Análisis Dinámico de Sistmas

2º Ingeniería de Telecomunicación

Criterio de Routh

Área de Ingeniería de Sistemas y Automática

Universidad de Oviedo

Criterio de Routh

- Método numérico (cfr. [Puente91]) que permite determinar el número de polos inestables en un polinomio dado.
- Se genera una tabla
- Los cambios de signo en la primera columna nos dan el número de polos inestables.
- Usado en función de parámetros permite también
  - Determinar rangos de estabilidad para un parámetro K
  - Determinar estabilidad relativa en función de σ

Criterio de Routh

Sea el polinomio

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n$$

- Primera regla: Si algún a_i es nulo o negativo, entonces el sistema tiene al menos una raíz inestable

$$\begin{aligned} 0 \quad = \quad & a_0 \cdot s^n - \\ & -a_0 \cdot (r_1 + r_2 + \cdots + r_n) s^{n-1} \\ & +a_0 \cdot (r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3 + \cdots) s^{n-2} \\ & -a_0 \cdot (r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + \cdots) s^{n-3} \\ & \cdots \\ & (-1)^n \cdot a_0 \cdot (r_1 r_2 \cdots r_n) \end{aligned}$$

obviamente, si $r_i < 0, \forall i$ entonces $a_i > 0, \forall i$

Criterio de Routh

- Para el polinomio

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n$$

- Se confecciona una tabla

$$\begin{array}{l|llll}
s^n & a_0 & a_2 & a_4 & ... \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & & \cdots \\
s^{n-3} & \cdots & & &
\end{array}$$

Criterio de Routh

- donde

$$\begin{array}{l|llll} s^n & a_0 & a_2 & a_4 & \dots \\ s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots \\ s^{n-2} & b_1 & b_2 & & \cdots \\ s^{n-3} & \cdots & & & \end{array}$$

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} = -\frac{1}{a_1} \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1} = -\frac{1}{a_1} \begin{vmatrix} a_0 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{vmatrix}$$

etc...

Criterio de Routh

- *Criterio de Routh*: El número de raíces de la ecuación característica con parte real positiva es igual al número de cambios de signo en los coeficientes de la primera columna
- En este ejemplo hay 2 raíces inestables

$$
\begin{array}{r|ll}
 & 5 & \\
 & 7 & \cdots \\
\text{c.s.}\longrightarrow & & \\
 & -3 & \cdots \\
\text{c.s.}\longrightarrow & & \\
 & 4 & \cdots
\end{array}
$$

Criterio de Routh

- Ejemplo

$$s^5 + s^4 + 3\,s^3 + 5\,s^2 + 2\,s + 1$$

$$\begin{array}{rc|lll} & s^5 & 1 & 3 & 2 \\ & s^4 & 1 & 5 & 1 \\ \text{c.s.}\longrightarrow & & & & \\ & s^3 & -2 & 1 & 0 \\ \text{c.s.}\longrightarrow & & & & \\ & s^2 & 11/2 & 1 & 0 \\ & s^1 & \frac{15}{11} & 0 & 0 \\ & s^0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

... el polinomio tiene dos raíces positivas

- Mediante MATLAB puede comprobarse que las raíces son

$$\begin{bmatrix} 0{,}2866 + 1{,}773\, j \\ 0{,}2866 - 1{,}773\, j \\ -1{,}229 \\ -0{,}1719 + 0{,}4717\, j \\ -0{,}1719 - 0{,}4717\, j \end{bmatrix}$$

donde efectivamente hay 2 raíces positivas

Criterio de Routh

- Ejemplo

$$s^7 + 2\,s^6 - 3\,s^5 + 4\,s^4 + 5\,s^3 + 5\,s^2 - 5\,s + 6$$

$$\begin{array}{r|llll}
s^7 & 1{,}0 & -3{,}0 & 5{,}0 & -5{,}0 \\
s^6 & 2{,}0 & 4{,}0 & 5{,}0 & 6{,}0 \\
\text{c.s.}\longrightarrow \quad s^5 & -5{,}0 & 2{,}500 & -8{,}0 & 0 \\
\text{c.s.}\longrightarrow \quad s^4 & 5{,}0 & 1{,}800 & 6{,}0 & 0 \\
s^3 & 4{,}300 & -2{,}0 & 0 & 0 \\
s^2 & 4{,}126 & 6{,}0 & 0 & 0 \\
\text{c.s.}\longrightarrow \quad s^1 & -8{,}254 & 0 & 0 & 0 \\
\text{c.s.}\longrightarrow \quad s^0 & 6{,}0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

... el polinomio tiene 4 raíces positivas

- Las raíces del polinomio son

$$\begin{bmatrix} -3{,}229 \\ -0{,}8659 + 0{,}7893\,j \\ -0{,}8659 - 0{,}7893\,j \\ 1{,}039 + 1{,}106\,j \\ 1{,}039 - 1{,}106\,j \\ 0{,}4411 + 0{,}6266\,j \\ 0{,}4411 - 0{,}6266\,j \end{bmatrix}$$

...efectivamente, hay 4 positivas.

Criterio de Routh: Casos Especiales

Caso Especial 1: Aparición de un cero en la primera columna

- Aparición de un cero en la primera columna nos crea una indeterminación del tipo $\frac{algo}{0}$
- *Solución 1*: es sustituir por ϵ pequeño y positivo
- Ejemplo

$$s^4 + 2\,s^3 + 4\,s^2 + 8\,s + 5$$

$$\begin{array}{cc|lll} + & s^4 & 1 & 4 & 5 \\ + & s^3 & 2 & 8 & 0 \\ + & s^2 & \epsilon & 5 & 0 \\ - & s^1 & -\frac{10-8\,\epsilon}{\epsilon} & 0 & 0 \\ + & s^0 & 5 & 0 & 0 \end{array}$$

- Vemos que hay dos cambios de signo...

