Análisis Dinámico de Sistemas

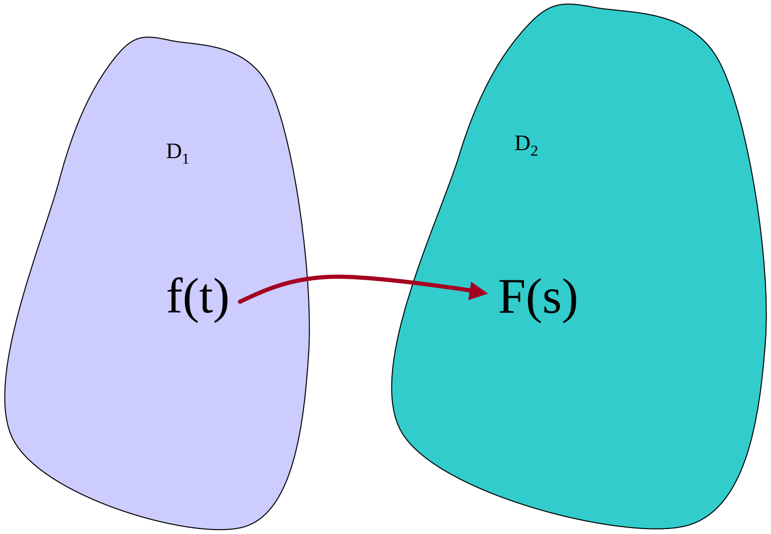
Tema 2 (b)

Área de Ingeniería de Sistemas y Automática

Universidad de Oviedo

Concepto de transformada

- Transformación: concepto relacionado con el de correspondencia entre dos conjuntos
- Particularmente puede considerarse el caso de correspondencia entre conjuntos de funciones



La Transformada de Laplace

- Entre las transformaciones de funciones, unas muy típicas son las del tipo:

$$F(s) = \int_a^b K(t,s) f(t) dt$$

- La **Transformada de Laplace** corresponde al caso:

$$K(t,s) = e^{-ts} \Rightarrow F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt = \mathcal{L}[f(t)]$$

- La Transformada de Laplace convierte EDL-CC en una expresión racional polinómica. Se pasa de la variable tiempo, t, a una variable compleja s.

Transformaciones Típicas

- Escalón unitario

$$u(t) = \begin{cases} 1, t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{cases} \rightarrow U(s) = \int_0^\infty 1 \cdot e^{-st} = \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^\infty = \frac{1}{s}$$

- Rampa unitaria

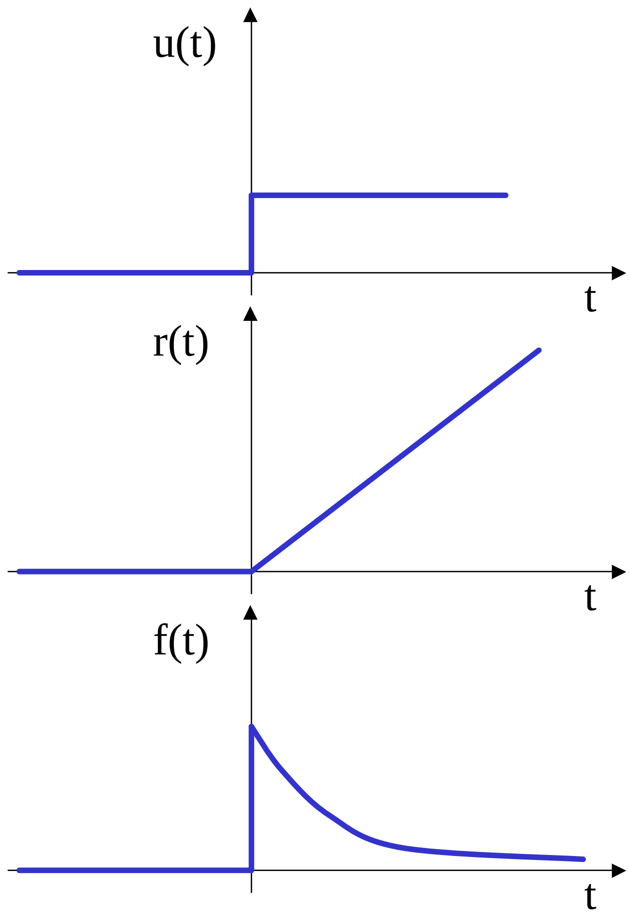
$$r(t) = \begin{cases} t, t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{cases} \rightarrow R(s) = \frac{1}{s^2}$$

- Exponencial

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\sigma t}, t \geq 0 \\ 0, \qquad t < 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow F(s) = \int_0^\infty e^{-\sigma t} \cdot e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{-(\sigma + s)t} dt = \left[-\frac{1}{s+\sigma} e^{-(s+\sigma)t} \right]_0^\infty = \frac{1}{s+\sigma}$$

