valor $K > 0$ de la ganancia del amplificador) para que no se produzca el acople.

NOTA: El sistema es estable en cadena abierta.

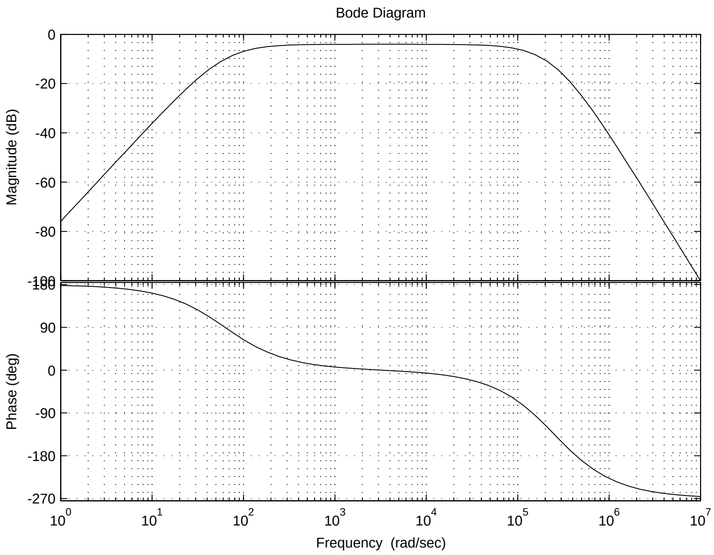


Figura 2: Respuesta en frecuencia del sistema en cadena abierta.

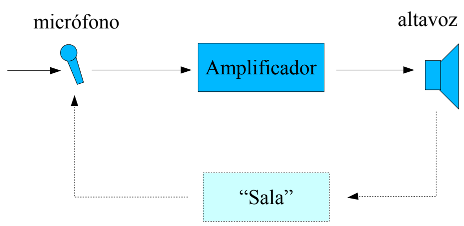


Figura 3: Sistema micrófono-amplificador-altavoz.

Problema 3. (2,5 puntos)

Dado el esquema del motor de continua representado en la figura, donde $u_m(t)$ es la fuerza contra-electromotriz, $P_m(t)$ es el par motor, $P_r(t)$ el par de rozamiento, $u(t)$ es la tensión de alimentación, R es la resistencia del circuito eléctrico, L su inductancia, J es el momento de inercia del motor, y por último k_p y k_b son constantes, se pide:

- Obtener las ecuaciones en espacio de estados del motor de continua tomando como variables de estado su posición angular θ, su velocidad angular $\dot{\theta}$ y la corriente i y como variables de salida la posición angular y la velocidad angular.

- Tomando los valores $R = 1$ y $L = J = k_p = k_b = B = 0.1$ obtener sus polos y trazar de forma aproximada la evolución de su velocidad y su posición en el arranque, en el que la tensión pasa instantáneamente de 0 V a su tensión nominal V_N.

NOTA: La ecuación básica de la dinámica de rotación es $\sum M = I\alpha$, donde $\sum M$ es la resultante de pares o momentos de las fuerzas, I es el momento de inercia y α es la aceleración angular.

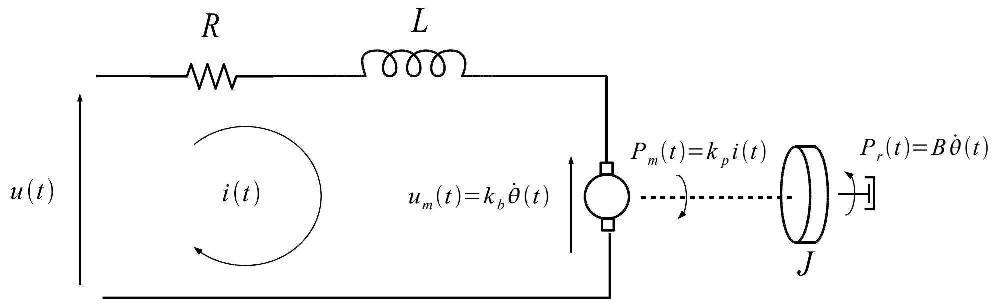


Figura 4: Esquema del motor.