- ... efectivamente, en este caso las raíces que da MATLAB son

$$\begin{bmatrix} 0{,}2013 + 1{,}877\,j \\ 0{,}2013 - 1{,}877\,j \\ -1{,}403 \\ -1{,}0 \end{bmatrix}$$

- *Solución 2*: Hacer el cambio de variable $s \rightarrow \frac{1}{x}$. Las raíces del polinomio en x tendrán que tener el mismo signo (el valor no nos importa) que las del polinomio original.

- Haciendo el cambio queda

$$5\,x^4 + 8\,x^3 + 4\,x^2 + 2\,x + 1$$

- la tabla de Routh es

$$\begin{array}{cc|lll} + & s^4 & 5 & 4 & 1 \\ + & s^3 & 8 & 2 & 0 \\ + & s^2 & 11/4 & 1 & 0 \\ - & s^1 & -\frac{10}{11} & 0 & 0 \\ + & s^0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

- tiene dos cambios de signo $\rightarrow$ dos raíces inestables.

- MATLAB nos da

$$\begin{bmatrix} -1{,}0 \\ -0{,}7129 \\ 0{,}05647 + 0{,}5266\,j \\ 0{,}05647 - 0{,}5266\,j \end{bmatrix}$$

Criterio de Routh: Casos Especiales

Caso especial 2: Aparición de una fila de ceros

- La aparición de una fila de ceros indica simetría respecto al origen (por ejemplo, dos polos imaginarios puros, o dos polos reales, uno positivo y otro negativo a igual distancia del origen)
- Procedimiento
  - formar una ecuación auxiliar (que será siempre par) con la fila anterior a la de ceros
  - Resolverla. Las raíces son las que generan la fila de ceros.
  - Sustituir la ecuación auxiliar por su derivada (que tendrá un orden menor) y continuar

- Ejemplo

$$s^4 + 2\,s^3 + 11\,s^2 + 18\,s + 18$$

- Tabla de Routh

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 11 & 18 \\ s^3 & 2 & 18 & 0 \\ s^2 & 2 & 18 & 0 \\ s^1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Ecuación auxiliar:

$$A(s) = 2s^2 + 18 \quad \rightarrow \quad s = \pm 3j$$

Derivada:

$$A'(s) = 4s$$

Continuamos sustituyendo la fila de ceros por $A'(s)$

$$
\begin{array}{cc|ccc}
+ & s^4 & 1 & 11 & 18 \\
+ & s^3 & 2 & 18 & 0 \\
+ & s^2 & 2 & 18 & 0 \\
+ & s^1 & 4 & 0 & 0 \\
+ & s^0 & 18 & 0 & 0
\end{array}
$$

En este caso, comprobamos que, salvo las raíces en el eje imaginario, el resto son estables. Las raíces determinadas utilizando MATLAB son

$$
\begin{bmatrix}
3{,}0\,j \\
-3{,}0\,j \\
-1{,}0 + 1{,}0\,j \\
-1{,}0 - 1{,}0\,j
\end{bmatrix}
$$

Criterio de Routh: Aplicaciones

Determinación de la estabilidad en función de un parámetro

- Ejemplo: Sistema con realimentación proporcional (K)

$$G(s) = \frac{K}{(s+1)(s+2)(s+5)}$$

$$M(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{K}{(s+1)(s+2)(s+5)+K} = \frac{K}{s^3+8s^2+17s+10+K}$$

- ¿Para qué valores de K es estable?

- Tabla de Routh en función de K

$$\begin{array}{c|ll} s^3 & 1 & 17 \\ s^2 & 8 & 10+K \\ s^1 & \frac{63}{4} - 1/8\,K & 0 \\ s^0 & 10+K & 0 \end{array}$$

Las condiciones para que el sistema sea estable son

$$\frac{63}{4} - 1/8\,K > 0$$

y

$$10 + K > 0$$

de ambas condiciones obtenemos que

$$-10 < K < 126$$

Criterio de Routh: Aplicaciones

Estabilidad Relativa

- También podemos exigir un tiempo de establecimiento menor a uno dado.
- Esta exigencia puede plantearse aproximadamente exigiendo que la parte real de las raíces no supere un valor determinado.
- Ejemplo, si exigimos que $\sigma \geq 1$ podemos plantear Routh tras hacer un cambio de variable

$$s' = s + \sigma$$

Las raíces del polinomio en s' serán las de s desplazadas σ hacia la derecha (hacia la zona inestable).

Si el polinomio en s' es estable, entonces el polinomio en s tendrá la parte real de todas sus raíces más a la izquierda de -1

- para el problema anterior sustituyendo $s = s' - 1$ tenemos

$$P(s') = s'^3 + 5s'^2 + 4s' + K$$

$$\begin{array}{c|ll} s'^3 & 1 & 4 \\ s'^2 & 5 & K \\ s'^1 & -1/5\,K + 4 & 0 \\ s'^0 & K & 0 \end{array}$$

Esto nos exige que

$$\begin{aligned} 5 + K &> 0 \quad (1) \\ -1/5\,K + 4 &> 0 \quad (2) \end{aligned}$$

con lo cual

$$0 < K < 20$$

(Ultima Página)