Transformaciones Típicas



Escalón

Rampa

Exponencial

Transformaciones Típicas

- Seno

$$f(t) = \sin(\omega t) \rightarrow F(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

- Impulso unitario

$$f(t) = \delta(t) \rightarrow F(s) = 1$$

El impulso unitario (o función delta de Dirac) es una función que es nula para todo t excepto para $t = 0$ donde se hace infinita. Se puede ver como un límite de la función pulso $p_\epsilon(t)$:

$$\begin{aligned} p_\epsilon(t) &= \begin{cases} 1/\epsilon & 0 \leq t < 0 \\ 0 & t < 0, t > \epsilon \end{cases} \\ \delta(t) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} p_\epsilon(t) \end{aligned}$$

Propiedades Típicas

- Linealidad

$$\mathcal{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha \mathcal{L}[f(t)] + \beta \mathcal{L}[g(t)] \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

- Escalado de tiempos

$$\mathcal{L}[f(t/\alpha)] = \alpha F(\alpha s)$$

- Desplazamiento en s

$$F(s+\alpha) = \mathcal{L}(e^{-\alpha t} f(t))$$

- Desplazamiento en el tiempo

$$\mathcal{L}[f(t-T)u(t-T)] = e^{-sT} F(s), \qquad T > 0, \quad f(t) = 0, \forall t < 0$$

Propiedades Típicas

- Diferenciación en t

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\dot{f}(t)) &= sF(s) - f(0) \\ &\cdots \\ \mathcal{L}(f^{(n)}(t)) &= s^n F(s) - \sum_{k=1}^{n} f^{(k-1)}(0) s^{n-k}\end{aligned}$$

- Integración en t

$$\mathcal{L}[f^{-1}(t)] = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{-1}(0)}{s}$$

($f^{-1}(t)$ denota la primitiva de $f(t)$)

- Diferenciación en s

$$\mathcal{L}[tf(t)] = -\frac{dF(s)}{ds}$$

Propiedades Típicas

- Integración en s

$$\mathcal{L}[f(t)/t] = \int_s^\infty F(s)ds$$

- Teorema del valor inicial

$$f(0^+) = \lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{s \to \infty} sF(s)$$

- Teorema del valor final

$$f(\infty) = \lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s)$$

Teorema de Convolución

- Convolución entre dos funciones

$$f * g = c(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

- Teorema de Convolución

$$C(s) = \mathcal{L}[f * g] = F(s) \cdot G(s)$$

Concepto de Función de Transferencia

- La linealización nos da EDL-CC:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_0 u + b_1 \frac{du}{dt} + \cdots + b_m \frac{d^m u}{dt^m}$$

- Suponiendo condiciones iniciales nulas y haciendo $\mathcal{L}$[expresión]

$$a_n s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \cdots a_0 Y(s) =$$
$$= b_0 U(s) + b_1 s U(s) + \cdots b_m s^m U(s)$$

reagrupando queda,

$$\left(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots a_0\right) Y(s) = \left(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0\right) U(s)$$

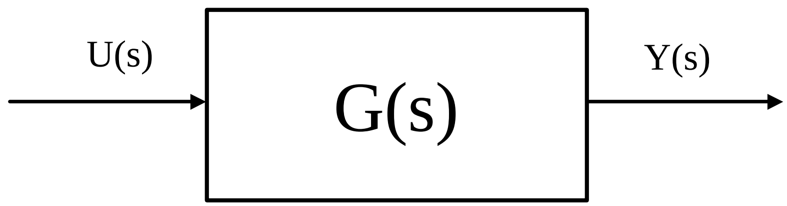
Finalmente,

$$Y(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0} U(s)$$

Concepto de Función de Transferencia

- Tenemos así una función $G(s)$, denominada **función de transferencia**, que contiene información del comportamiento del sistema ante cualquier entrada:

$$Y(s) = G(s)U(s)$$



- La respuesta temporal $y(t)$ ante una entrada $u(t)$ se halla calculando la tranformada de Laplace de ésta, $U(s)$, y posteriormente aplicando la tranformada inversa de Laplace sobre su producto con la función de transferencia:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}[G(s)U(s)]$$

Concepto de Función de Transferencia

- Aplicando el Teorema de Convolución podemos verlo expresado como:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}[G(s)U(s)] = g(t) * u(t)$$

  donde g(t) es la transformada inversa de la función de transferencia y se denomina **respuesta impulsional**.

- A las raíces del polinomio del numerador de la función de transferencia se les denomina **ceros** y las raíces del denominador, **polos**.