Soluciones

Problema 1 A partir de la descripción técnica del sistema que viene en el enunciado, procurando elegir los subsistemas de manera físicamente intuitiva y teniendo especial cuidado en diferenciar lo que son *entradas* (variables "causa", que influyen en el sistema pero no se ven influidas por él) y *salidas* (variables "respuesta", "consecuencia" o "efecto" que evolucionan a consecuencia de la dinámica del sistema), podemos establecer el siguiente diagrama estructural:

Figura 5: Diagrama estructural

Para calcular el punto de equilibrio, ponemos todas las ecuaciones del sistema como ecuaciones diferenciales

$$\tau_s \cdot \frac{d\hat{T}(t)}{dt} + \hat{T}(t) = K_s T(t)$$
$$e(t) = T^*(t) - \hat{T}(t)$$
$$\frac{dv(t)}{dt} = K_p \frac{e(t)}{dt} + K_i \cdot e(t)$$
$$i(t) = K_a \cdot v(t)$$
$$Q_r(t) = R \cdot i(t)^2$$
$$Q_r(t) = C \cdot \frac{dT(t)}{dt} + K_f \cdot [T(t) - T_e(t)]$$

En la situación de equilibrio, las variables son constantes y sus derivadas son cero ($\frac{d}{dt} = 0$)

$$\hat{T}(0) = K_s T(0)$$
$$e(0) = T^*(0) - \hat{T}(0)$$
$$0 = K_i \cdot e(0)$$
$$i(0) = K_a \cdot v(0)$$
$$Q_r(0) = R \cdot i(0)^2$$
$$Q_r(0) = K_f \cdot [T(0) - T_e(0)]$$

De estas ecuaciones tiene especial interés conceptual el hecho de que el error $e(t) = 0$, debido al regulador de tipo proporcional-integral (PI). Resolviendo para $T = 40$ y $T_e = 25$ se llega fácilmente a los siguientes valores:

$$\begin{aligned} e(0) &= 0 \\ T(0) &= \hat{T}(0) = T^*(0) = 40 \\ Q_r(0) &= 3 \\ i(0) &= 1 \\ v(0) &= 0.25 \end{aligned}$$

Observando las ecuaciones diferenciales, vemos que todas ellas son lineales excepto la de la resistencia, que contiene un término cuadrático. Linealizamos, por tanto sólo esa ecuación (las otras son triviales):

$$\Delta Q_r(t) = 2Ri(0) \cdot \Delta i(t)$$

quedando,

$$\Delta Q_r(t) = 6\Delta i(t)$$

Tomando como variables las diferencias respecto al punto de equilibrio (las "deltas") y pasando al dominio de Laplace, todos los subsistemas tienen ya su función de transferencia, que será válida para pequeñas variaciones de las variables en torno al punto de equilibrio definido anteriormente (cuanto mayores sean las diferencias, más inexacto será el modelo dinámico linealizado). Expresado en diagrama de bloques se muestra en la figura adjunta

Figura 6: Diagrama de bloques

Nótese, en la figura cómo la variable T_e, al igual que la consigna T^*, es claramente una *entrada* pues a través de la ecuación de la dinámica térmica del horno influye en la temperatura T a través de la dinámica del horno sin verse a su vez influida. Este tipo de variables de entrada, que escapan a nuestro control (pues no podemos influir sobre ellas) y afectan al comportamiento de un bucle de control se denominan habitualmente *perturbaciones*.

Para obtener la respuesta del sistema ante una variación simultánea en la temperatura de referencia (escalón de 5ºC) y de la temperatura exterior (escalón de -1^oC) aplicaremos el *principio de superposición*: hallamos primero la respuesta ante un escalón de amplitud 5 en $T^*(t)$ para $T_e(t) = 0$, y en segundo lugar, la respuesta ante un escalón de amplitud -1 en $T_e(t)$ para $T^*(t) = 0$. Sumando ambas respuestas obtendremos el resultado de la aplicación simultánea de ambos escalones.

La función de transferencia entre la temperatura de referencia, T^* y la temperatura del horno T es

$$G_{T^*,T}(s) = \frac{120\,s + 6}{600\,s^3 + 110\,s^2 + 125\,s + 6}$$

Su respuesta al escalón puede calcularse aplicando

$$T(s)|_{T_e=0} = T^*(s) \cdot G_{T^*,T}(s) = \frac{5}{s} \cdot \frac{120\,s + 6}{600\,s^3 + 110\,s^2 + 125\,s + 6}$$

y resolviendo por los procedimientos habituales

[1],

quedando,

[1]No lo haremos aquí. Compruébelo el alumno en Matlab con la ayuda de las funciones `roots()`

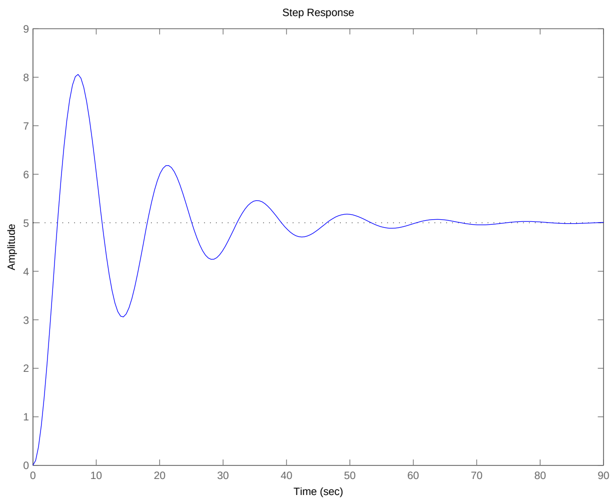


Figura 7: Respuesta ante un escalón de amplitud 5 en la referencia

Aplicando álgebra de bloques, la función de transferencia entre la temperatura ambiente T_e y la temperatura del horno T es,

$$G_{T_e,T}(s) = 5\,\frac{(10\,s+1)\,s}{600\,s^3+110\,s^2+125\,s+6}$$

análogamente

$$T(s)|_{T^*=0} = T_e(s)\cdot G_{T_e,T}(s) = \frac{-1}{s}\cdot 5\,\frac{(10\,s+1)\,s}{600\,s^3+110\,s^2+125\,s+6}$$

---

y residue() . Los residuos son

$$\begin{bmatrix} -2.48+0.376\,\sqrt{-1} \\ -2.48-0.376\,\sqrt{-1} \\ -0.0431 \\ 5.0 \end{bmatrix}$$

Las raíces del denominador de $T(s)|_{T_e=0}$ son

$$\begin{bmatrix} -0.0669+0.444\,\sqrt{-1} \\ -0.0669-0.444\,\sqrt{-1} \\ -0.0496 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aplicando Heaviside para el caso complejo nos da modos exponenciales oscilatorios (senoides amortiguadas), un comportamiento exponencial decreciente (polo en -0.0431) y un valor en régimen permanente de 5, que también se puede determinar aplicando el teorema del valor final.

Todo ello da lugar al comportamiento observado en las figuras.

quedando [2],

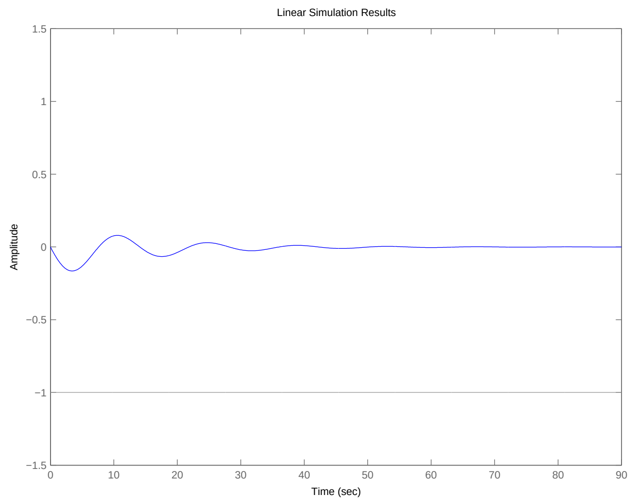


Figura 8: Respuesta ante un escalón de amplitud -1 en la temperatura exterior.

Aplicando el *principio de superposición*, la respuesta es la suma de las dos anteriores

$$T(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{ T(s)|_{T^*=0} + T(s)|_{T_e=0} \right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{ T(s)|_{T^*=0} \right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{ T(s)|_{T_e=0} \right\}$$

Para poder apreciar la suma, en la figura siguiente hemos supuesto que la perturbación en T_e sucede en el instante $t = 100$.

[2]Para el caso de la perturbación $T(s)|_{T^*=0}$ da unos residuos

$$\begin{bmatrix} 0.0106 + 0.0934\sqrt{-1} \\ 0.0106 - 0.0934\sqrt{-1} \\ -0.0213 \end{bmatrix}$$

asociados a los polos

$$\begin{bmatrix} -0.0669 + 0.444\sqrt{-1} \\ -0.0669 - 0.444\sqrt{-1} \\ -0.0496 \end{bmatrix}$$

Como se ve, no hay modos transitorios asociados a polos en el origen, es decir, todos los modos transitorios tienden a cero y por tanto su suma, tal y como se observa en la figura. En definitiva, la perturbación por variación de la temperatura exterior tiende a desvanecerse.

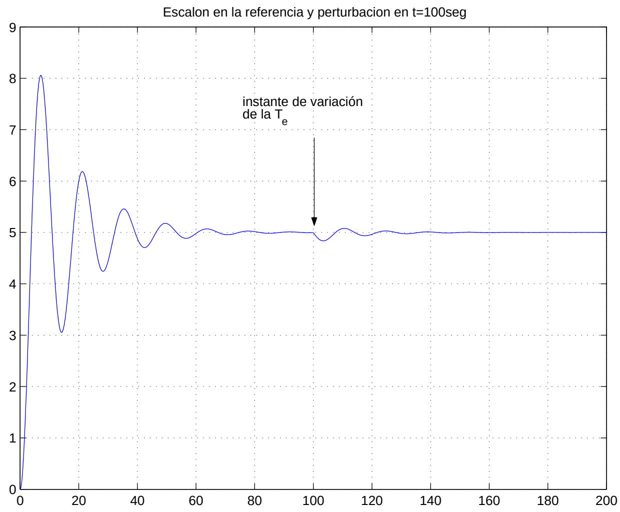


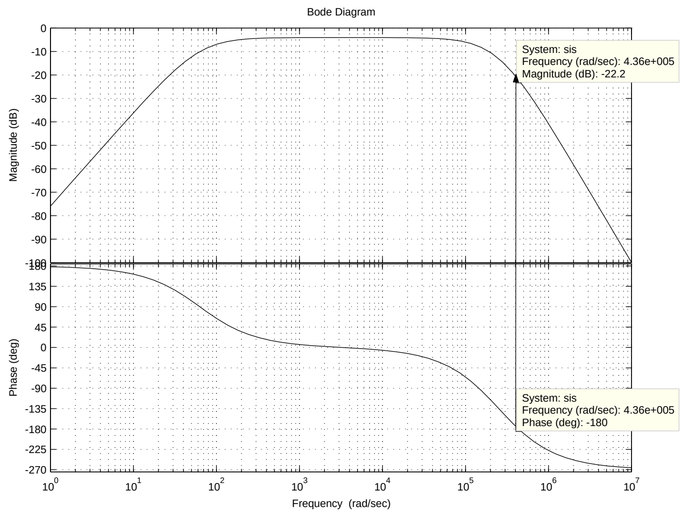
Figura 9: Respuesta ante un escalón de amplitud 5 en la referencia y escalón de amplitud -1 en la temperatura exterior en el instante $t = 100$ seg.

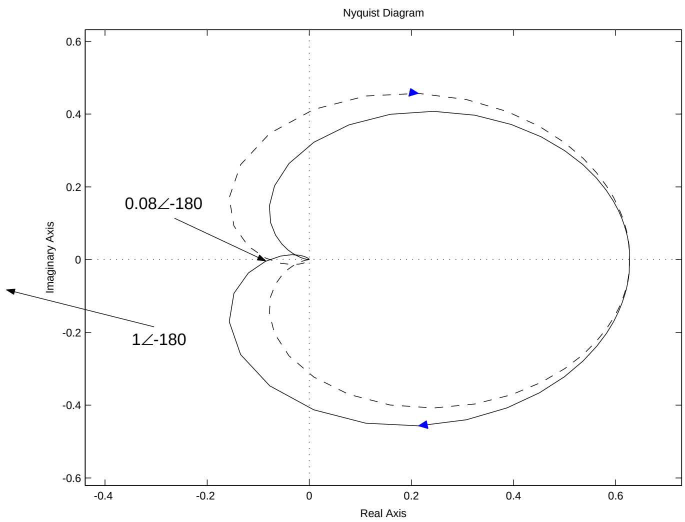
Soluciones

Problema 2

Diagrama de Nyquist

En las siguientes figuras se representan, tanto en el diagrama de Bode como en el diagrama de Nyquist, los puntos clave para determinar la estabilidad del sistema. Puesto que el sistema en cadena abierta es estable, no tiene polos en el eje imaginario, y el diagrama de Nyquist está formado por las imágenes de los tramos típicos I, II y III. La imagen del tramo I (línea continua) empieza en el origen con ángulo 180º y acaba de nuevo en el origen con ángulo -270^o, la imagen del tramo II es el origen, y por último la imagen del tramo III comienza en el origen con ángulo 270º y acaba de nuevo en el origen con ángulo -180^o. El punto clave por el que pasa el Nyquist es el $0{,}8\angle -180^o$, que corresponde a los -22 dB en el Bode.





Estabilidad

El sistema es estable en cadena abierta, y por lo tanto no tiene polos en el semiplano positivo: $P = 0$. Con $K = 1$ el Nyquist no rodea al -1, y por lo tanto no da vueltas alrededor del -1 ($N = 0$), y en ese caso el sistema realimentado es estable puesto que su número de polos en el semiplano positivo es $Z = N + P = 0$. Sin embargo a partir de $K = 1/0{,}8 = 12{,}5$, el Nyquist da dos vueltas alrededor del -1 y el número de polos en el semiplano positivo del sistema realimentado es $Z = N + P = 2 + 0 = 2$. Por tanto el sistema realimentado es inestable para $K > 12{,}5$.

Problema 3

Ecuaciones en espacio de estados

Tenemos por un lado la ecuación del circuito eléctrico:

$$u(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + k_b\frac{d\theta(t)}{dt} \tag{1}$$

y por otro la del sistema mecánico:

$$k_p i(t) - B\frac{d\theta(t)}{dt} = J\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} \tag{2}$$

Si se quiere se pueden renombrar las variables de estado como:

$$x_1(t) = \theta(t) \tag{3}$$
$$x_2(t) = \dot{\theta}(t) \tag{4}$$
$$x_3(t) = i(t) \tag{5}$$

Como se pide explícitamente incluir la posición angular θ, es necesario introducir la ecuación que la relaciona con la velocidad angular:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t) \tag{6}$$

y ponemos las ecuaciones 1 y 2 en forma conveniente para obtener las tres ecuaciones en espacio de estados:

$$u(t) = Rx_3(t) + L\frac{dx_3(t)}{dt} + k_b x_2(t) \tag{7}$$

$$k_p x_3(t) - Bx_2(t) = J\frac{dx_2(t)}{dt} \tag{8}$$

y por último se despeja y se ponen en forma matricial 6, 7 y 8:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -B/J & k_p/J \\ 0 & -k_b/L & -R/L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/L \end{pmatrix} u(t) \tag{9}$$

En cuanto a la ecuación de salida:

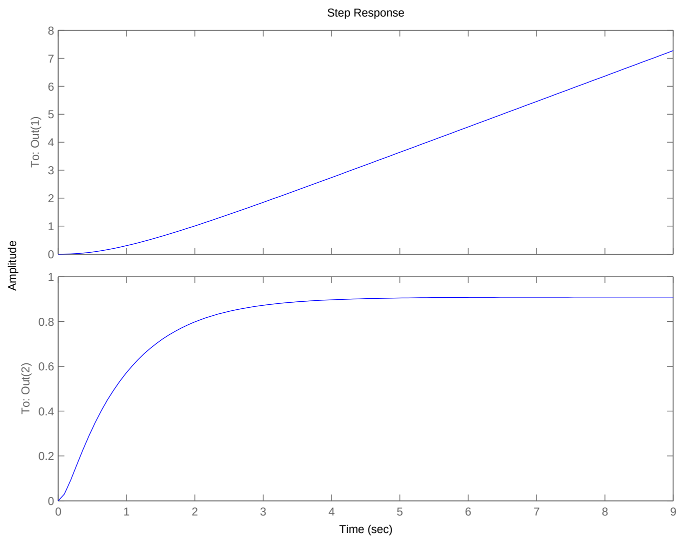
$$\begin{pmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} \tag{10}$$

Polos y respuesta

Los polos son las raíces de la ecuación característica:

$$|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -B/J-\lambda & k_p/J \\ 0 & -k_b/L & -R/L-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda\left[\left(-\frac{B}{J}-\lambda\right)\left(-\frac{R}{L}-\lambda\right)+\frac{k_p k_b}{LJ}\right]$$

Polinomio del que una vez particularizado para los valores dados de las constantes, obtenemos tres raíces $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -9{,}9$ y $\lambda_3 = -1{,}1$, es decir, dos polos estables y un polo en el origen. La dinámica de la velocidad viene marcada exclusivamente por los dos polos estables [1], y la de la posición además por el polo en el origen. Por la tanto, la forma que tendrá la respuesta a escalón de la posición (superior) y la de la velocidad (inferior), tal y como se pide, es la siguiente:



NOTA: No es necesario calcular estas respuestas ni mostrar los valores de los ejes que aquí aparecen, puesto que no se pide. Sólo es necesario la forma de las mismas.

[1] Se puede demostrar planteando de nuevo las ecuaciones prescindiendo de la variable posición.